سلسلة عروض رفعة الرياضيات
لمنهج رياضيات (٢ - ١)

مجموعة رفعة رياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



إعداد وتصميم :
منال سعد النصيري

السادة / منال سعد الرويلي

نفيدكم علما بأنه قد تم

(مع سلسلة عروض رفعة الرياضيات لمنهج رياضيات (3

تحت رقم إيداع 1443/2899 وتاريخ 1443/03/18 هـ، ورقم ردمك 978-603-03-9317-6

الفصل الأول

الدوال والمتباينات

إبدأ انهض، واصل، تحلى بالطموح والإيجابية والصبر

لا تنظر خلفك ففي النهاية ستصل للقمة

وتعلم ما يلزم البداية وما يلزم الرحلة وما يعين على

النهاية وتعلم من أخطاء الرحلة

كن قويا

قدرات

أشترى عاصم سيارة بمبلغ ٢٠٠٠٠ ريال وباعها فخسر فيها ٣٠ % فبكم باعها ؟

أ) ١٥٠٠٠ ريال　　ب) ١٦٠٠٠ ريال　　ج) ١٤٠٠٠ ريال　　د) ١٢٠٠٠ ريال

١-١

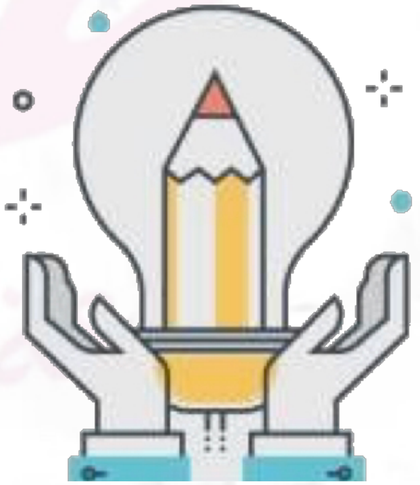
عنوان الدرس

خصائص الأعداد الحقيقية

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير إياد - تونس

اهداف الدرس

- أصنف الأعداد الحقيقية.
- أستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لإيجاد قيم العبارات الجبرية.





