كُل نجاح تحققيه الآن هو ما سيبقى معك إلى وقت طويل
اغتنمي اللحظة ولا تهدري الوقت.

المماس والسرعة المتجهة

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق

درست إيجاد متوسط مُعدّل التغيّر باستعمال القاطع.

(مهارة سابقة)

والآن

- أجدُ مُعدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- أجدُ السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.

المفردات

المماس
tangent line

مُعدل التغيّر اللحظي
instantaneous rate of change

قسمة الفرق
difference quotient

السرعة المتجهة اللحظية
instantaneous velocity

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

لماذا:

عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

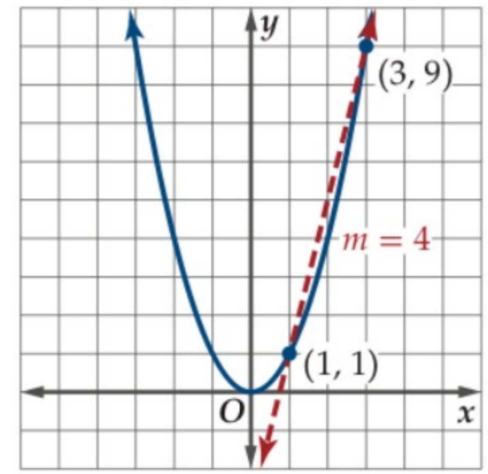
المماسات: تعلمت سابقًا أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدّل تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال ميل القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة $(1, 1)$ ، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$ ، أو $(2, 4)$، أو $(1.1, 1.21)$ ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.

لماذا:

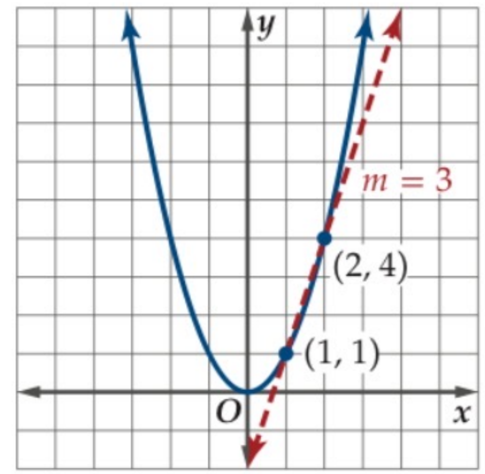
عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

المماسات: تعلمت سابقًا أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدّل تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال ميل القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة $(1, 1)$ ، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$ ، أو $(2, 4)$، أو $(1.1, 1.21)$ ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.

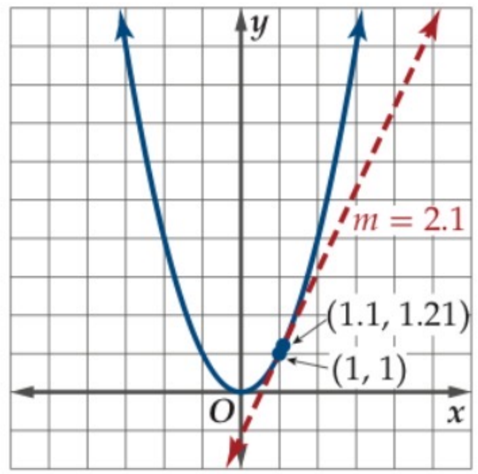
موضوع الدرس : المماس والسرعة المتجهة



الشكل (1)



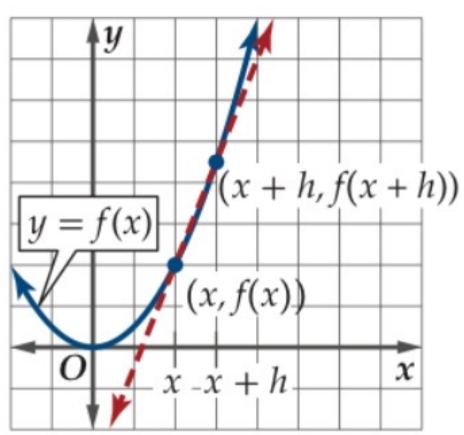
الشكل (2)



الشكل (3)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع ، زادت دِقَّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى في هذه الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطتا التقاطع متطابقتين كما في الشكل (3) أعلاه، فإننا نحصل على **مماس** للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمثِّل ميل هذا المستقيم ميل المنحنى عند نقطة التماس.

