لن تكون عظيماً حتى تملأ عقلك بالعلم النافع ، وحياتك بالعمل الصارق..

# تقدير النهايات بيانياً

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

# تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

**النهاية من جهتين**
two-sided limit

## لماذا ؟

هل هناك نهايات للأرقام المسجَّلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجَّل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة 5.05 m. ويمكن استعمال الدالة:

$f(x) = \dfrac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129\,x}}$ لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م ، حيث $x$ عدد السنوات منذ عام 1900 م ، يمكنك استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب $x$ من المالانهاية؛ للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

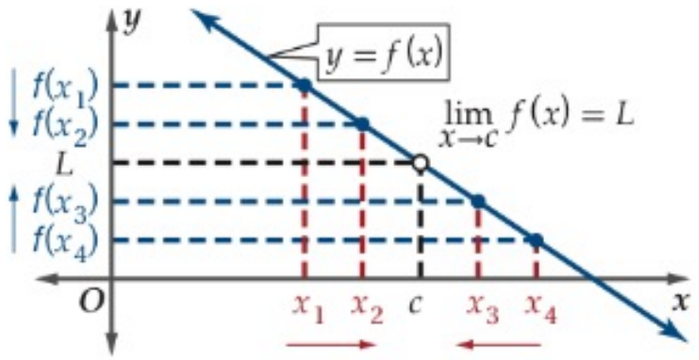
**تقدير النهايات عند قيم محددة :** يتمحور علمُ التفاضلِ والتكاملِ حول مسألتين أساسيتين:

- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور $x$.

وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.

تعلمت سابقًا أنه إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة $L$، كلما اقتربت قيم $x$ من العدد $c$ من كلا الجهتين ، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ هي $L$ ، وتكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من العدد $c$ ؛ أي $\lim_{x \to c} f(x)$ ، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيًّا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

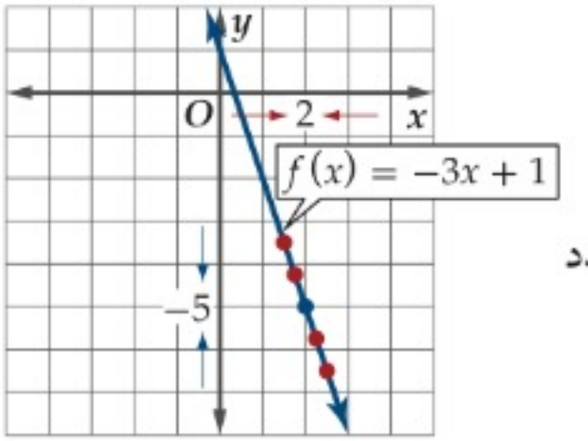
# مثال ١ : تقدير النهاية ( النهاية تساوي قيمة الدالة )

قدِّر $\lim_{x\to 2}(-3x+1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

**التحليل بيانيًا :** مثِّل الدالة الخطية $y=-3x+1$ بيانيًّا باستعمال النقطتين $(-2, 1), (1, -2)$.

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=-3x+1$، أنه كلما اقتربت $x$ من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد $-5$ ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن :

$$\lim_{x\to 2}(-3x+1)=-5 .$$




**التعزيز عدديًّا :** كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم $x$ القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

| | $x$ تقترب من 2 ← | | | | → $x$ تقترب من 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2.1 | 2.01 | 2.001 | 2 | 1.999 | 1.99 | 1.9 |
| $f(x)$ | −5.3 | −5.03 | −5.003 | | −4.997 | −4.97 | −4.7 |

يبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت $x$ من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد $-5$ ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

**النهاية من جهتين**
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

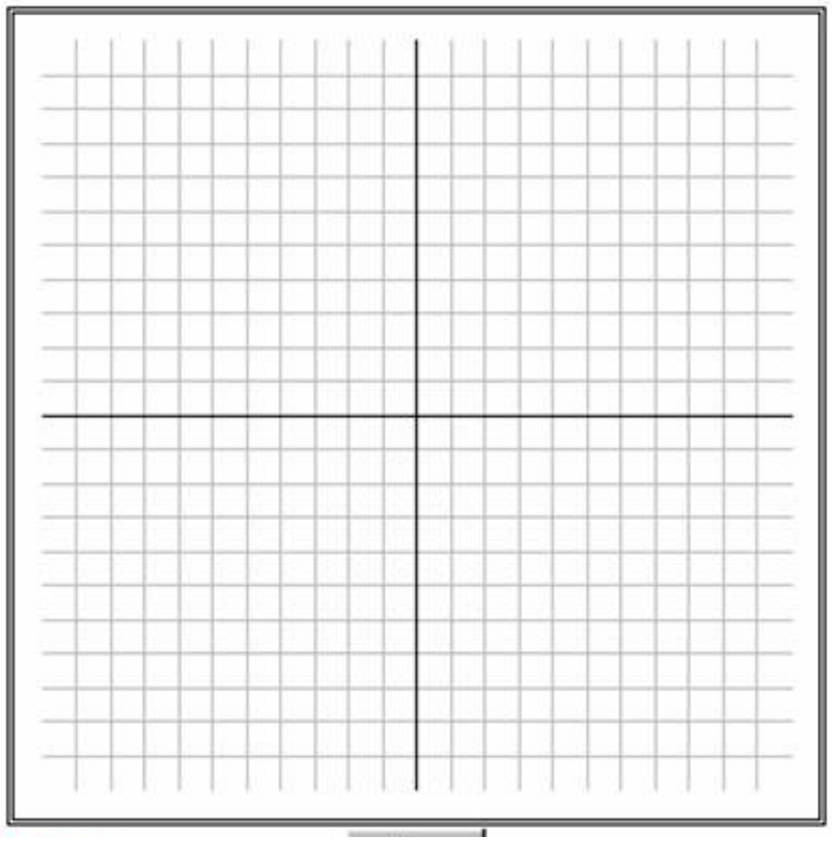
تقدير النهايات بيانياً

# تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

**(1A** $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$

**التحليل بيانياً**



**التعزيز العددي**

| $x$ | تقترب من 2 ← | | | | → تقترب من 2 $x$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**

