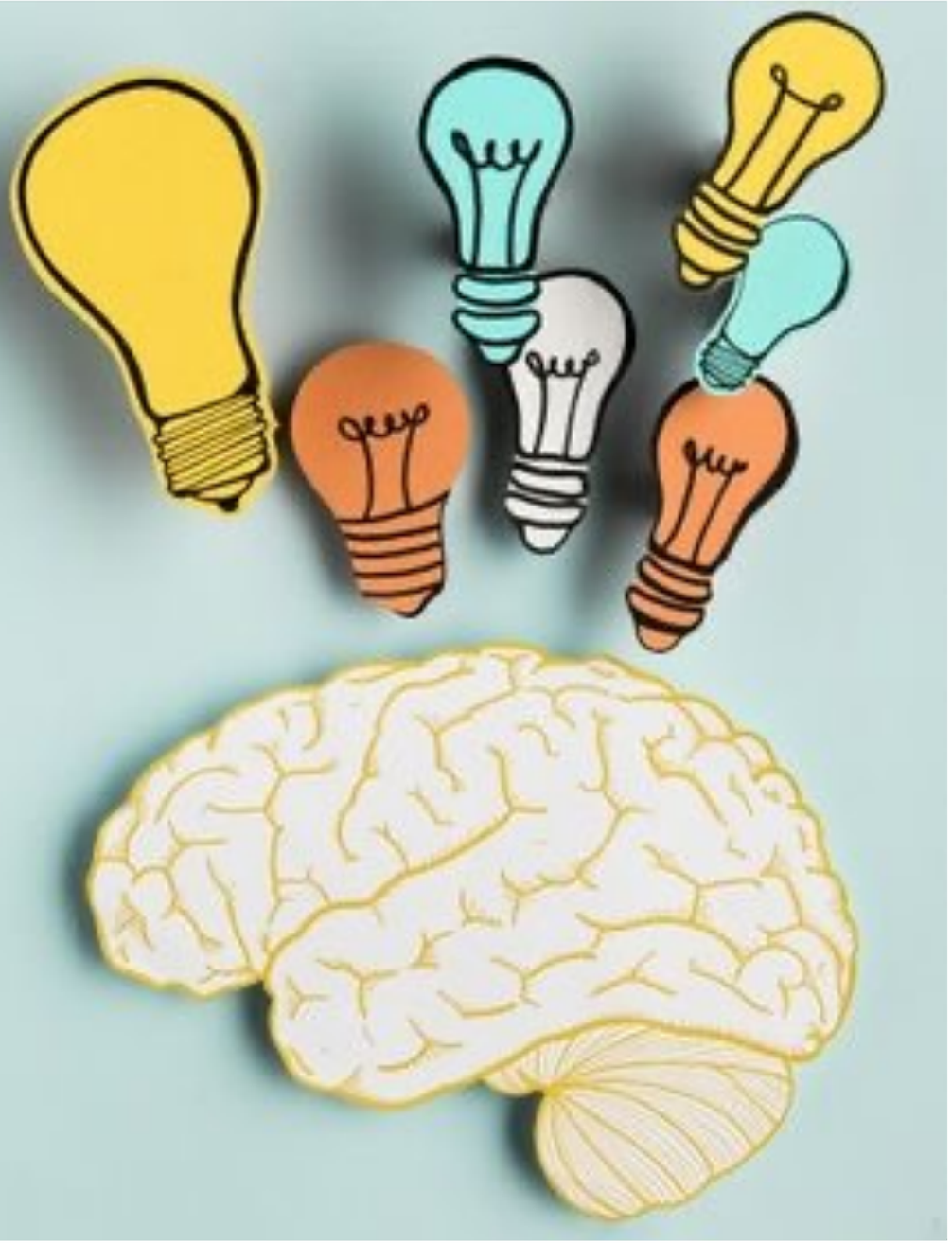
حافظ على الشغف الذي يجعلك تبتسم بمجرد التفكير به، ابتسم لأنك تملك حلمًا عظيمًا وتنتظر أمرًا رائعًا من الله..