ولتعريف ميل المماس لمنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ فإنه يمكننا الرجوع إلى صيغة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x+h, f(x+h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة:



$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتُسَمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$ ؛ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس وهو **مُعدل التغيّر اللحظي** للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

مفهوم أساسي **مُعدل التغيّر اللحظي**

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ،

ويُعطى بالصيغة $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

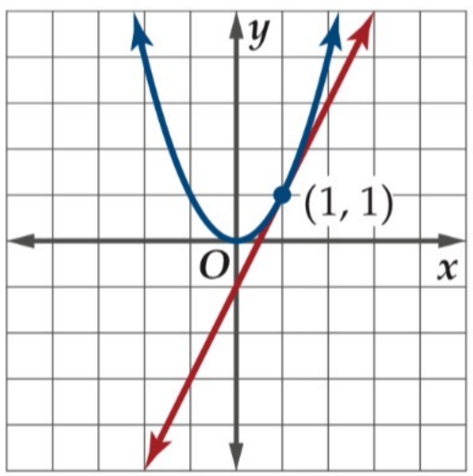
قراءة الرياضيات

اختصارات

يمكن اختصار الجملة ميل المماس لمنحنى الدالة بميل المنحنى.

مثال١ : ميل المماس للمنحنى عند نقطه عليه

أوجد ميل مماس منحنى الدالة $y = x^2$ الممثَّلة بالشكل أدناه عند النقطة $(1, 1)$.



$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	صيغة مُعدّل التغيّر اللحظي
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$	$x = 1$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$	$f(1+h) = (1+h)^2 \, , \, f(1) = 1^2$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$	فك المقدار $(1+h)^2$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h}$	بسّط
$= \lim\limits_{h \to 0} (2+h)$	اقسم على h
$= 2 + 0 = 2$	عوّض وبسّط

أي أن ميل منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ هو 2.

تحقق: من خلال التمثيل البياني للمنحنى ومماسه عند النقطة $(1, 1)$ نلاحظ أن ميل المستقيم الذي يمثِّل المماس يساوي 2 .

تحقق من فهمك :

1A) $y = x^2, (3, 9)$

1B) $y = x^2 + 4, (-2, 8)$

مثال٢ : ميل المنحنى عند أي نقطه عليه

أوجد معادلة ميل منحنى $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة عليه.

صيغة مُعدل التغيّر اللحظي
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x+h) = \frac{4}{x+h}$ ، $f(x) = \frac{4}{x}$
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$

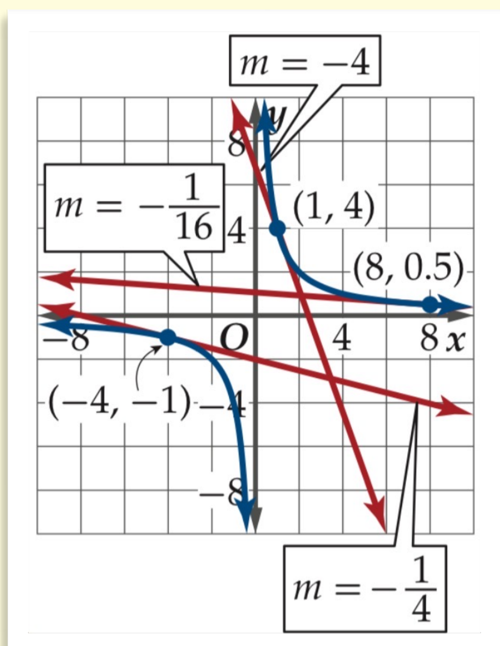
اطرح الكسرين في البسط ، ثم التبسيط
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$$

بسّط
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$$

اقسم على h ، ثم اضرب
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x^2 + xh}$$

عوّض
$$m = \frac{-4}{x^2 + x(0)}$$

بسّط
$$m = \frac{-4}{x^2}$$



أي أن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه هو $m = -\frac{4}{x^2}$ ،
والشكل المجاور يبين ميل المنحنى عند ثلاث نقط مختلفة.

تحقق من فهمك :

2A) $y = x^2 - 4x + 2$

2B) $y = x^3$

السرعة المتجهة اللحظية : تعلمت سابقًا طريقة حساب السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة f(t) في زمن مقداره t، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة المتجهة هي سرعة لها اتجاه. ويمكنك إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة بالطريقة نفسها التي أوجدت بها السرعة المتوسطة مع توضيح اتجاهها باستعمال الإشارة في الناتج، فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

مفهوم أساسي — السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تُعطى بالصيغة

$$v_{\text{avg}} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

إرشادات للدراسة

موقع الجسم
موقع الجسم عادة يعطى بالعلاقة $y = f(x)$ وذلك لتحديد الموقع في المستوى بدلالة الإحداثيين x, y، أما إذا أُعطي بوصفه دالة في الزمن t، فهذا يعني الإزاحة (محصلة المركبة x والمركبة y) لموقع الجسم عند اللحظة t، وإذا كانت الحركة على خط مستقيم فإن دالة الموقع تكون نفسها دالة المسافة مع أخذ الاتجاه بعين الاعتبار.

