

حلمك ليس له تاريخ انتهاء ، خذ نفسك عميقاً

وحاول مرة أخرى ..



النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل



فيما سبق

درستُ استعمال النهايات
لتقريب المساحة تحت
منحنى دالة. (الدرس 4-5)

والآن

- أجد دوال أصلية.
- أستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لأجد التكامل المحدد.

المفردات

الدالة الأصلية

antiderivative

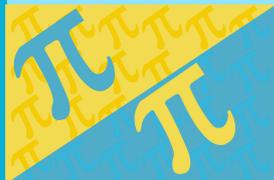
التكامل غير المحدد

indefinite integral

النظرية الأساسية في

التفاضل والتكامل

Fundamental Theorem of
Calculus



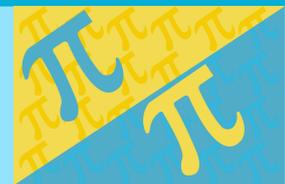
لماذا



سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالقدم لكل ثانية تُعطى بـ $v(t) = -32t$ ، فمن الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-4 و 4-4، أنه إذا أُعطيت موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن العبارة التي تمثل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$ ، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثل السرعة، وطلب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمى دالة أصلية للدالة f .



مثال ١ : إيجاد الدوال الأصلية.

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

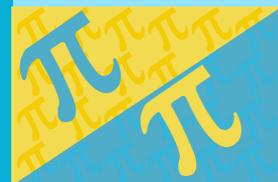
$$f(x) = 3x^2 \quad (a)$$

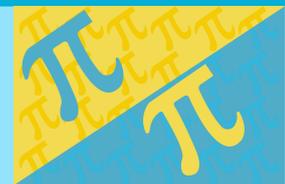
لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة دالة القوة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 3، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

إن x^3 ليست الدالة الوحيدة التي تحقق المطلوب، فمثلاً $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضاً؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$ ، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

$$f(x) = -\frac{8}{x^9} \quad (b)$$

أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$ ، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8 ، وعليه تكون $F(x) = x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f ، فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1} = -8x^{-9}$. لاحظ أن كلاً من $G(x) = x^{-8} + 3$ ، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثل دالة أصلية للدالة f .





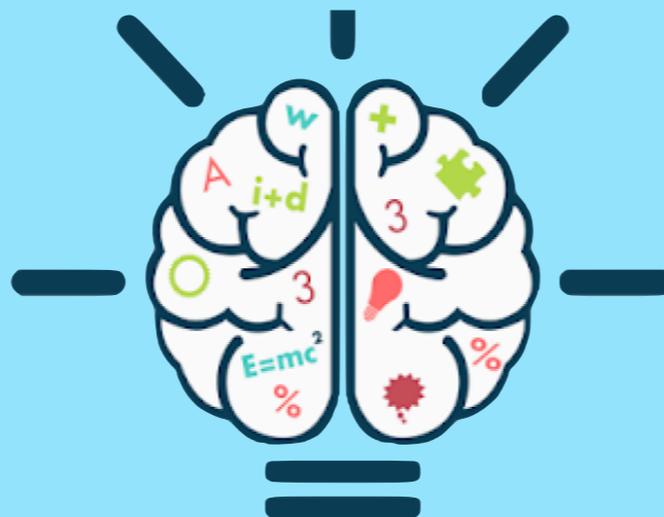
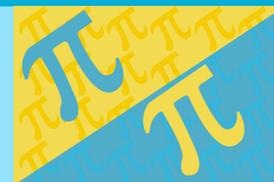
تحقق من فهمك :

أوجد دالتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

$$-3x^{-4} \quad (1B)$$

$$2x \quad (1A)$$





كما في المشتقات، فإن هناك قواعد لإيجاد الدالة الأصلية.

مفهوم أساسي

قواعد الدالة الأصلية

إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

قاعدة القوة

إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عددًا ثابتًا، فإن:

قاعدة ضرب دالة
القوة في عدد ثابت

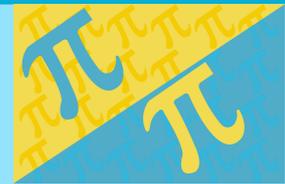
$$F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$$

إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب،

قاعدة المجموع والفرق

فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.