الضرب الداخلي

ثالث ثانوي

رياضيات ٦

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - انتاج - توثيق

فيما سبق

درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًّا وجبريًّا. (الدرس 2–5)

والآن

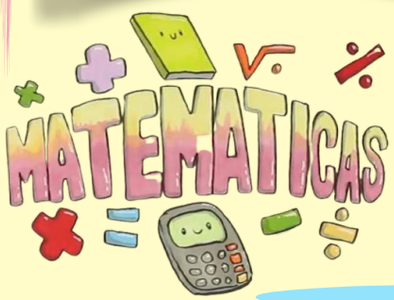
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات

الضرب الداخلي
dot product

المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors

الشغل
work



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - انتاج - توثيق

موضوع الدرس: الضرب الداخلي

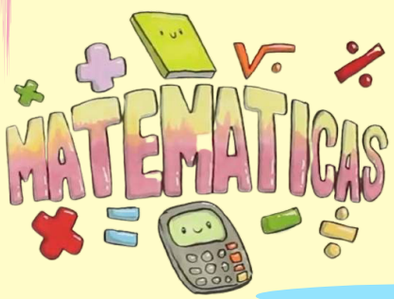
لماذا:

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

قراءة الرياضيات

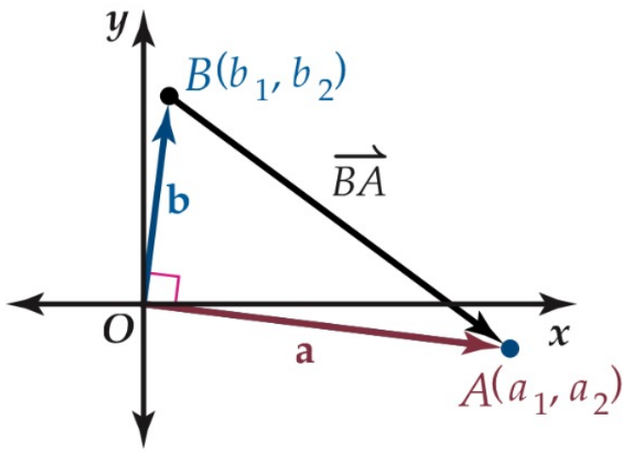
الضرب القياسي

يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - انتاج - توثيق

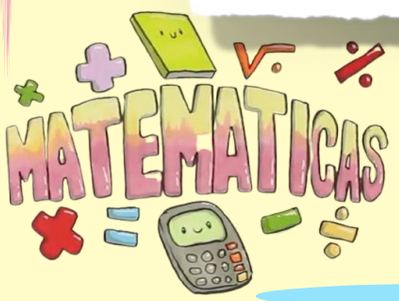


الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-5 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان **a** , **b** في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

تعريف طول متجه	$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
ربّع الطرفين	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$
فُك الأقواس	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = {a_1}^2 - 2a_1b_1 + {b_1}^2 + {a_2}^2 - 2a_2b_2 + {b_2}^2$
جمّع الحدود المربعة	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$
$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$, $\|\mathbf{a}\|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}$, $\|\mathbf{b}\|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2$	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.
ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين **a** , **b** ، ويُرمز له بالرمز **a** • **b** ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a , b ، أو يُقرأ اختصارًا **a** dot **b** .



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: الضرب الداخلي

مفهوم أساسي — **الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي**

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

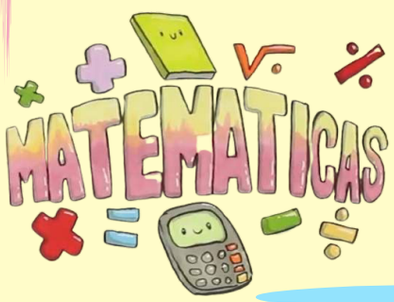
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي — **المتجهان المتعامدان**

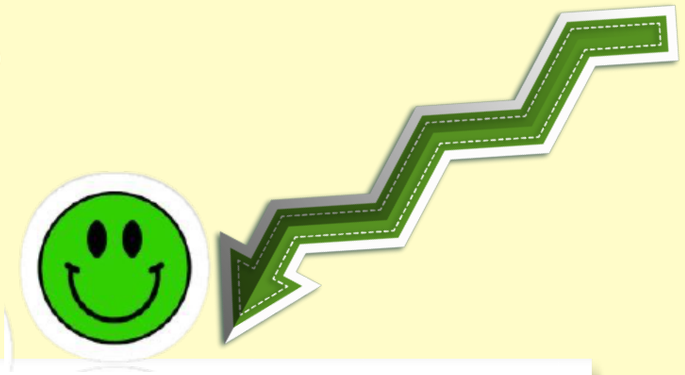
يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن :
$\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