فيما سبق :
درست الأعداد الحقيقة
والعمليات عليها

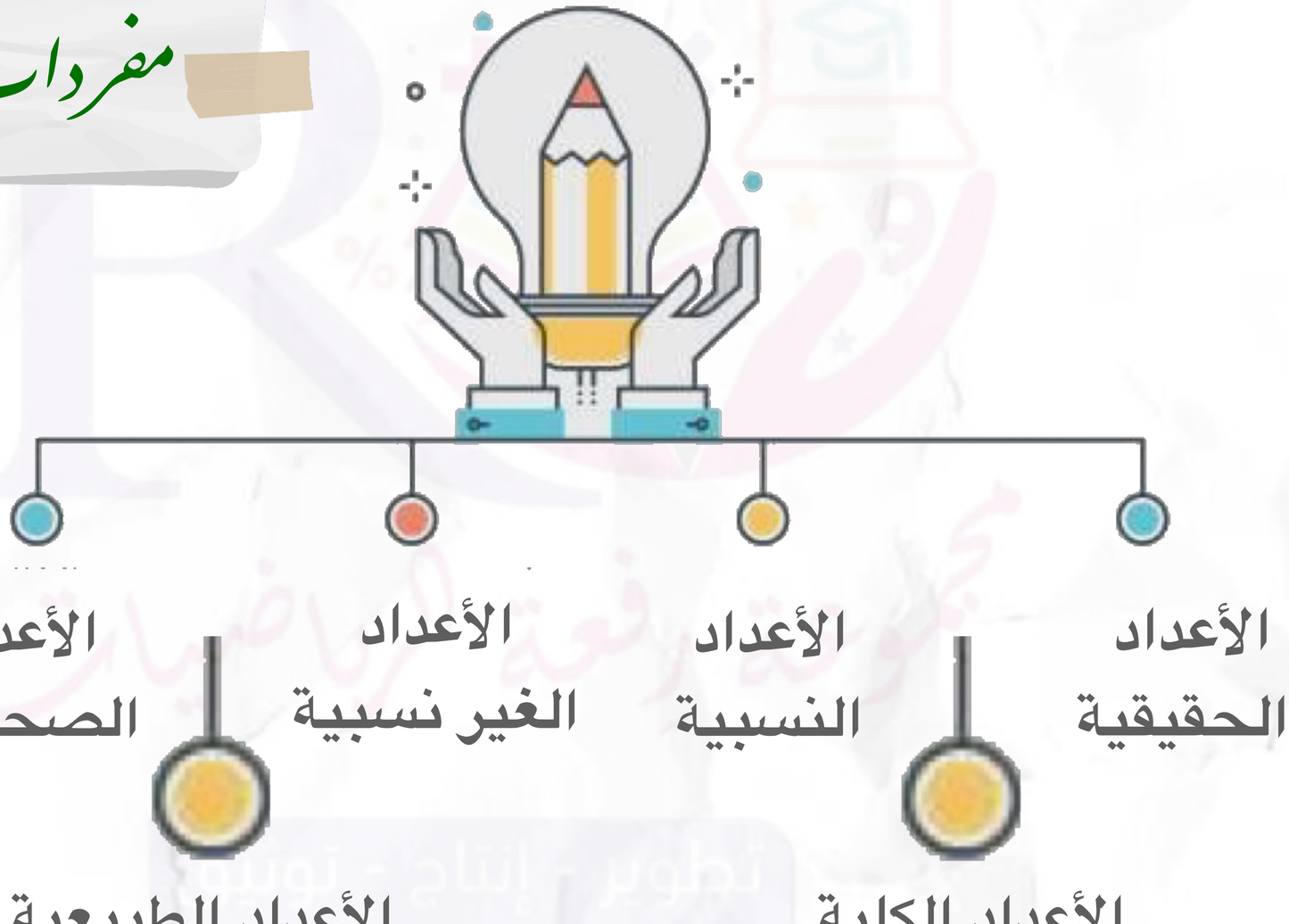


عددي العمليات على
الأعداد الحقيقية ؟

ما هو سبب التوسع في
مجموعات الأعداد ؟

عددي مجموعات
الأعداد السابق لك
دراستها ؟

مفردات الدرس



لماذا؟

يبيع محل للأدوات الرياضية 3 أصناف بالسعر نفسه. إن شراء عدة أصناف لكل منها السعر نفسه يسهل عليك إيجاد المبلغ الإجمالي للشراء، وذلك باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.



كم سعر الأصناف الثلاثة معا ؟

كم سعر كل صنف ؟

اكتبي تعبيرا باستعمال خاصية التوزيع كيف يمكنك استعماله لحساب سعر كرتي سلة وكرة قدم

الأعداد الحقيقية

تتضمن **الأعداد الحقيقية** مجموعات مختلفة من الأعداد.

1 الاعداد النسبية

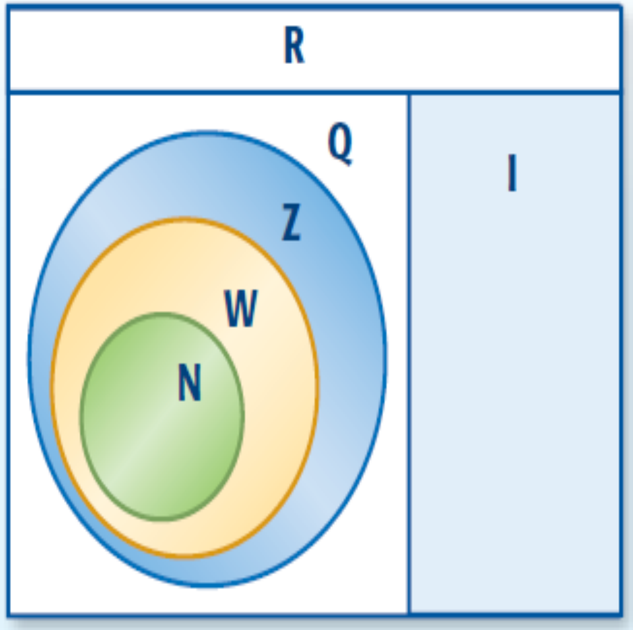
2 الاعداد الغير النسبية

مفهوم أساسي

الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى مطويتك

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\ldots$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159\ldots$ $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$
N	الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$