مثال ٢ : قواعد الدوال الأصلية.

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = 4x^7 \quad (a)$$

الدالة المعطاة $f(x) = 4x^7$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$

بسّط $= \frac{1}{2}x^8 + C$

$$f(x) = \frac{2}{x^4} \quad (b)$$

الدالة المعطاة $f(x) = \frac{2}{x^4}$

أعد كتابة الدالة بقوة سالبة $= 2x^{-4}$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$

بسّط $= -\frac{2}{3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$

$$f(x) = x^2 - 8x + 5 \quad (c)$$

الدالة المعطاة $f(x) = x^2 - 8x + 5$

أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x $= x^2 - 8x^1 + 5x^0$

قواعد الدالة الأصلية $F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$

بسّط $= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$

ربط المفردات

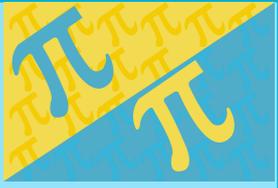
التكامل غير المحدد

سبب تسمية التكامل غير المحدد بهذا الاسم أنه لا يُعبر عن دالة محددة، بل عن عدد لا نهائي من الدوال الأصلية.

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية

$F(x) = kx$ هي دالة أصلية
 $f(x) = k$ ، فمثلاً ، إذا كان
 $f(x) = 3$ ، فإن
 $F(x) = 3x$.



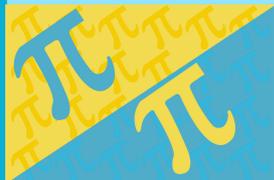
تحقق من فهمك :

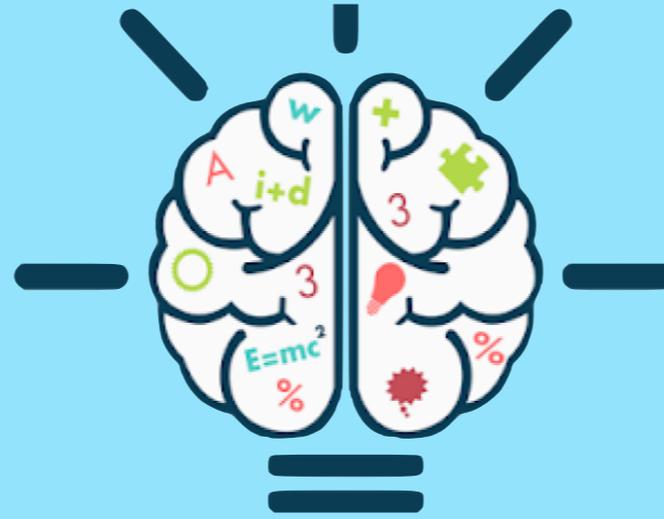
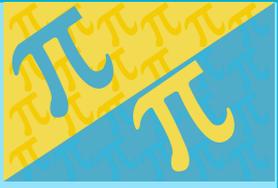
أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = 8x^7 + 6x + 2 \quad (2C)$$

$$f(x) = \frac{10}{x^3} \quad (2B)$$

$$f(x) = 6x^4 \quad (2A)$$



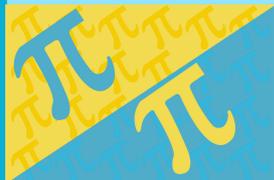


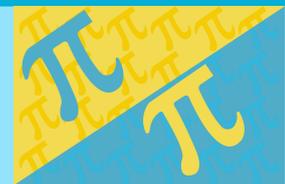
يُعطى الشكل العام للدالة الأصلية باسم ورمز خاصين.

مفهوم أساسي

التكامل غير المحدد

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x) dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ ، و C ثابت.





مثال ٣: التكامل الغير محدد.