موضوع الدرس: الضرب الداخلي



مـثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

(a $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

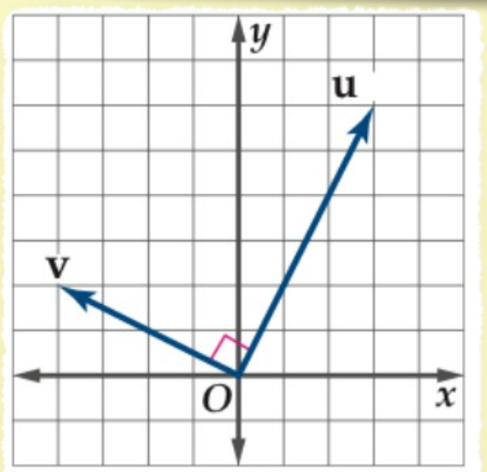
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$$
$$= 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضَّح في الشكل 1.3.1 .

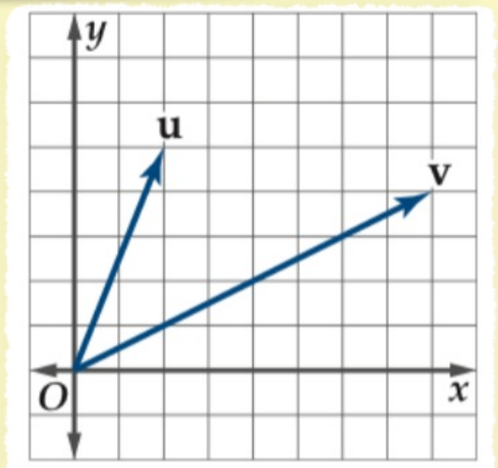
(b $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$$
$$= 36$$

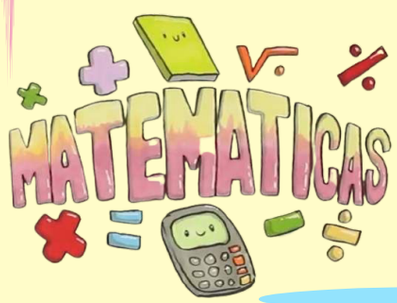
بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل 1.3.2 .



الشكل 1.3.1



الشكل 1.3.2



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

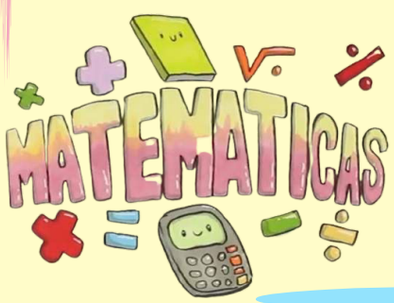
موضوع الدرس: الضرب الداخلي

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

(1A $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

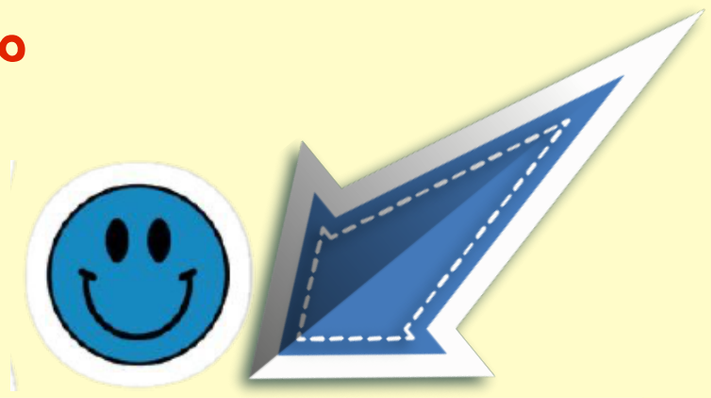
(1B $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - انتاج - توثيق