مثال

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

a) -23

b) $\sqrt{50}$

c) $-\frac{4}{9}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير إنتاج - تونس



تحقق من فهمك

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1A) -185

1B) $-\sqrt{49}$

1C) $\sqrt{95}$

1D) $-\frac{7}{8}$

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

خصائص الأعداد الحقيقية

لأي أعداد حقيقية a, b, c فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, a \neq 0$
الانغلاق	$a + b$ عدد حقيقي.	$a \cdot b$ عدد حقيقي.
التوزيع	$a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$	

خصائص الاعداد الحقيقية

ما الخاصية الموضحة في: $13 \cdot (4 \cdot 5) = (13 \cdot 4) \cdot 5$ ؟

الخاصية التجميعية لعملية الضرب.

وتنص الخاصية التجميعية لعملية الضرب على أن ناتج الضرب لا يتأثر بالطريقة التي يتم بها تجميع العوامل.



تحقق من فهمك

2) ما الخاصية الموضحة في: $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير إعداد - تونس

النظير الضربي والنظير الجمعي

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي والنظير الضربي

إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد، أمّا إشارة النظير الضربي لعدد فهي ذاتها إشارة ذلك العدد.

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$.

بما أن $-\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=0$، فإن النظير الجمعي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $\frac{5}{8}$.

وبما أن $\left(-\frac{8}{5}\right)\left(-\frac{5}{8}\right)=1$، فإن النظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $-\frac{8}{5}$.



تحقق من فهمك

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

3A) 1.25

3B) $2\frac{1}{2}$

تدرب وحل المسائل



مثال 1 حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

18) $-\frac{4}{3}$ **19)** -8.13 **20)** $\sqrt{25}$

مثال 2 ما الخاصية الموضّحة في كلٍّ ممَّا يأتي؟

28) $(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23)$

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي.

30) -8 **32)** -0.25



مسائل مهارات التفكير العليا

55) **مسألة مفتوحة:** حدِّد إذا كانت خاصية الانغلاق للضرب تنطبق على الأعداد غير النسبية. وإذا لم تكن كذلك، فأعط مثالًا مضادًّا.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير إياد - نوس



تحصيلي

57) ما الحد العاشر في المتتابعة ... ,2, 4, 7, 11, 16 ؟

A 46

B 67

C 56

D 72



قدرات

ينهي ٥٦ عاملاً مشروعاً في ثلاثة أيام كم عاملاً يستطيع إنهاء المشروع في يومين ؟

أ) ٤٨ ب) ٥٦ ج) ٦٥ د) ٨٤

١-١

عنوان الدرس

العلاقات والدوال

جدول التعـلّم

ماذا أعـرف

ماذا تعلـمت

ماذا أريـد أن أعرف

كيف أعرف أكثر
عن الموضوع

اهداف الدرس

فيما سبق:

درستُ تحديد كل من مجال ومدى علاقة معطاة. (مهارة سابقة)



والآن:

- أحلّل العلاقات والدوال.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.



كيف يتم تحديد مجال ومدى علاقة معطاة ؟

كيف يتم تمثيل دالة بيانيا ؟

مفردات الدرس



الدالة المتباينة

العلاقة المنفصلة

العلاقة المتصلة

اختبار الخط الرأسي

المتغير المستقل

المتغير التابع

رمز الدالة

لماذا؟

يبين الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة الرياض، لاحظ أن معدل كل من درجتي الحرارة الدنيا والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل معدلي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (9, 20).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة الرياض											
الشهر	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

كيف تعبر عن درجة الحرارة العظمي والصغرى في شهر نوفمبر كزوج مرتب ؟

العلاقات والدوال: تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

مفهوم أساسي

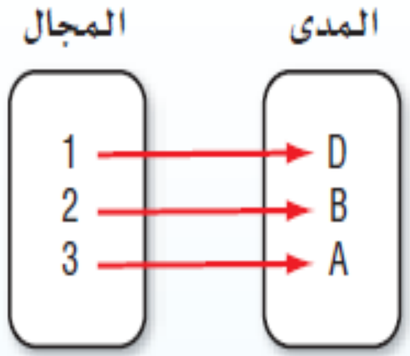
الدالة المتباينة

أضف إلى مطويتك

الدالة المتباينة

كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى،

أي أنه لا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.