مثال ٣ من واقع الحياة : السرعة المتوسطة المتجهة

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالأميال، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعة باتجاه خط النهاية. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

أوجد أولًا المسافة الكلية التي قطعها العدَّاء عند الزمن $a = 2$, $b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$	$a = 2 , b = 3$	$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$
$f(3) = 24.3$	بسّط	$f(2) = 18.8$

استعمل الآن صيغة السرعة المتوسطة المتجهة.

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ صيغة السرعة المتوسطة المتجهة

$$= \frac{24.3 - 18.8}{3 - 2}$$ $f(b) = 24.3 ,\ f(a) = 18.8, b = 3 , a = 2$

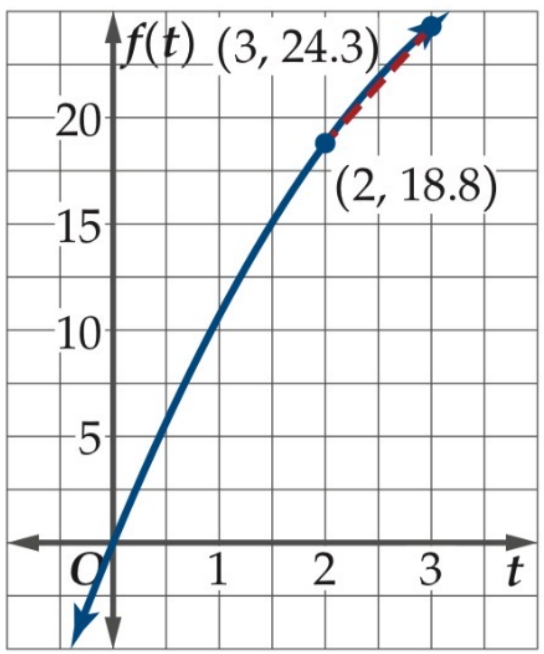
$$= 5.5$$ بسّط

أي أن السرعة المتوسطة المتجهة للعدّاء بين الساعتين الثانية والثالثة هي 5.5 mi/h إلى الأمام.

تحقق من فهمك :

3) **بالون:** تمثِّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًّا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1\text{s}$ ، $t = 2\text{s}$؟

موضوع الدرس : المماس والسرعة المتجهة



إذا أمعنَّا النظر في إجابة المثال 3 ، نجد أنه تم حساب السرعة المتوسطة المتجهة من خلال إيجاد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين $(2, 18.8)$ ، $(3, 24.3)$ كما في الشكل المجاور. والسرعة المتجهة التي تم حسابها هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية ، وليست **السرعة المتجهة اللحظية**، والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.

ولإيجاد سرعة العدّاء المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة t ، فإننا نجد مُعدّل التغيّر اللحظي لمنحنى $f(t)$ عند تلك اللحظة .

مفهوم أساسي — السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

مثال٤ : السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 2000 ft ، وتمثّل الدالة $f(t) = 2000 - 16t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5 s.

لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية، افترض أن $t = 5$، وطبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{2000 - 16(5+h)^2 - [2000 - 16(5)^2]}{h}$$ $f(5+h) = 2000 - 16(5+h)^2,\ f(5) = 2000 - 16(5)^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-160h - 16h^2}{h}$$ فك المقدار $(5+h)^2$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-160 - 16h)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (-160 - 16h)$$ اقسم على h

$$= -160 - 16(0) = -160$$ عوّض وبسّط

أي أن سرعة الكرة بعد 5 s هي 160 ft/s، أما الإشارة السالبة فتعني أن الكرة تهبط لأسفل.

تحقق من فهمك :

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7s .

مثال٥ : السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن .

طبِّق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$
صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$= \lim_{h\to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$$
$s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$$
فك المقدار $(t+h)^3$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$$
حلّل

$$= \lim_{h\to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$$
اقسم على h

$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$$
عوّض وبسّط

$$= 18 - 9t^2$$
بسّط

أي أنَّ معادلة سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند أي زمن هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تحقق من فهمك :

5) تمثِّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن .

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **تحدٍّ:** أوجد معادلة ميل مماس منحنى $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة " يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط"؟ برِّر إجابتك.