موضوع الدرس: الضرب الداخلي



نظريَّة

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

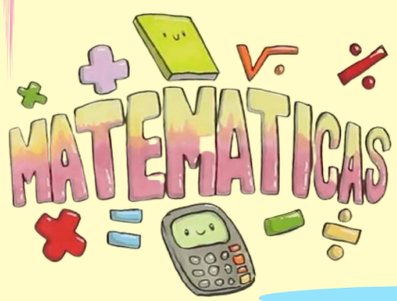
البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

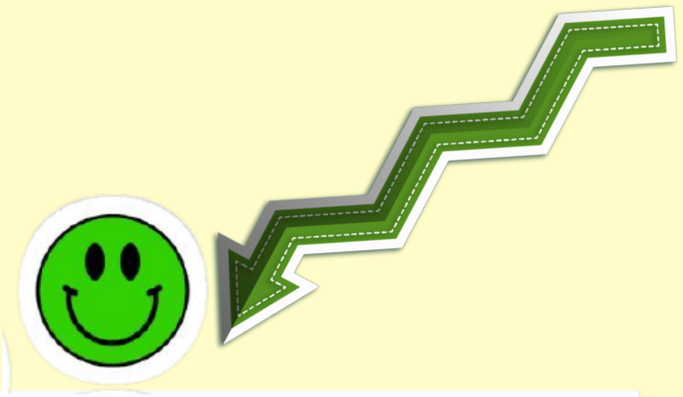
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$	الضرب الداخلي
$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$	اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$
$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$	$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 37–35



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: الضرب الداخلي



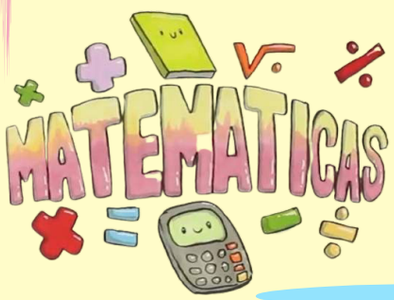
مـثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$.

بما أن: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \bullet \mathbf{a}$ ، فإن: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$.

$|\langle -5, 12 \rangle| = \sqrt{\langle -5, 12 \rangle \bullet \langle -5, 12 \rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بسّط



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

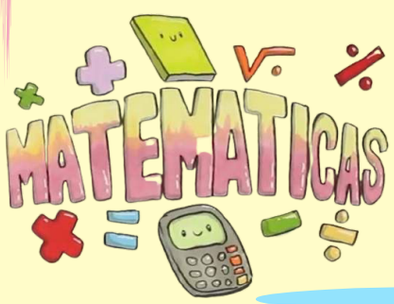
موضوع الدرس: الضرب الداخلي

تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

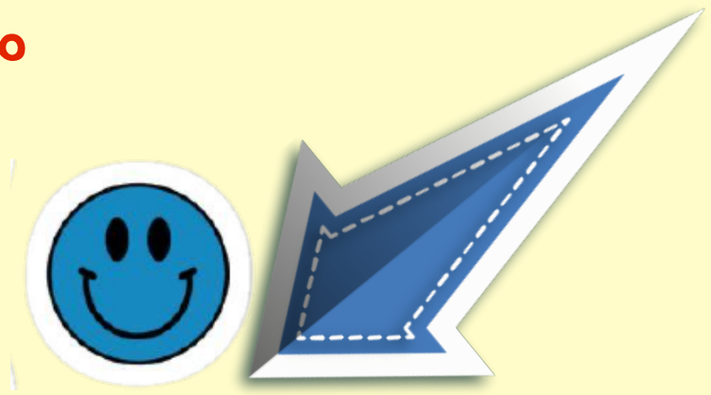
(2A $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$

(2B $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

موضوع الدرس: الضرب الداخلي

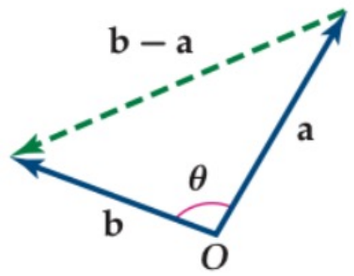


مفهوم أساسي

الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

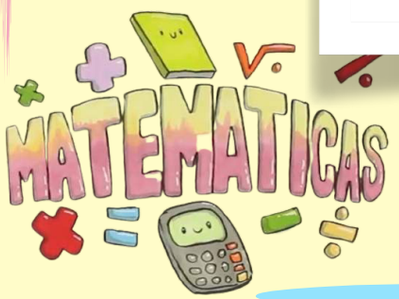
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