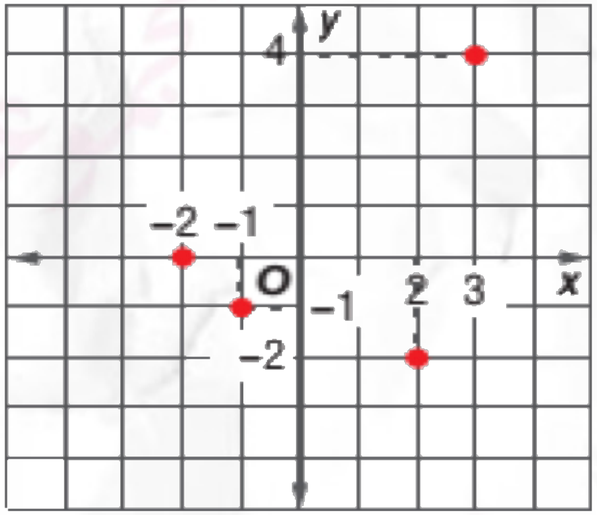


المجال والمدى

حدِّد مجال كلٍّ علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالةً أم لا ، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا ؟

a) $\{(-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7), (-6, -9)\}$

b)



إرشادات للدراسة

العلاقة: تمثل العلاقة عادة على شكل أزواج مرتبة (x, y)، كما يمكن وصفها بعدة طرق أخرى، منها المخطط السهمي، والجدول، والتمثيل البياني.

المجال: مجموعة إحداثيات x في الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

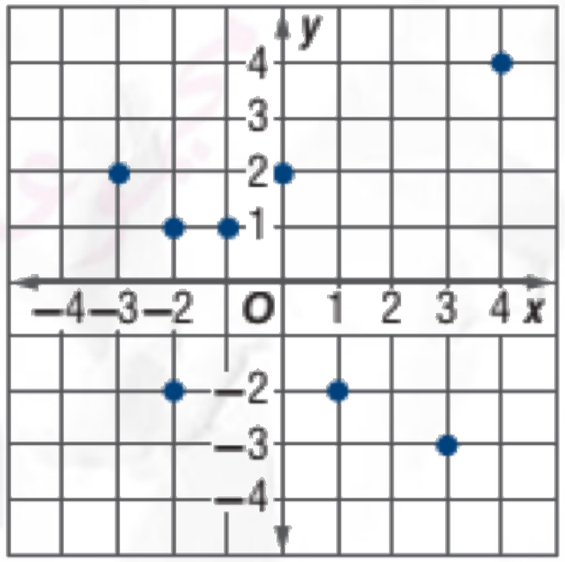
المدى: مجموعة إحداثيات y في الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

تعاقب الأدوار



تحقق من فهمك

(1A



(1B

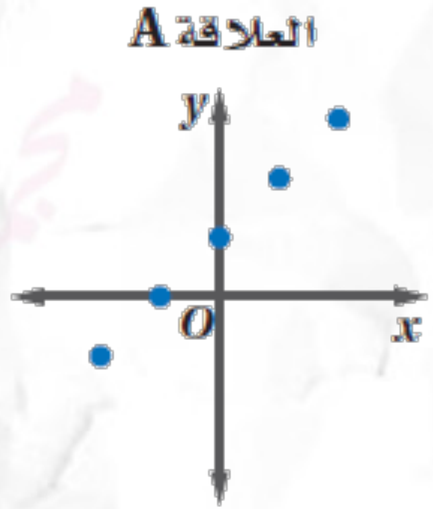


العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة، مثل العلاقة A أدناه تسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، وإذا احتوى مجال العلاقة عددًا لا نهائيًّا من العناصر وأمكن تمثيلها بيانيًّا بمستقيم أو بمنحنى متصل، فإنها تكون **علاقة متصلة**.