one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

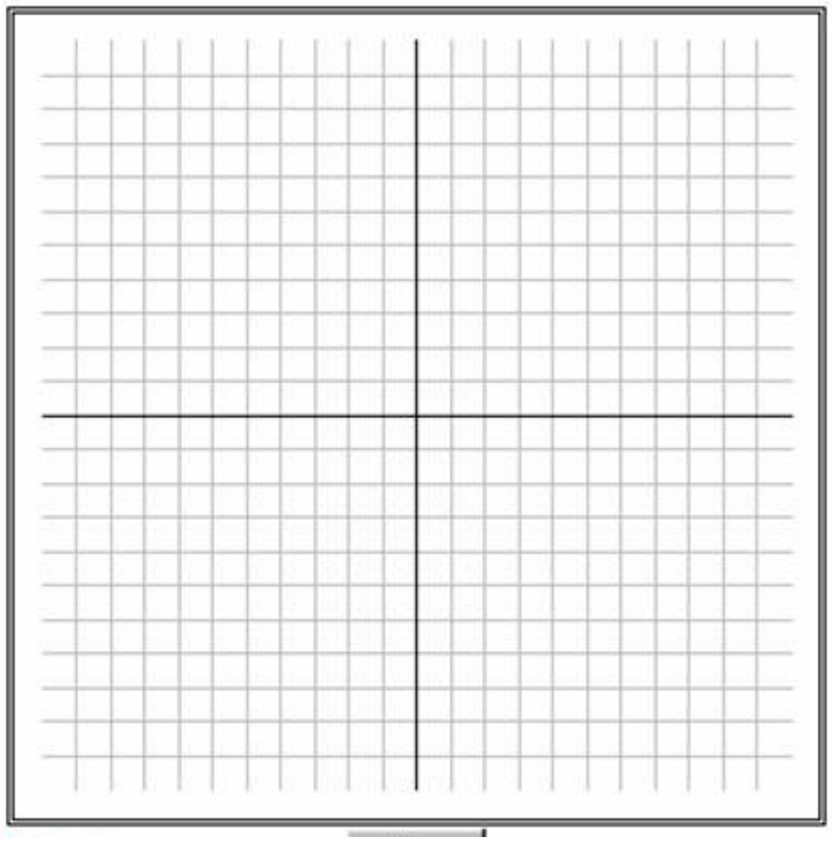
# تحقق من فهمك

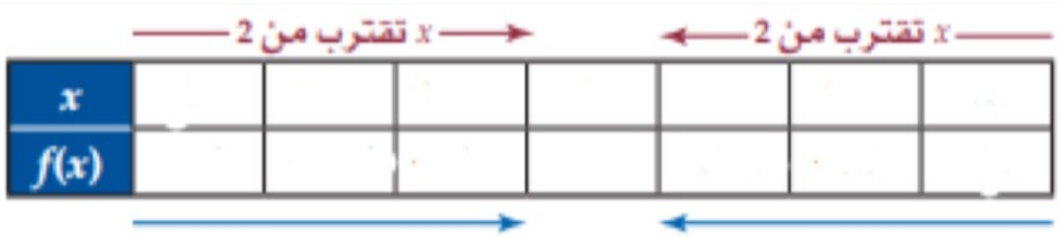
قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

**(1B** $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$

**التحليل بيانياً**

**التعزيز العددي**





## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**

one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مثال ٢ : تقدير النهاية ( النهاية لاتساوي قيمة الدالة )

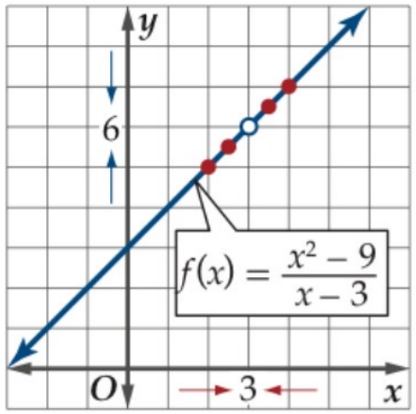
قدِّر $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدولِ قيم.

**التحليل بيانيًا :**

مجال الدالة $R-\{3\}$

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ المجاور، أنه كلما اقتربت $x$ من العدد 3 ، فإن قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد 6 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$




**التعزيز عدديًا :**

كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم $x$ القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

$x$ تقترب من 3 ← ، → $x$ تقترب من 3

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.9 | 5.99 | 5.999 | | 6.001 | 6.01 | 6.1 |

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ ، أنه كلما اقتربت قيم $x$ من العدد 3 ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

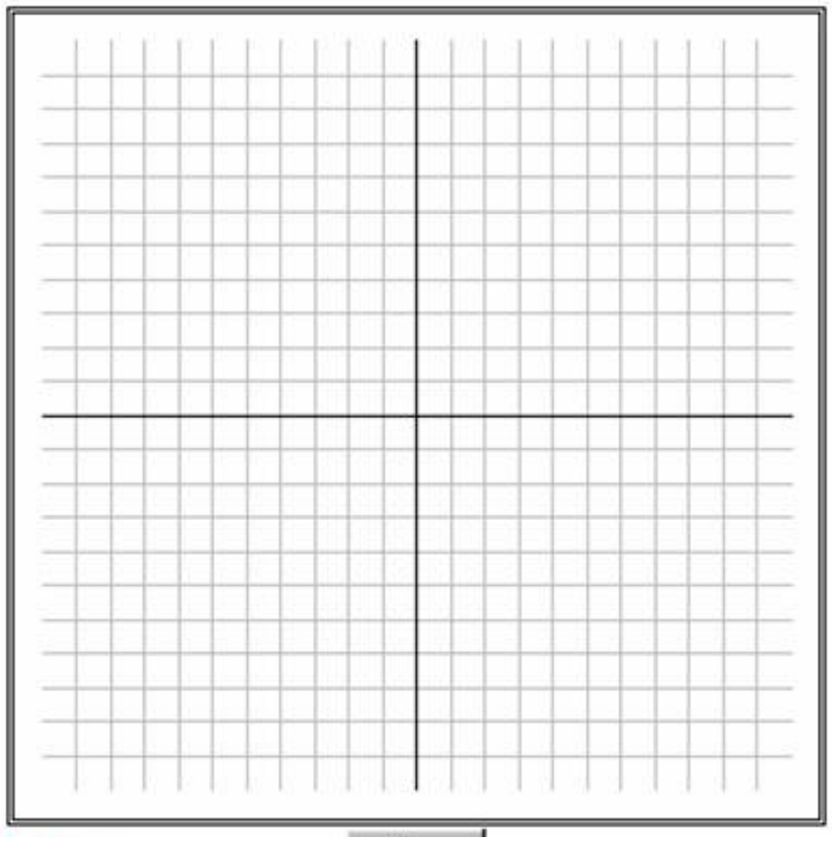
تقدير النهايات بيانياً

# تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

**(2A** $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

**التحليل بيانياً**



**التعزيز العددي**

| | $x$ تقترب من 2 ← | | | | → $x$ تقترب من 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | |

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**

one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

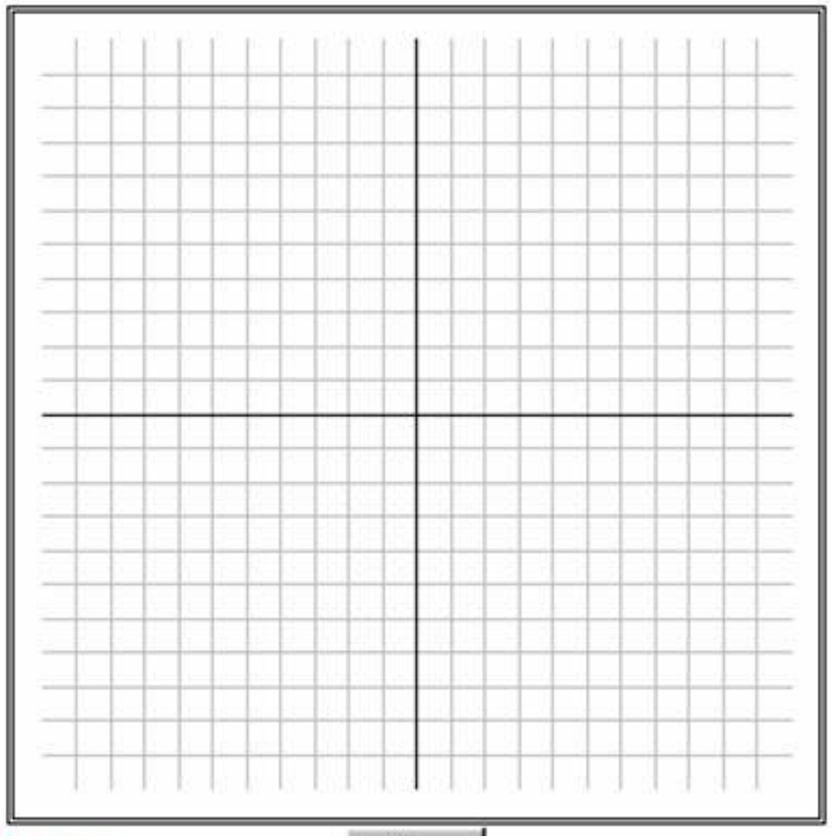
تقدير النهايات بيانياً

# تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

**(2B** $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$

**التحليل بيانياً**



**التعزيز العددي**

| | $x$ تقترب من 2 ← | | | | → $x$ تقترب من 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | |

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

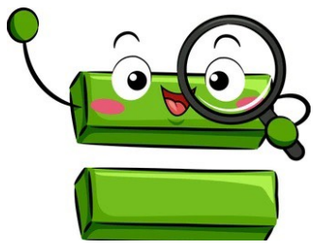
**النهاية من جهة واحدة**

one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

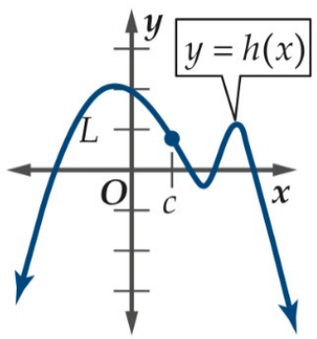


في المثال 2 ، لاحظ أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 عند اقتراب قيم $x$ من العدد 3، على الرغم من أن $f(3) \neq 6$ .
فالعبارة $\frac{x^2-9}{x-3}$ غير معرّفة عندما $x = 3$. وهذه الملاحظة توضِّح مفهومًا مهمًّا في النهايات.