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثالث الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن سطح الأرض بـ 30 ft، وتمثل سرعة الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

(a) أوجد دالة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$$\text{العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة} \quad s(t) = \int v(t) dt$$

$$v(t) = -32t \quad = \int -32t dt$$

$$\text{قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت} \quad = -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C$$

$$\text{بسّط} \quad = -16t^2 + C$$

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي، $0s$ للزمن الابتدائي.

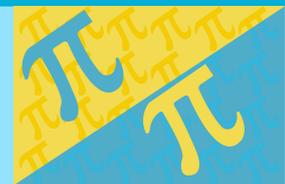
$$\text{الدالة الأصلية لـ } v(t) \quad s(t) = -16t^2 + C$$

$$s(t) = 30, t = 0 \quad 30 = -16(0)^2 + C$$

$$\text{بسّط} \quad 30 = C$$

أي أن دالة موقع الكرة هي $s(t) = -16t^2 + 30$.





مثال ٣: التكامل الغير محدد.

(b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

$$\text{حُلّ المعادلة } s(t) = 0.$$

$$\text{دالة موقع الكرة} \quad s(t) = -16t^2 + 30$$

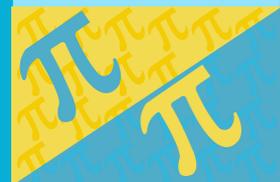
$$s(t) = 0 \quad 0 = -16t^2 + 30$$

$$\text{اطرح 30 من كلا الطرفين} \quad -30 = -16t^2$$

$$\text{اقسم كلا الطرفين على -16} \quad 1.875 \approx t^2$$

$$\text{خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين} \quad 1.369 \approx t$$

أي أن الكرة ستستغرق 1.369 s تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.





تحقق من فهمك :

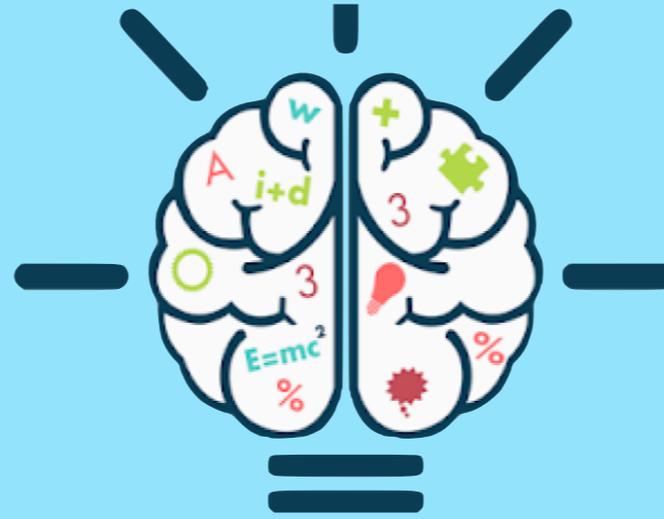
- (3) **سقوط حر:** عند قيام فني بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظته نحو الأرض، وتمثل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.
- (A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.
- (B) أوجد الزمن الذي تستغرقه المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.



الربط مع الحياة

السقوط الحر قبل أربعمئة عام تقريبًا، استنتج جاليليو جاليلي أن لجميع الأجسام التي تسقط سقوطًا حرًا التسارع نفسه، باهمال تأثير الهواء، وأن هذا التسارع لا يتأثر بأي من مادة الجسم الساقط أو وزنه أو الارتفاع الذي سقط منه.





النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهاً بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 4-5 ، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما: هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.

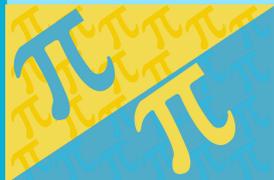
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

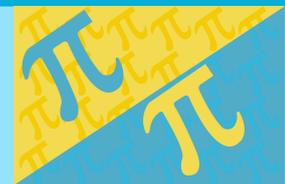
مفهوم أساسي

إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x) \Big|_a^b$.





مثال ٤ :المساحة تحت المنحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

(a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3 dx$.