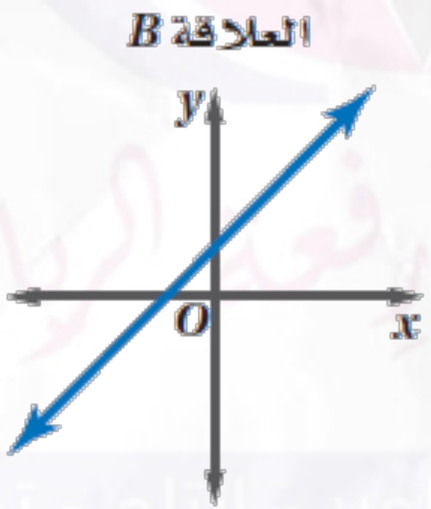
إرشادات للدراسة

العلاقة المتصلة

إذا أمكن تمثيل العلاقة بيانيًّا دون رفع القلم عن الورقة، تكون العلاقة متصلة.



علاقة منفصلة



علاقة متصلة

يمكن استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع كل من العلاقات المتصلة والمنفصلة لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

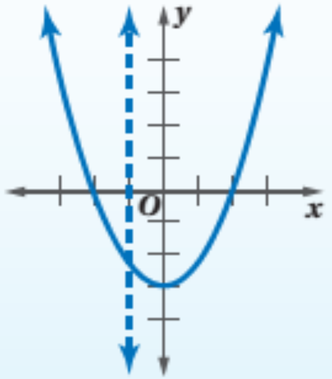
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

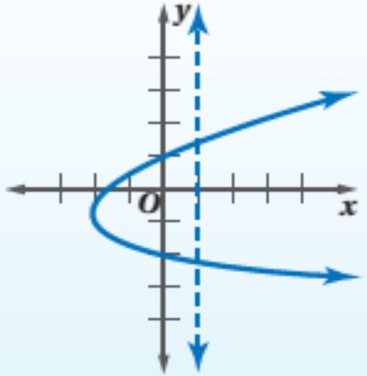
اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

النموذج:



إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة فالعلاقة ليست دالة.



تمييز العلاقة

مثال

حوادث المرور: يبين التمثيل البياني المجاور أعداد الوفيات في مدينة الرياض نتيجة الحوادث المرورية من عام 1426 هـ إلى عام 1430 هـ، هل العلاقة التي يمثلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تمثل دالة؟



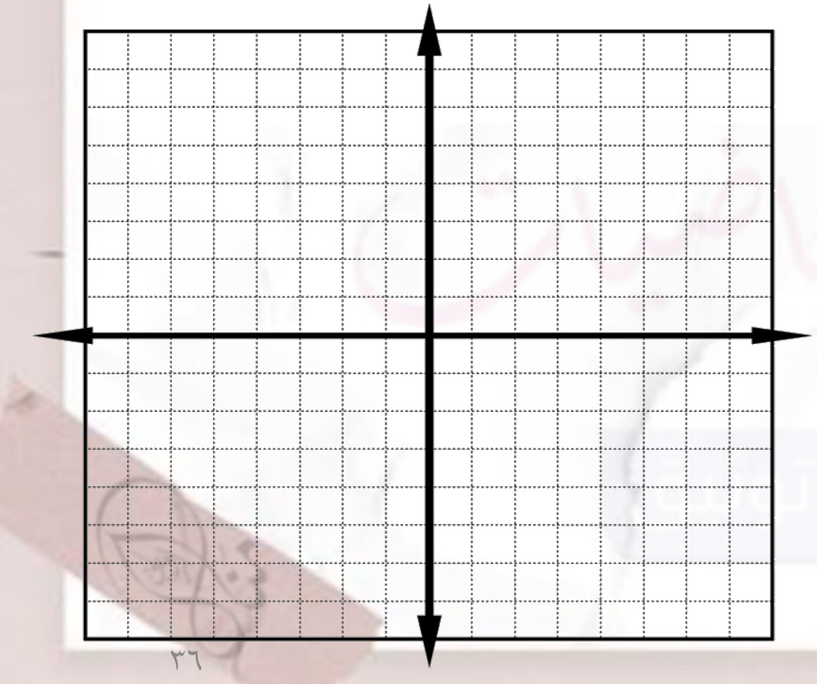
الربط مع الحياة

هل تعلم أن لكل 8 حوادث مرورية في المملكة العربية السعودية يحدث 6 إصابات، بينما النسبة العالمية إصابة واحدة لكل 8 حوادث.