البرهان

إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

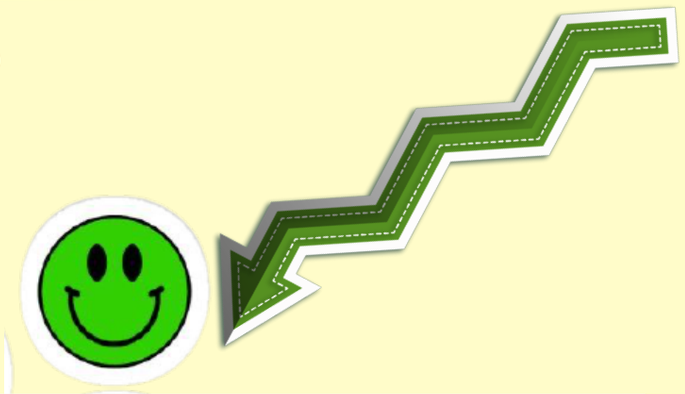
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}-\mathbf{a}\rvert^2$	قانون جيوب التمام
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$\lvert\mathbf{u}\rvert^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{a}\rvert^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$
$-2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	بطرح $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ من الطرفين
$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	بقسمة الطرفين على $-2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert$



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

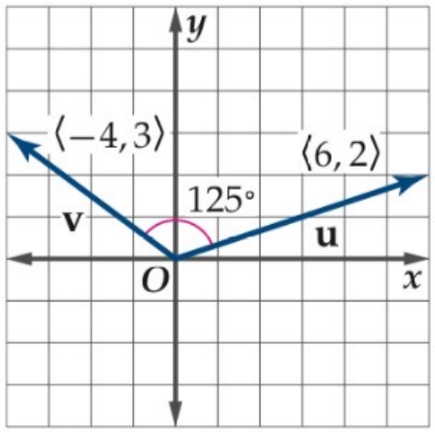
موضوع الدرس: الضرب الداخلي



مـثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$



الزاوية بين متجهين $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

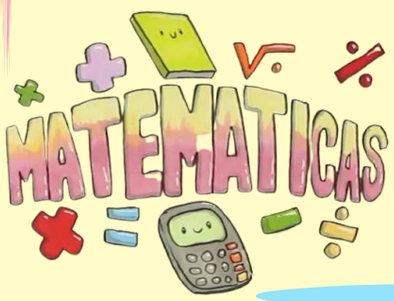
$\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$ $\cos\theta = \dfrac{\langle 6, 2 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle}{|\langle 6, 2 \rangle|\,|\langle -4, 3 \rangle|}$

الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه $\cos\theta = \dfrac{-24 + 6}{\sqrt{40}\sqrt{25}}$

بسّط $\cos\theta = \dfrac{-18}{10\sqrt{10}}$

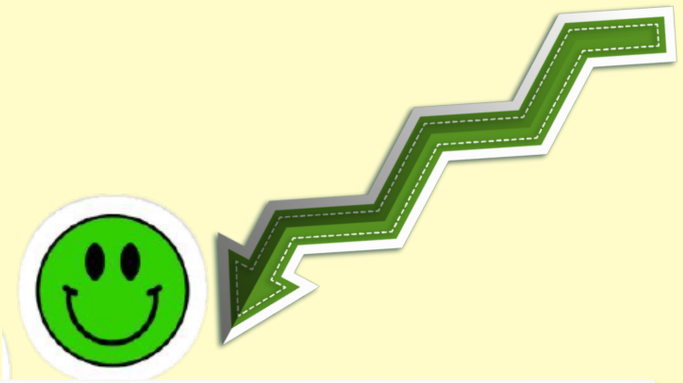
معكوس جيب التمام $\theta = \cos^{-1}\dfrac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: الضرب الداخلي