## مفهوم أساسي — عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

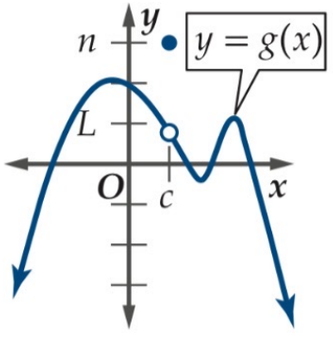
**التعبير اللفظي:** لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من العدد $c$ على قيمة الدالة عند $c$.

**الأمثلة:**



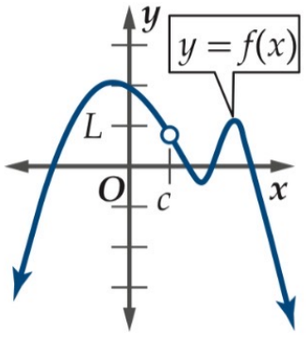

$\lim_{x \to c} h(x) = L$

$h(c) = L$




$\lim_{x \to c} g(x) = L$

$g(c) = n$




$\lim_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرفة

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب $x$ من ذلك العدد.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

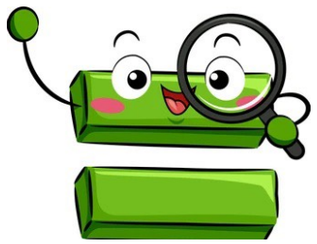
- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

**النهاية من جهتين**
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهةٍ واحدة**.

## مفهوم أساسي — النهايات من جهة واحدة

### النهاية من اليمين

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة $L_1$، عند اقتراب قيم $x$ من العدد $c$ من اليمين، فإن:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = L_1$ ، وتقرأ:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ من اليمين هي $L_1$

### النهاية من اليسار

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة $L_2$، عند اقتراب قيم $x$ من العدد $c$ من اليسار، فإن:

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ من اليسار هي $L_2$

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

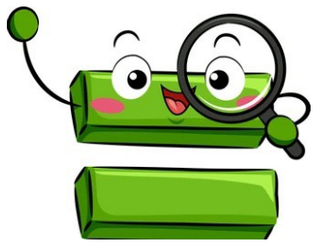
- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين** ، وما يعنيه كونها موجودة.

## مفهوم أساسي — النهاية عند نقطة

**تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب $x$ من $c$ ، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، أي أنه:**

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L \text{ ،}$$

**إذا وفقط إذا كان** $\lim_{x\to c} f(x) = L$

موضوع الدرس:

# تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مثال ٣ : تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

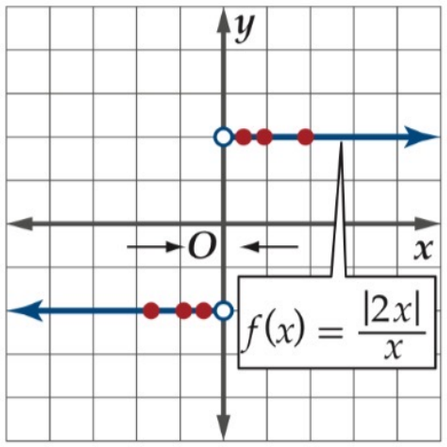
قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

**(a** $\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين ، فإن $\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

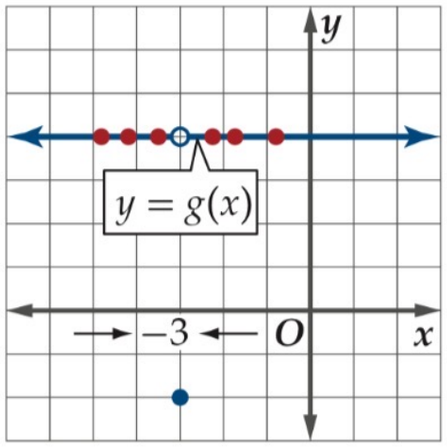



**(b** $\lim_{x\to -3^-} g(x)$ , $\lim_{x\to -3^+} g(x)$ , $\lim_{x\to -3} g(x)$ ، حيث $g(x) = \begin{cases} 4 & , \ x \neq -3 \\ -2 & , \ x = -3 \end{cases}$

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $g(x)$ أن:

$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = 4 \quad , \quad \lim_{x\to -3^+} g(x) = 4$$

وبما أن النهايتين من اليسار ومن اليمين متساويتان ، فإن $\lim_{x\to -3} g(x)$ موجودة وتساوي 4.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

**النهاية من جهتين**
two-sided limit

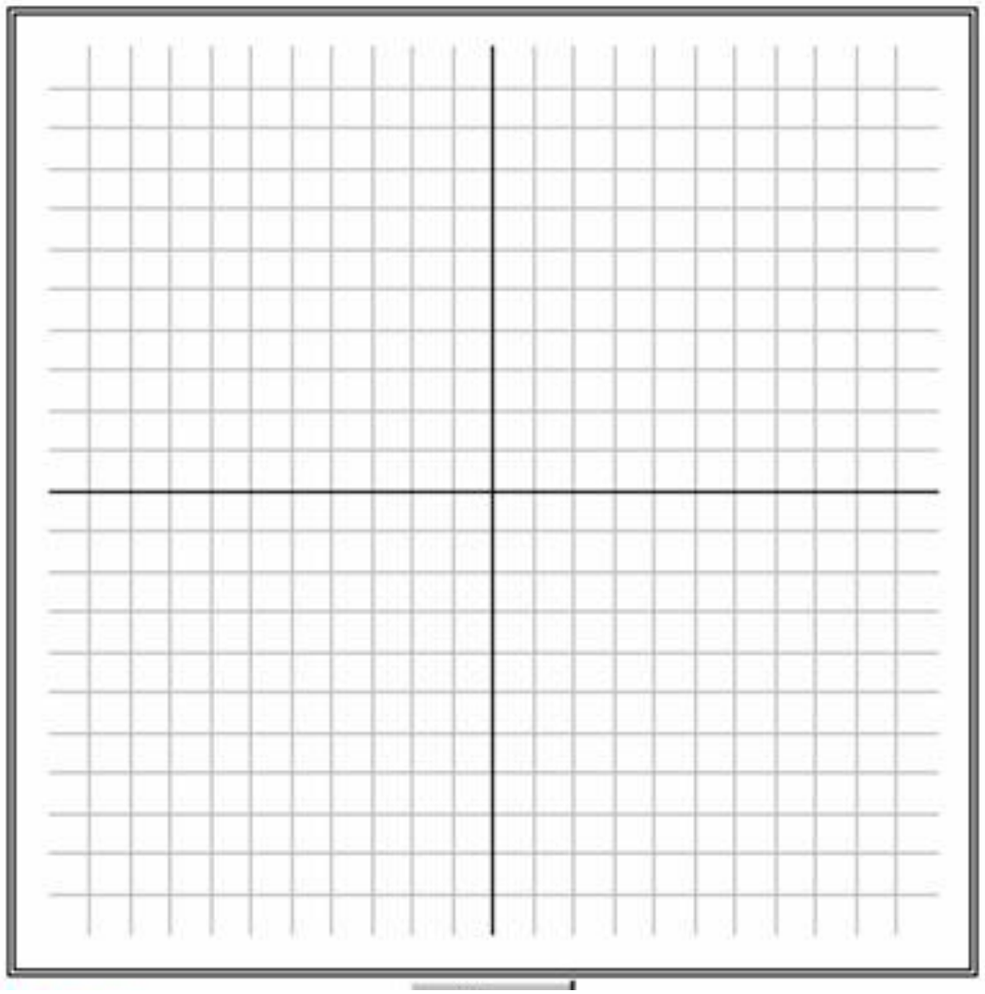
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

## قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

**(3A** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ , $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ , $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2 & , \quad x<1 \\ 2x+1 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

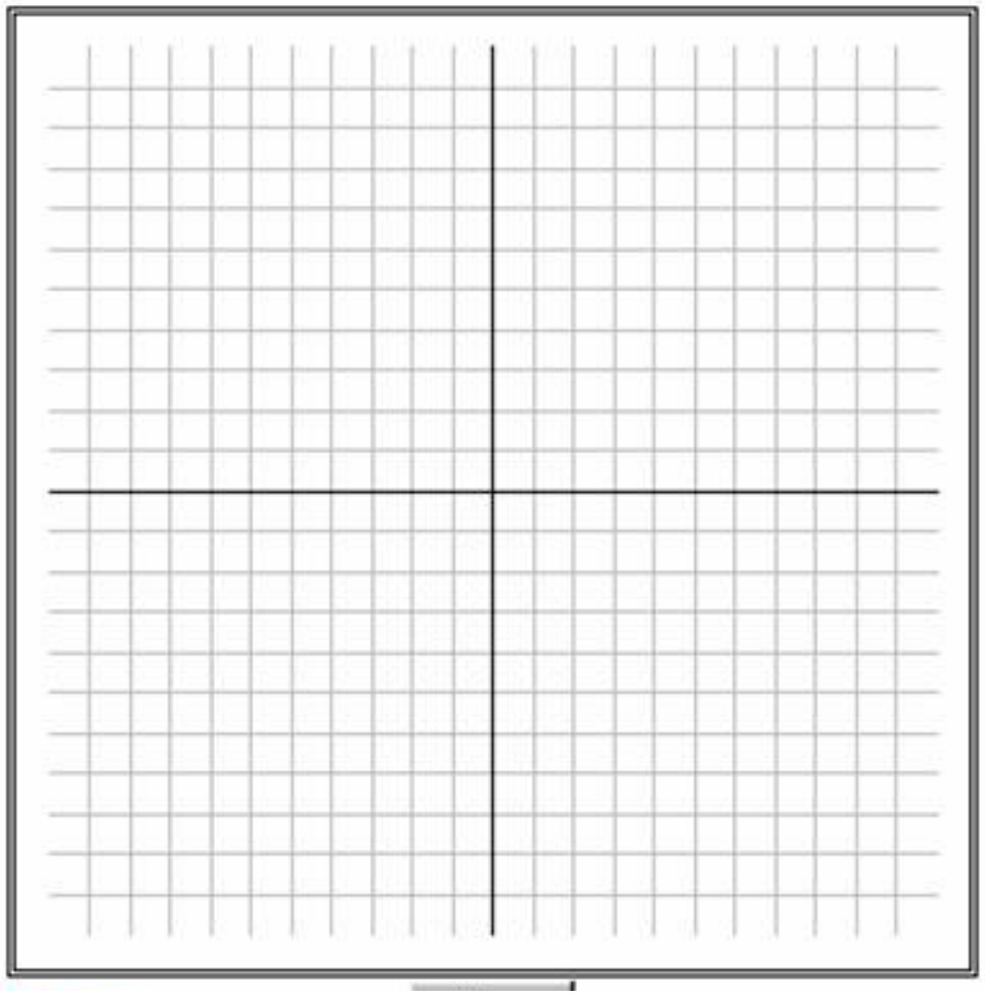
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

## قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

**(3B** $\lim_{x\to -2^-} g(x), \lim_{x\to -2^+} g(x), \lim_{x\to -2} g(x)$ ، حيث:

$$g(x)=\begin{cases} -0.5x+2 & , \quad x<-2 \\ -x^2 & , \quad x\geq -2 \end{cases}$$



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة $f$ كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم $x$ من $c$، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز $\infty$، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم $x$ من $c$، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

### قراءة الرياضيات

**السلوك غير المحدود**

تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x \to c$، أنه باختيار قيمة لـ $x$ قريبة من $c$ بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت $x$ قريبة من $c$ كانت $|f(x)|$ أكبر.

## موضوع الدرس:

# تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

**النهاية من جهتين**
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مثال ٤ : النهايات والسلوك الغير محدود

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

**(a** $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$

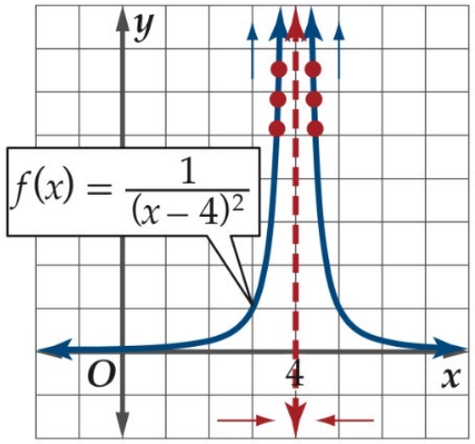
**التحليل بيانيًّا :** يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{(x-4)^2}$ المجاور أن :

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty$$

فكلما اقتربت قيم $x$ من العدد 4 ، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود،

وبما أن كلًّا من النهايتين من اليسار ومن اليمين $\infty$ . لذا فإن

$\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ لا تساوي عددًا حقيقيًّا، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين $\infty$ ، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty$ .




**التعزيز عدديًّا :**

$x$ تقترب من 4 ⟵ ⟶ $x$ تقترب من 4

| $x$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 4 | 4.001 | 4.01 | 4.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 100 | 10000 | 1000000 | | 1000000 | 10000 | 100 |

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم $x$ من العدد 4 من اليسار أو من اليمين ، فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

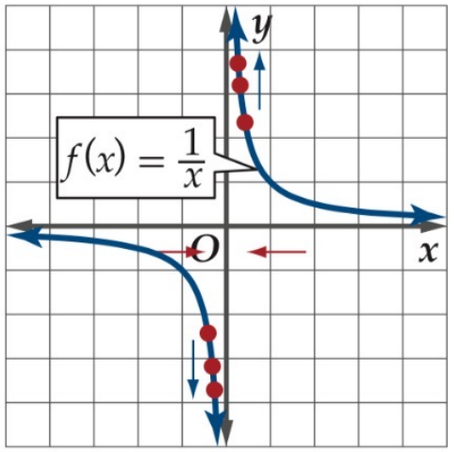
النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مثال ٤ : النهايات والسلوك الغير محدود

**b)** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$




**التحليل بيانيًا :** يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ المجاور أن:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}=-\infty$$

فكلما اقتربت قيم $x$ من العدد 0 من اليسار ، قلَّت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم $x$ من العدد 0 من اليمين.

إن كلتا النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين. لذا فإن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة ، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x=0$ بعبارة واحدة ، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}=\infty$ ، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار .

**التعزيز عدديًا :**

$x$ تقترب من 0 ← | → $x$ تقترب من 0

| $x$ | −0.1 | −0.01 | −0.001 | 0 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −10 | −100 | −1000 | | 1000 | 100 | 10 |

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم $x$ من العدد 0 من اليسار أو من اليمين ، فإن قيم $f(x)$ إما أن تنقص أو تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

# تحقق من فهمك

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

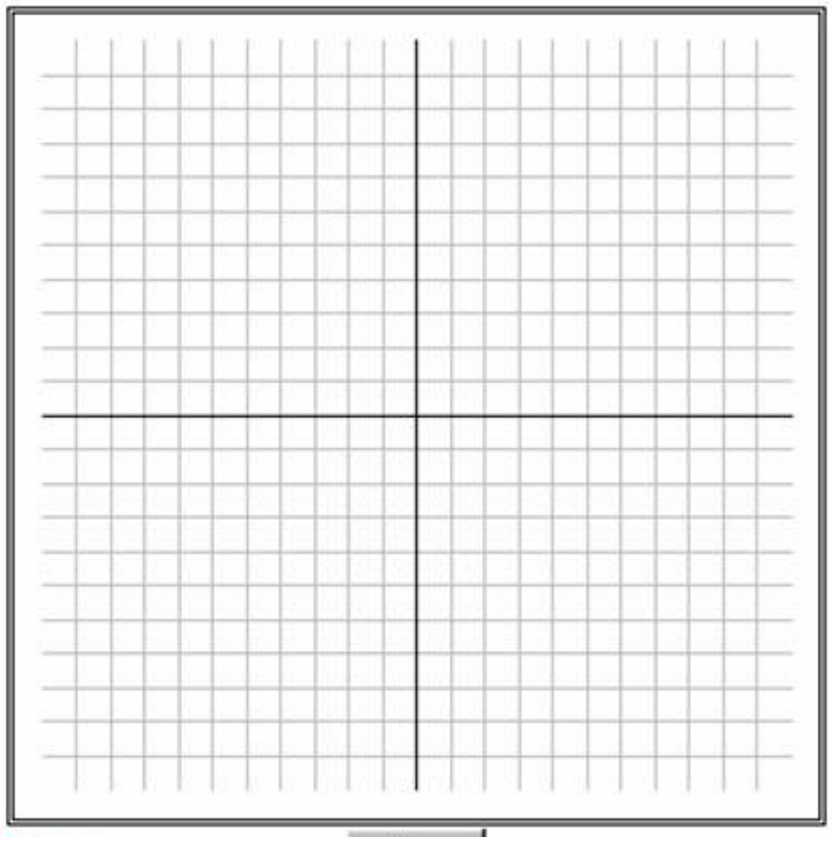
**(4A**

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$$

**التحليل بيانياً**

**التعزيز العددي**

| $x$ تقترب من 2 ← | | | | | → $x$ تقترب من 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | |



## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**

one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**

one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

# تحقق من فهمك

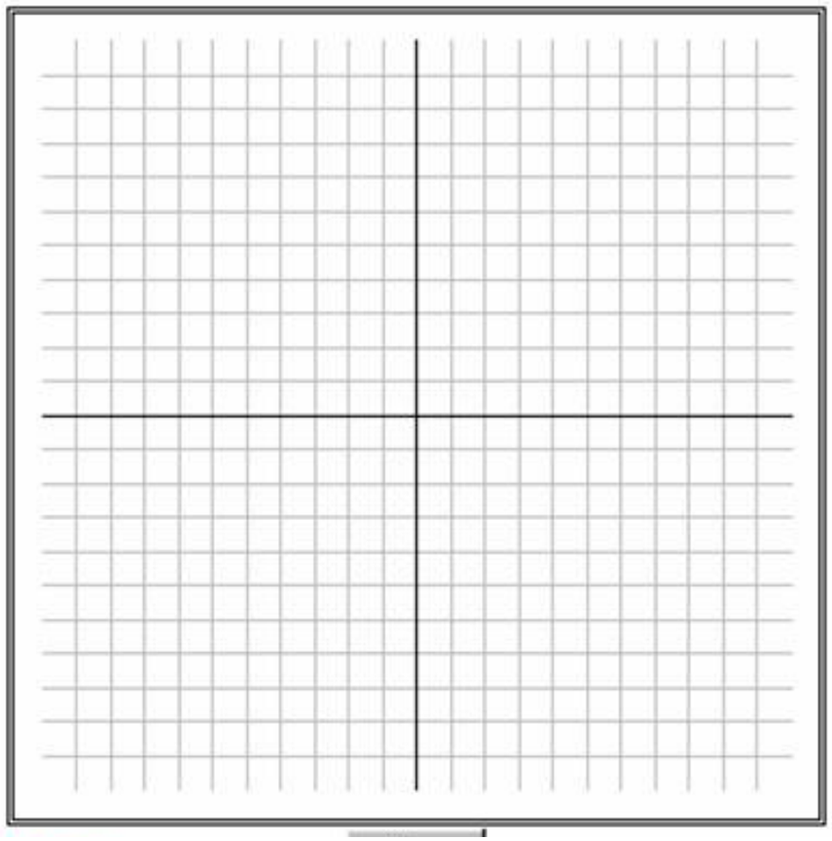
قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

**(4B** $\lim_{x \to 0} -\frac{2}{x^4}$

**التحليل بيانياً**

**التعزيز العددي**

| | $x$ تقترب من 2 ← | | | | → $x$ تقترب من 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | |



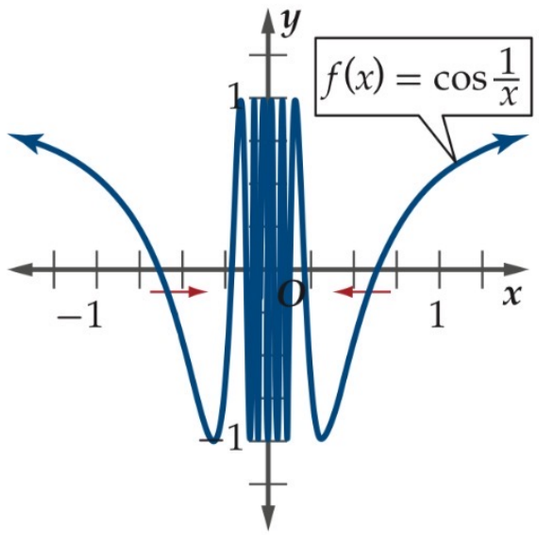
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مثال ٥ : النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ إذا كانت موجودة.

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ المجاور أن قيم $f(x)$ تتذبذبُ بشكل مستمر بين العددين $-1$ ، $1$ كلما اقتربت قيم $x$ من العدد $0$ ، مما يعني أنه لأي قيمة $x_1$ قريبة من الصفر ، بحيث $f(x_1)=1$ ، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًّا من الصفر مثل $x_2$ ، بحيث $f(x_2)=-1$ ، وبالمثل لأي قيمة قريبة من الصفر $x_3$ ، بحيث $f(x_3)=-1$، يمكنك إيجاد قيمة مثل $x_4$ قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4)=1$.

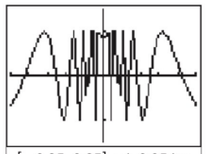
أي أن $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ غير موجودة.




**إرشاد تقني**

**التذبذب اللانهائي**

خاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية تفيد غالبًا في توقع قيمة النهاية للدالة، إلا أنه لا يمكنك الاعتماد عليها دائمًا. فهي تعتمد على عدد محدود من النقاط في تمثيل المنحنى، كما في المثال 5 المبيَّن تمثيله أدناه.