أولاً: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 4x^3 dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C$$

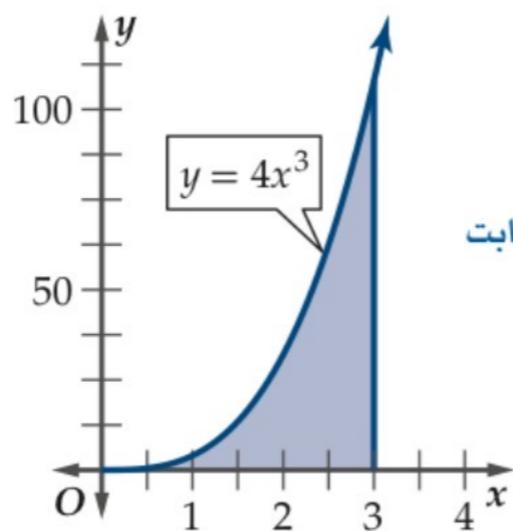
$$= x^4 + C$$

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$$\int_1^3 4x^3 dx = x^4 + C \Big|_1^3$$

$$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C)$$

$$= 81 - 1 = 80$$



قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

بسّط

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$a = 1, b = 3$$

بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

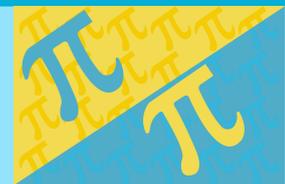


تاريخ الرياضيات

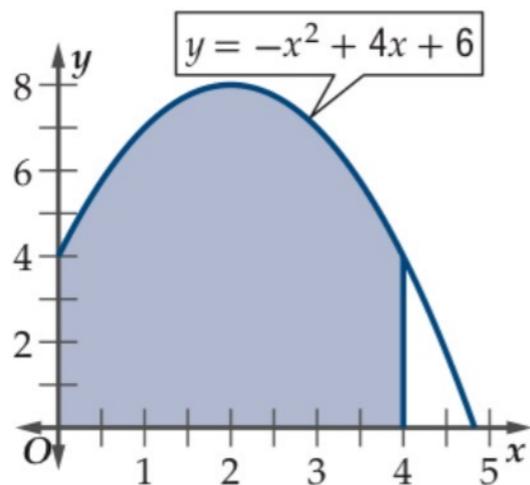
ماريا أجنسن (1718-1799)

عالمة إيطالية برعت في اللغات والفلسفة والرياضيات، ويُعد كتابها *Analytical Institutions* أول كتاب ناقش حساب التفاضل والتكامل معاً.





مثال ٤: المساحة تحت المنحنى



(b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0, 4]$ ؛ أي $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6) dx$ أولاً: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6) dx$$

$$\text{قواعده الدالة الأصلية} = -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$\text{بسّط} = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C$$

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6) dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C \Big|_0^4$$

$$a = 0, b = 4$$

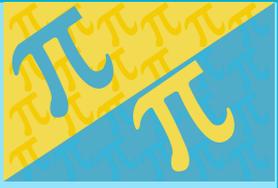
$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C \right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C \right)$$

$$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67$$

بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -x^2 + 4x + 6$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$ هي 34.67 وحدة مربعة تقريباً.





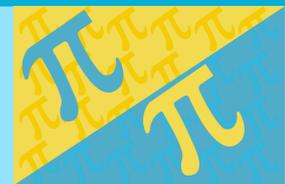
تحقق من فهمك :

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

$$\int_1^2 (16x^3 - 6x^2) dx \quad (4B)$$

$$\int_2^5 3x^2 dx \quad (4A)$$





مثال ٥: التكاملات المحددة والغير محددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$\int (9x - x^3) dx \quad (a)$$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$$\text{قواعد الدالة الأصلية} \quad \int (9x - x^3) dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$