تحقق من فهمك

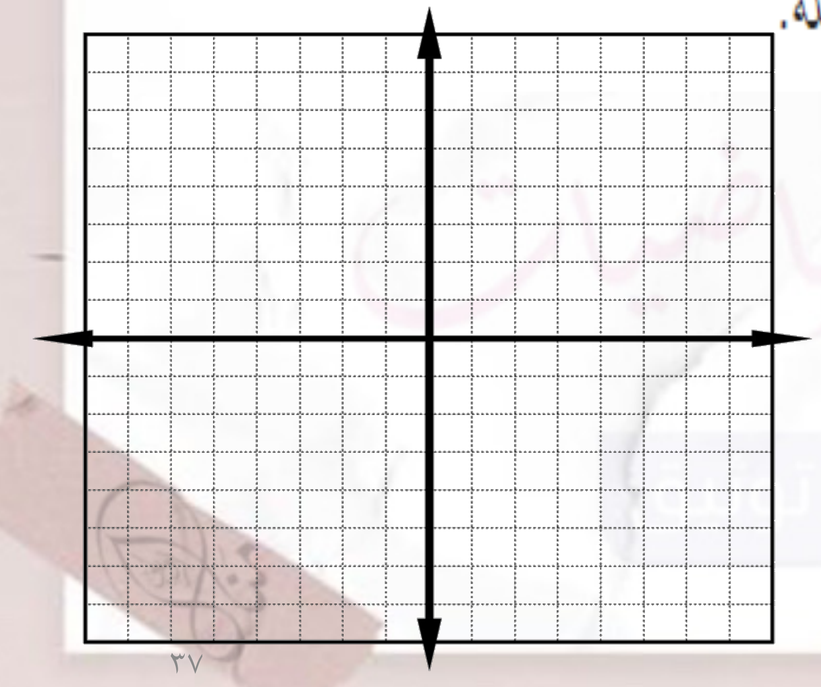
2) إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 1424هـ إلى 1429هـ على الترتيب هو: 29, 27, 31, 34, 28, 25. مثّل هذه البيانات بيانيًّا، وحدد هل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة أو متصلة. وهل تمثل دالة؟





تحقق من فهمك

3) مثّل المعادلة $y = x^2 + 1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.



إيجاد قيمة الدالة

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $f(6)$

$f(x) = 2x^2 - 8$	الدالة الأصلية
$f(6) = 2(6)^2 - 8$	بالتعويض
$= 2(36) - 8$	$6^2 = 36$
$= 72 - 8 = 64$	بالتبسيط

b) $f(2y)$

$f(x) = 2x^2 - 8$	الدالة الأصلية
$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$	بالتعويض
$= 2(4y^2) - 8$	$(2y)^2 = 2^2y^2$
$= 8y^2 - 8$	بالتبسيط

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلاً من y ويُقرأ "f الـ x". f هو اسم الدالة وليس متغيرًا مضروبًا في x.