[−0.25, 0.25] scl: 0.05 by [−1.5, 1.5] scl: 1

فالتمثيل بالحاسبة البيانية لم يظهر أن للدالة عددًا لا نهائيًّا في التذبذبات بالقرب من الصفر.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدِّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدِّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

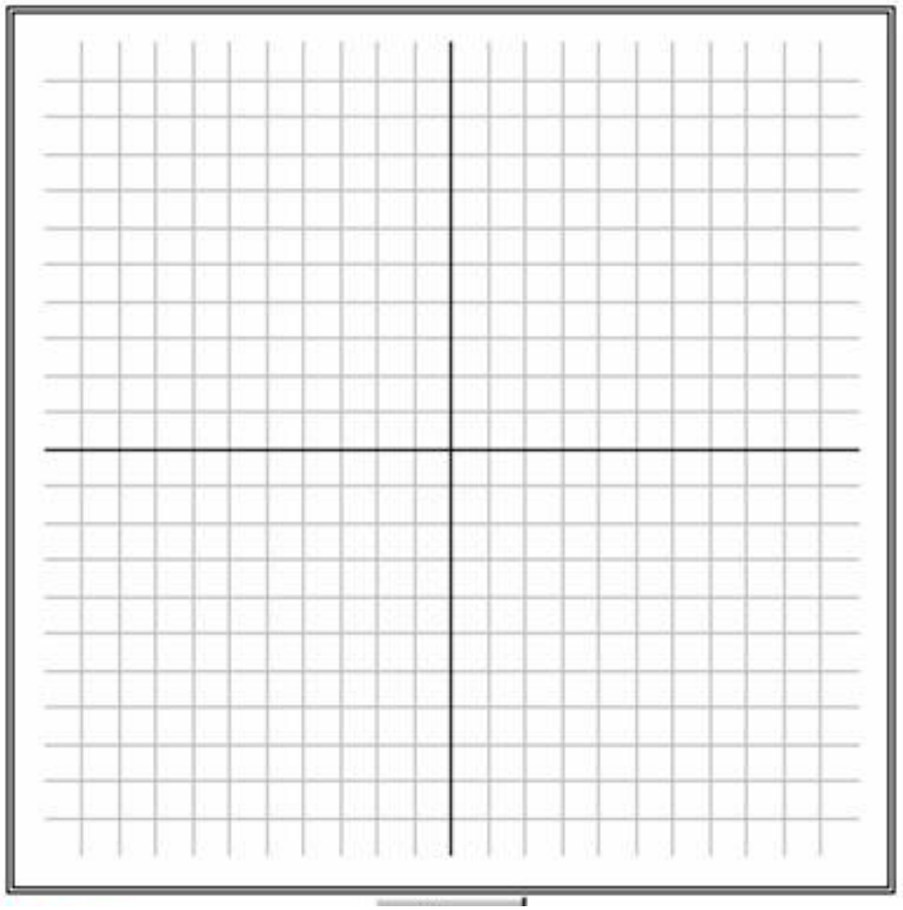
**النهاية من جهتين**
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

**(5A** $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

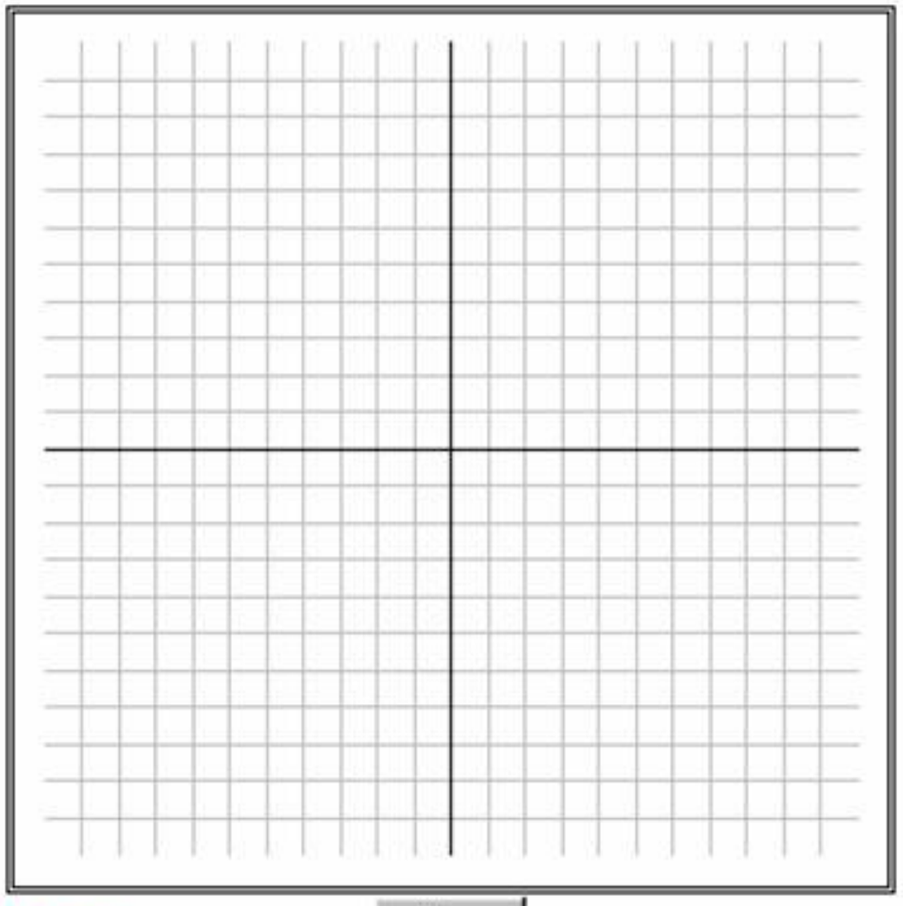
النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

**(5B** $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**

one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

نلخّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة غير موجودة.

## ملخص المفهوم

### أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم $x$ من العدد $c$ من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم $x$ من العدد $c$ من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقترابٍ x من العدد c من اليمين، أو العكس.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم $x$ من العدد $c$.

موضوع الدرس:

# تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

# تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

**تقدير النهاية عند المالانهاية :** درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم $x$ من عدد ثابت $c$ ، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم $x$ بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخّص لرموز هذه النهايات.

### مفهوم أساسي — النهايات عند المالانهاية

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد $L_1$ عند ازدياد قيم $x$ بشكل غير محدود، فإن:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم $x$ من موجب مالانهاية هي $L_1$ »
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد $L_2$ عند نقصان قيم $x$ بشكل غير محدود، فإن:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم $x$ من سالب مالانهاية هي $L_2$ »

درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من $\infty$ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم $x$ من عدد ثابت $c$ ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم $x$ من $\infty$ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة $f$ ، إذا كانت $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة $f$ ، إذا كانت $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$

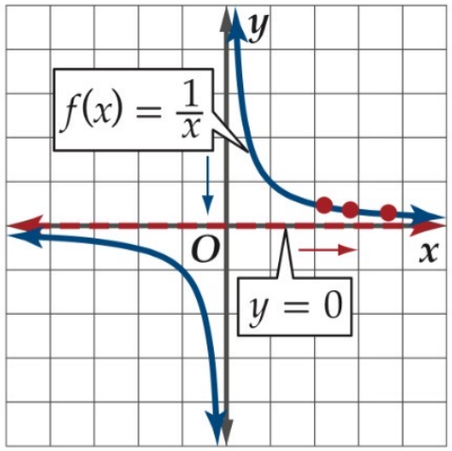
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مثال ٦ : تقدير النهاية عند المالانهاية

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

**التحليل بيانيًا :** يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، فكلما زادت قيم $x$ ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.




**التعزيز عدديًا :**

$x$ تقترب من $\infty$ ⟵

| $x$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 |

⟶

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما زادت قيم $x$ ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0.

## موضوع الدرس:

## تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

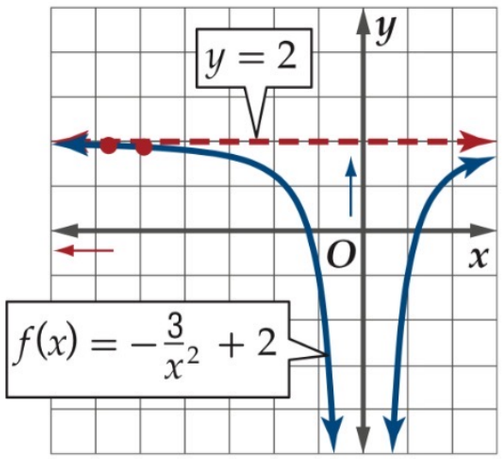
**النهاية من جهتين**
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shíkhah_math

# مثال ٦ : تقدير النهاية عند المالانهاية

**b)** $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)$

**التحليل بيانيًا :** يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=-\frac{3}{x^2}+2$ المجاور أن $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)=2$ ، فكلما قلَّت قيم $x$ ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.