(b $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

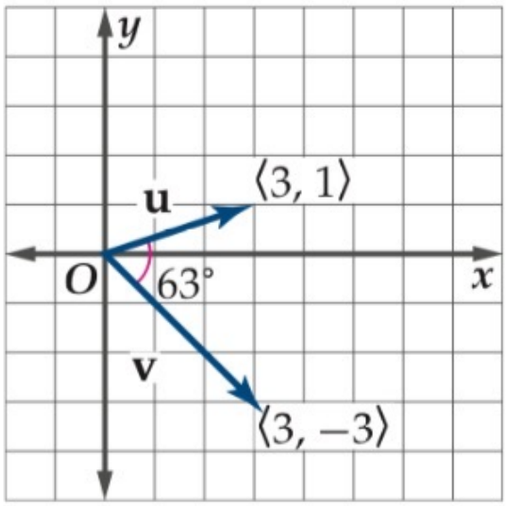
الزاوية بين متجهين $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$ $\cos \theta = \dfrac{\langle 3, 1 \rangle \cdot \langle 3, -3 \rangle}{|\langle 3, 1 \rangle|\,|\langle 3, -3 \rangle|}$

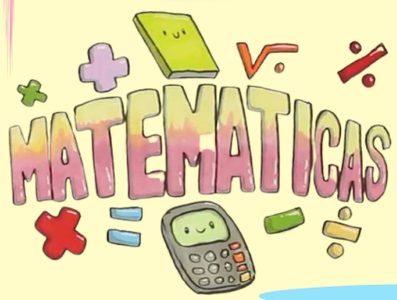
الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه $\cos \theta = \dfrac{9 + (-3)}{\sqrt{10}\sqrt{18}}$

بسّط $\cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

معكوس جيب التمام $\theta = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 63°$



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ هو $63°$ تقريبًا، كما في الشكل المجاور.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

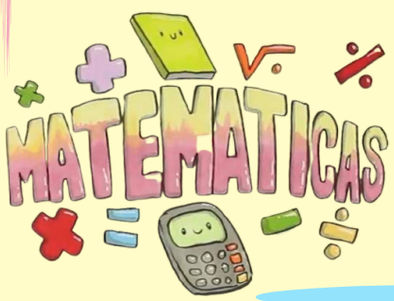
موضوع الدرس: الضرب الداخلي

تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

(3B $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

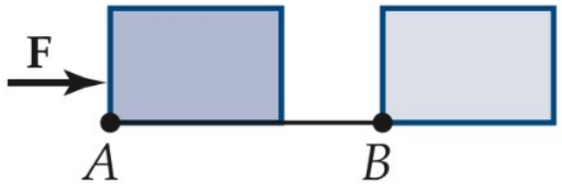


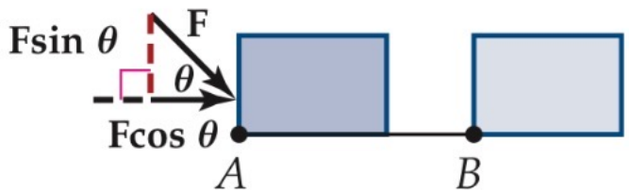
إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

موضوع الدرس: الضرب الداخلي

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت **F** قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت **F** موازيةً لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن **F** يساوي مقدار القوة **F** مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.

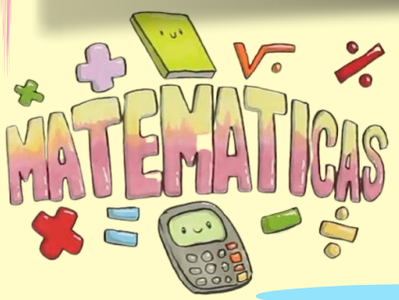




ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة **F** ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

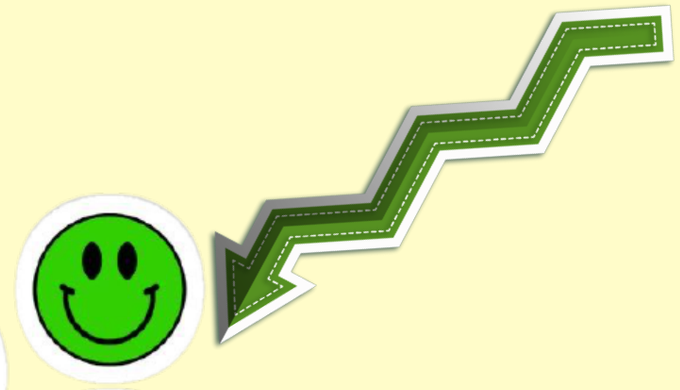
$$W = \mathbf{F} \bullet \overrightarrow{AB}$$

أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة **F** ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - انتاج - توثيق

موضوع الدرس: الضرب الداخلي



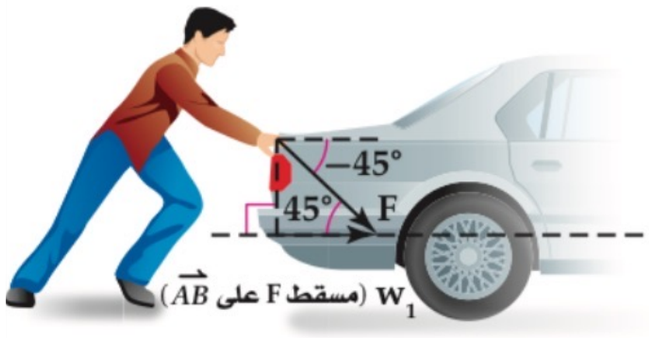
إرشادات للدراسة

وحدات الشغل

وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل ، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

مثال 4 من واقع الحياة

حساب الشغل



سيارة : يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة **F** بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي :

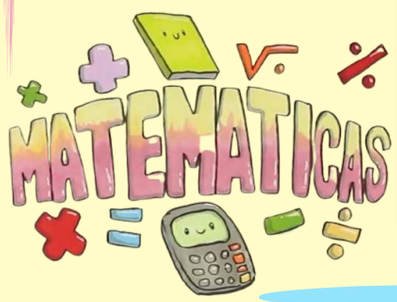
$\langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0\rangle$.

قاعدة الضرب الداخلي للشغل $\quad W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

عوّض $\quad = \langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle \cdot \langle 10, 0\rangle$

الضرب الداخلي $\quad = [120\cos(-45°)](10) \approx 848.5$

أي أن الشخص يبذل 848.5J من الشغل؛ لدفع السيارة.

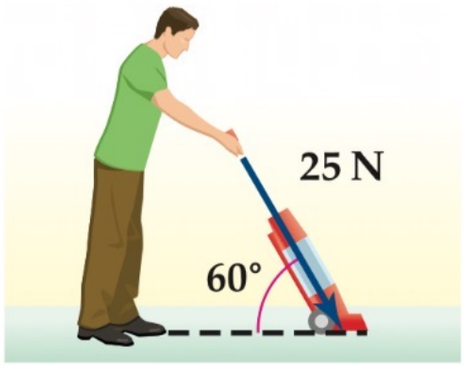


إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

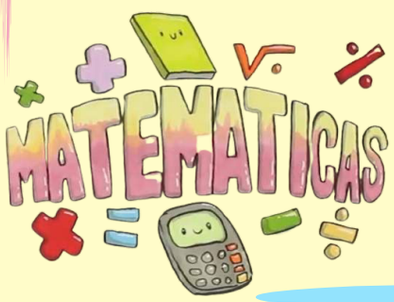
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

موضوع الدرس: الضرب الداخلي

تحقق من فهمك



4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟

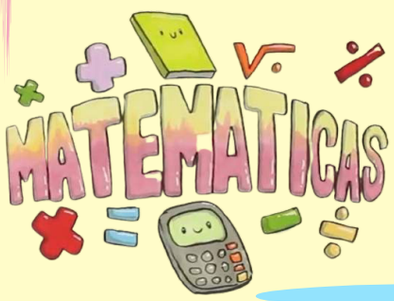


إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - انتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا

33) اكتشف الخطأ: يدرس كلٌّ من فهدٍ وفيصلٍ خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن:
$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضِّح إجابتك.

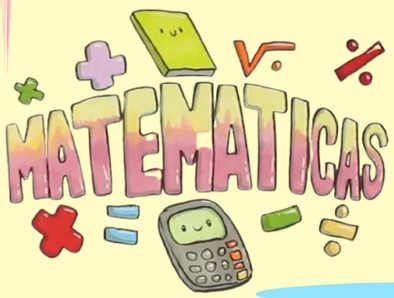


إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - انتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا

38) برهان: إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ يساوي $90°$، فأثبت أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين.



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math