تحقق من فهمك

لتكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

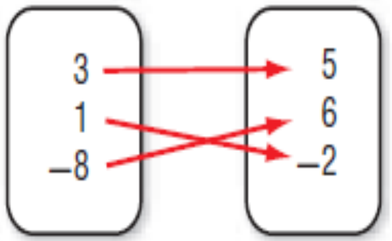
(4A $g(2.8)$

(4B $g(4a)$

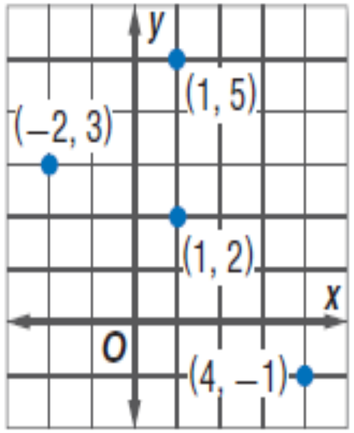
تقويم

مثال 1 حدد كلًّا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

1)



2)



3)

x	y
−2	−4
1	−4
4	−2
8	6

مثال 4 جد قيمة كل مما يأتي:

9) $f(-3)$ إذا كانت $f(x) = -4x - 8$

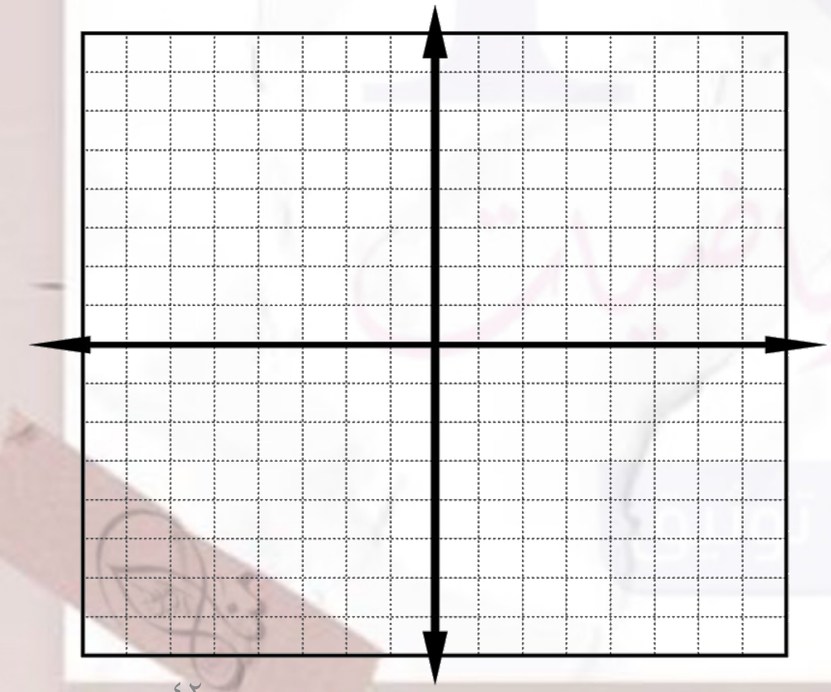
10) $g(5)$ إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$

لا يصل الإنسان إلى حديقة النجاح من دون أن يمر
بمحطات التعب والفشل و اليأس وصاحب الإرادة القوية
لا يطيل الوقوف عند هذه المحطات

تأكد

مثال 3 مثِّل كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها، ومداها، وحدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإن كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

6) $y = -4x - 2$



8) $x = 7$

جدول التعـلّم

ماذا أعـرف



ماذا تعلـمت



ماذا أريـد أن أعرف



كيف أعرف أكثر
عن الموضوع





مسائل مهارات التفكير العليا

30) تحدّ: إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $g(b) = 51, f(b) = 31, g(a) = 33, f(a) = 19$. وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحقّقان المعطيات السابقة.



تحصيلي

33) إذا كان $g(x) = x^2$، فأي عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$؟

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$



قدرات

يحرث ٣ فلاحين ٥ حقول في ثلاث ساعات فكم حقلاً يحرثه ٩ فلاحين خلال ٥ ساعات إذا عملوا بنفس المهارة ؟

أ) ٢٥ ب) ٢٨ ج) ٣٠ د) ٣٢

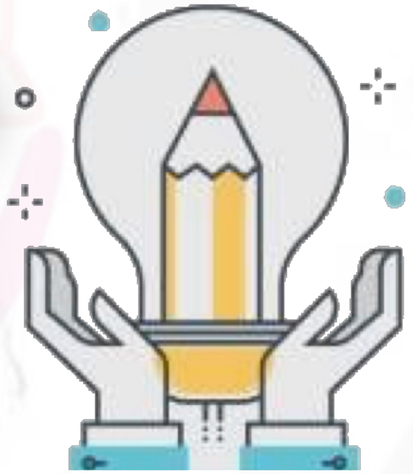


دوال خاصة

اهداف الدرس

فيما سبق:

درستُ حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة.