**التعزيز عدديًا :**

$x$ تقترب من $-\infty$ ←

| $x$ | −10000 | −1000 | −100 | −10 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.99999997 | 1.999997 | 1.9997 | 1.97 |

←

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم $x$ ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 2.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

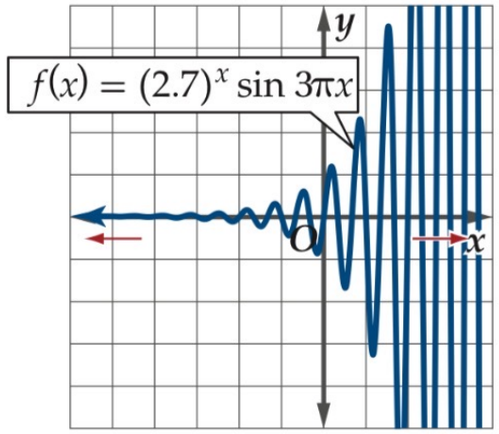
# مثال ٦ : تقدير النهاية عند ما لانهاية

c) $\lim_{x\to-\infty}(2.7)^x \sin 3\pi x$ , $\lim_{x\to\infty}(2.7)^x \sin 3\pi x$

**التحليل بيانيًا :** يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = (2.7)^x \sin 3\pi x$ المجاور أن:

$\lim_{x\to-\infty}(2.7)^x \sin 3\pi x = 0$ ، فكلما قلَّت قيم $x$ ، تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0 .

في حين يبيّن التمثيل البياني أن $\lim_{x\to\infty}(2.7)^x \sin 3\pi x$ غير موجودة ، فكلما ازدادت قيم $x$ ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدةً.




**التعزيز عدديًا :**

$x$ تقترب من $\infty$ ⟵ ⟶ $x$ تقترب من $-\infty$

| $x$ | −17.1 | −10.8 | −10.1 | 0 | 10.1 | 50.1 | 99.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3.4 \times 10^{-8}$ | −0.00002 | −0.00004 | 0 | $1.8 \times 10^{4}$ | $3.3 \times 10^{21}$ | $-4.5 \times 10^{42}$ |

يتضح من نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم $x$ ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0 ، في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم $x$.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

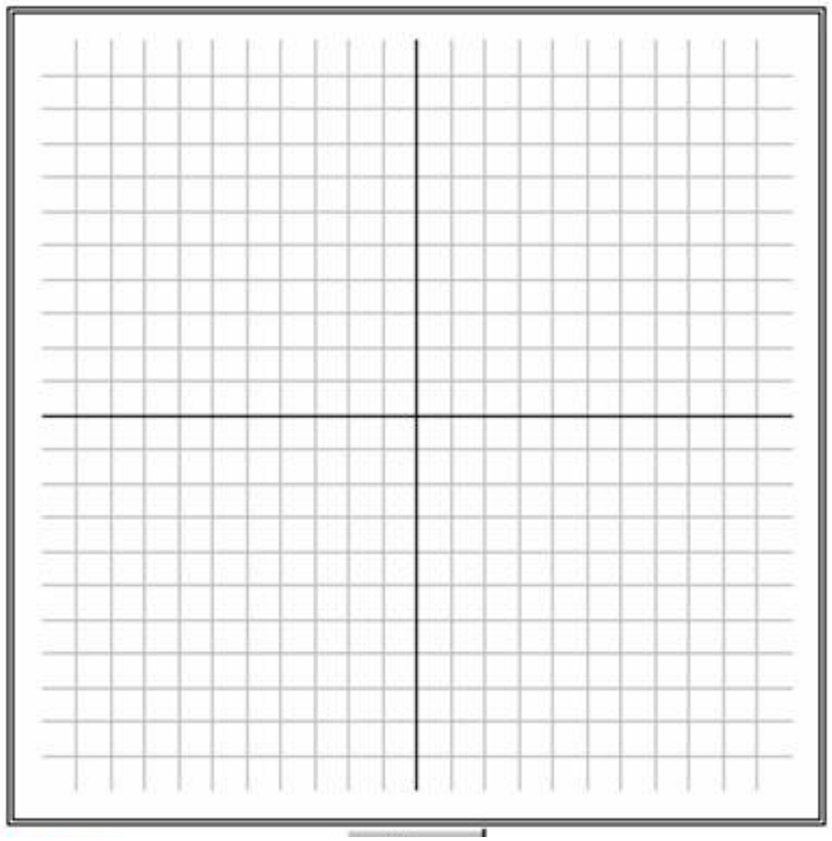
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

## قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

**6A)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$

**التحليل بيانياً**



**التعزيز العددي**

| | $x$ تقترب من 2 ← | | | | → $x$ تقترب من 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | |

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

**النهاية من جهتين**
two-sided limit

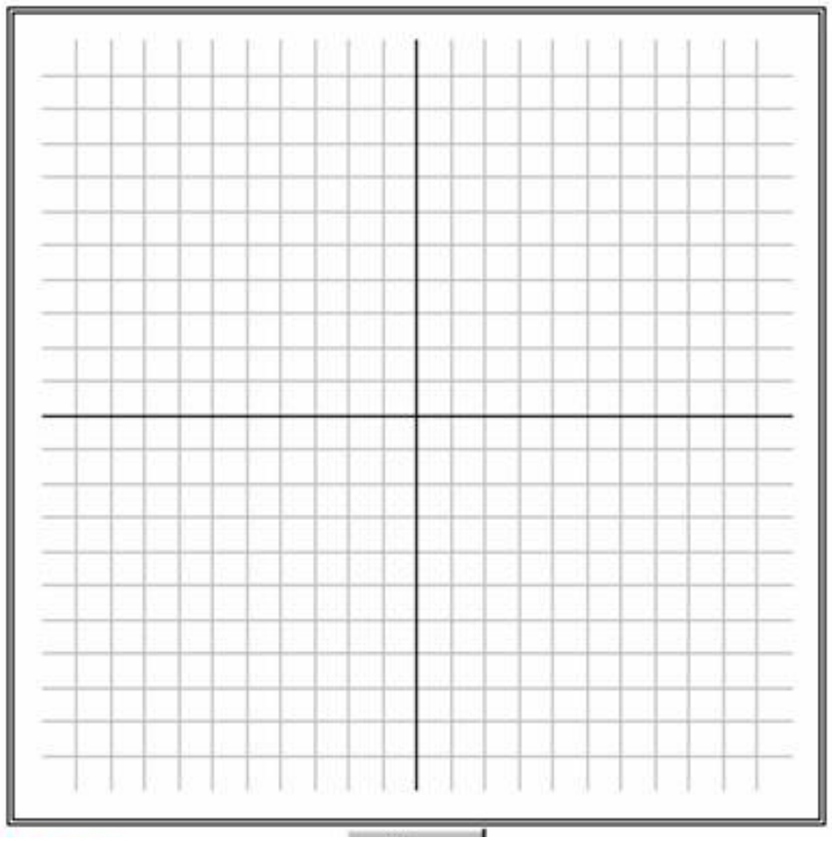
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