بسّط

$$= \frac{9}{2} x^2 - \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int_2^3 (9x - x^3) dx \quad (b)$$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$$\text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل} \quad \int_2^3 (9x - x^3) dx = \left(\frac{9}{2} x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_2^3$$

$$a = 2, b = 3$$

بسّط

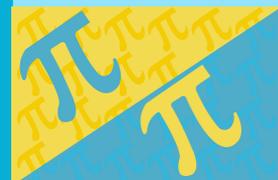
$$= \left(\frac{9}{2} (3)^2 - \frac{(3)^4}{4} \right) - \left[\frac{9}{2} (2)^2 - \frac{(2)^4}{4} \right]$$

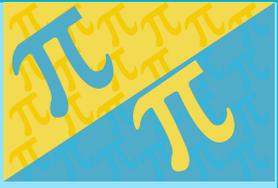
$$= 20.25 - 14 = 6.25$$

تنبيه

التكاملات

صحيح أنه يمكن تجاهل
الثابت C عند حساب التكامل
المحدد، إلا أنه يجب أخذه
بعين الاعتبار عند حساب
التكامل غير المحدد؛ لأنه
جزء من الدالة الأصلية.



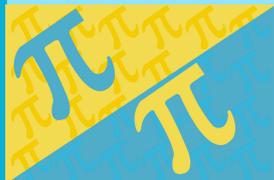


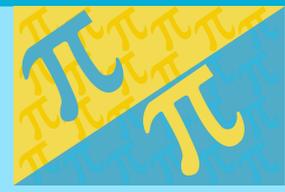
تحقق من فهمك :

$$\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4) dx \quad \text{(5B)}$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$\int (6x^2 + 8x - 3) dx \quad \text{(5A)}$$





مثال ٦: التكاملات المحددة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x \, dx$.
ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$\int_0^{0.5} 360x \, dx = 180x^2 \Big|_0^{0.5}$$

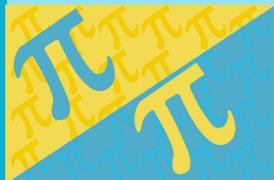
$$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$$

$$= 45 - 0 = 45$$

أي أن الشغل اللازم هو 45 J.

بسط

$a = 0, b = 0.5$



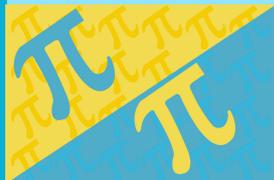


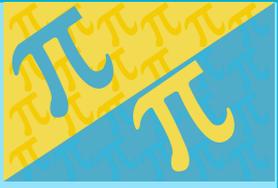
تحقق من فهمك :

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

$$\int_0^{1.4} 512x \, dx \quad (6B)$$

$$\int_0^{0.7} 476x \, dx \quad (6A)$$

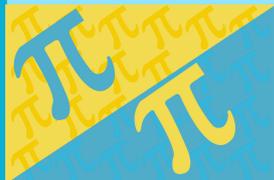


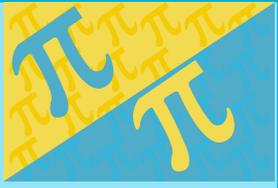


مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً. برّر إجابتك:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx \quad (32)$$





تدريب على اختبار

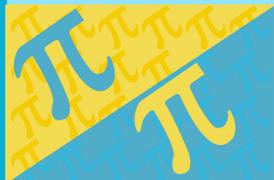
(45) إذا كان $\int_0^2 kx dx = 6$ ، فما قيمة k ؟

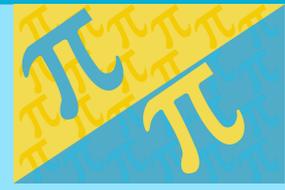
1 **A**

2 **B**

3 **C**

4 **D**





تم بحمد الله وفضله

اتمنى من كل معلم / معاملة يستفيد من العروض بأن يذكرنا بدعوة في ظهر الغيب

عسى أن يجعلنا ربنا من المقبولين

كما اتمنى من زملائي وزميلاتي أن يلتحقوا لي العذر إن كنت قد أخطأت.

بارك الله لي ولكم وجعل عملنا هذا خالصاً لوجهه الكريم

وصلّى اللهم وسلم على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم.