**6B)** $\lim_{x \to -\infty} 5^x$

**التحليل بيانياً**



**التعزيز العددي**

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**

one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

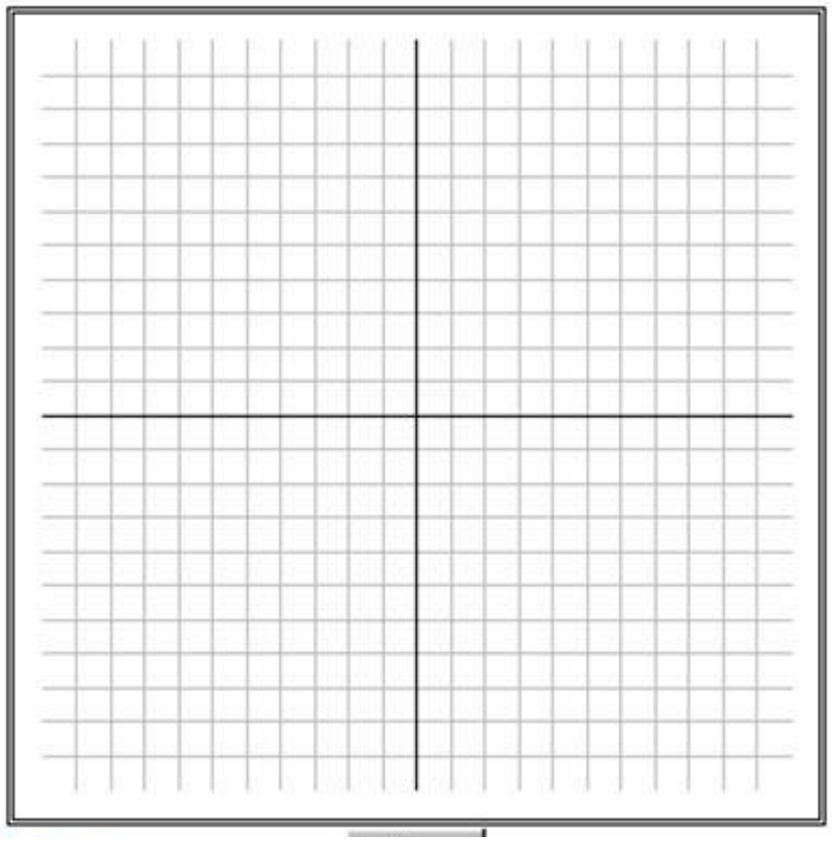
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

**6C)** $\lim_{x \to \infty} \sin x$

**التحليل بيانياً**



**التعزيز العددي**

| | $x$ تقترب من 2 ← | | | | → $x$ تقترب من 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | |

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**

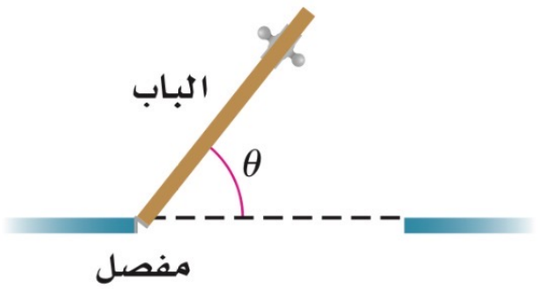
one-sided limit

**النهاية من جهتين**

two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

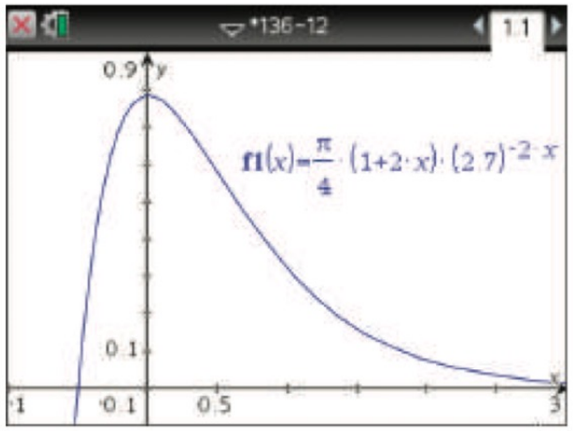
# مثال ٧ من واقع الحياة :تقدير النهاية عند ما لانهاية




a) **هيدروليك:** تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُركَ لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)(2.7)^{-2t}$ تمثِّل زاوية فتحته θ بعد $t$ ثانية.
قدِّر $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:

مثِّل الدالة $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)(2.7)^{-2t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



[−1, 3] scl: 0.5 by [−0.1, 0.9] scl: 0.1

لاحظ أنه كلما زادت قيم $t$ ، فإن قيم الدالة $\theta(t)$ تقترب من العدد 0.
أي أن $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = 0$.

فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية 0 في هذه المسألة، تعني أن الزاوية التي يصنعها الباب مع وضع الإغلاق مع مرور الزمن
هي 0 درجة بالراديان. بمعنى أنه بعد مرور زمن أطول ، فإن الباب سيقترب من وضع الإغلاق التام.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدِّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدِّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

**النهاية من جهتين**
two-sided limit

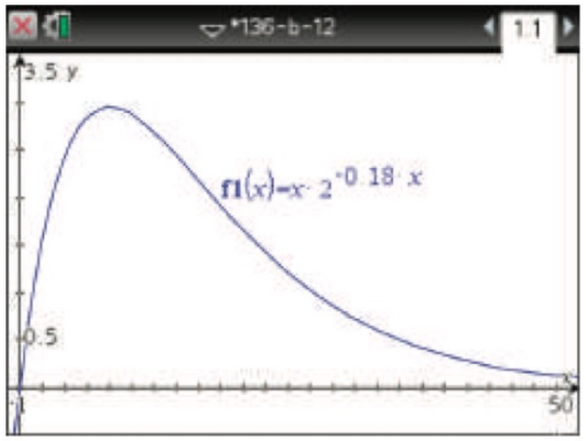
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مثال ٧ من واقع الحياة :تقدير النهاية عند ما لانهاية

**b) دواء:** يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل مللتر بالعلاقة $C(t) = t2^{-0.18t}$ ، حيث $t$ الزمن بالساعات بعد حقن المريض. قدِّر $\lim_{t\to\infty} C(t)$ ، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

**قدِّر النهاية:**

مَثِّل الدالة $C(t) = t2^{-0.18t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زادت قيمة $t$ فإن منحنى الدالة يقترب من 0، أي أن $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$ .




[−1, 50] scl: 2 by [−0.5, 3.5] scl: 0.5

**فسِّر النتيجة:**

إن قيمة النهاية هي 0 ، وتعني في هذه المسألة أنه مع مرور الزمن، فإن تركيز الدَّواء سيصبح قريبًا من الصفر في دم المريض.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدِّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدِّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

**7A) كهرباء:** يزوّد مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يُعطى بالعلاقة $V(t) = 165 \sin 120\pi t$ ، حيث $t$ الزمن بالثواني. قدِّر $\lim_{t \to \infty} V(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# تحقق من فهمك

**7B)** **أحياء:** عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبًا وفاكهةً وخميرةً فإن عدد الذبابات بعد t يوم يُعطى بالعلاقة $P(t) = \frac{230}{1 + 56.5(2.7)^{-0.37t}}$ ، قدِّر $\lim_{t \to \infty} P(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

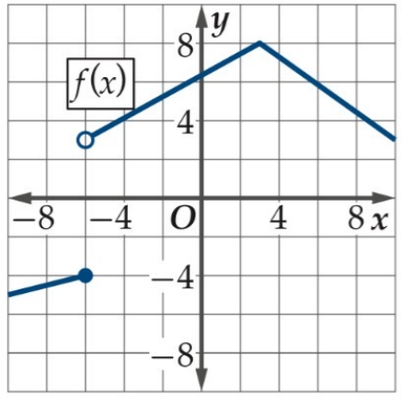
النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مسائل مهارات التفكير العليا

**48) اكتشف الخطأ:** قال علي: إن نهاية الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب $x$ من $-6$ هي $-4$ . في حين قال محمد: إنها 3. هل أي منهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدِّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدِّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

**النهاية من جهة واحدة**
one-sided limit

**النهاية من جهتين**
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

# مسائل مهارات التفكير العليا

**51) تبرير:** حَدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك.

إذا كان $f(c) = L$، فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

## فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

## والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

## المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math