والآن:

- أكتب الدوال متعددة التعريف وأمثلها بيانيًا.
- أكتب الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وأمثلها بيانيًا.



عرفي الدالة؟

كيف يتم حل معادلات القيمة المطلقة ؟

مفردات الدرس



- الدالة متعددة التعريف
- الدالة متعددة التعريف الخطية
- الدالة الدرجية
- دالة اكبر عدد صحيح
- دالة القيمة المطلقة

لماذا؟

السمنة حالة مرضية يمكن تعريفها طبيًّا أنها زيادة الدهون في الجسم، وتنتج السمنة عن أخذ مقدار طاقة أكبر من حاجة الجسم دون استهلاكها.

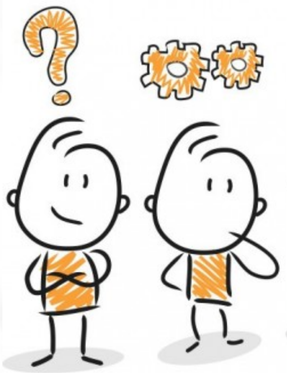
ويبين الجدول المجاور نسب المصابات بالسمنة لفئات عمرية مختلفة في المملكة.

نسب المصابات بالسمنة في المملكة حسب الفئة العمرية		
من	إلى	النسبة
15	24	19%
25	34	38%
35	44	53%
45	54	58%
55	64	49%

المصدر: مسح المعلومات الصحية في المملكة، وزارة الصحة، 1435هـ

ما نسبة المصابين بالسمنة في الفئة العمرية من 25 إلى 34 ؟

أي الفئات العمرية فيها نسبة 58% المصابات بالسمنة



الدالة المتعددة التعريف: الدالة التي تربط بين العمر ونسبة المصابات بالسمنة ليست خطية؛ لأن كل فترة من مجال الدالة معرّفة بعبارة مختلفة، فالدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر تسمى **دالة متعددة التعريف**.

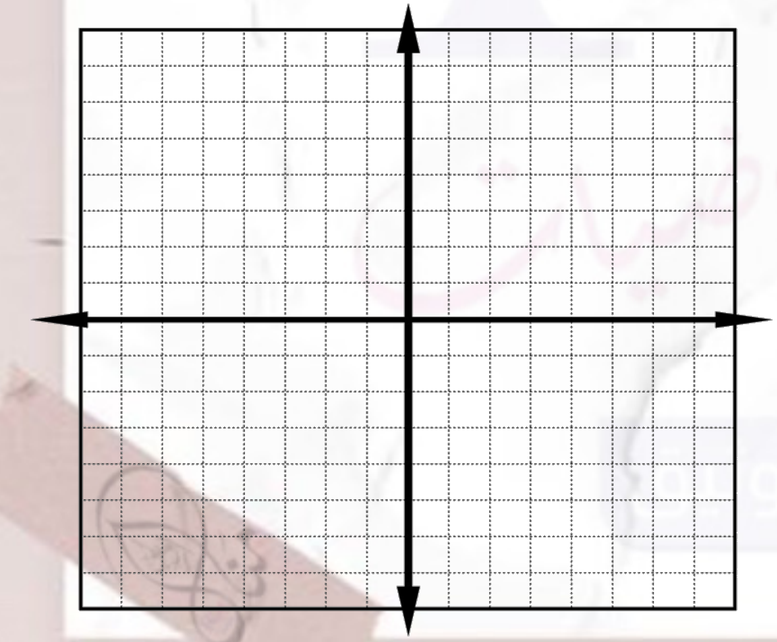
وعند تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًّا توضع دائرة صغيرة مظلّلة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظلّلة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le -6 \\ 5, & -6 < x \le 2 \\ -2x + 1, & x > 4 \end{cases}$$

مثال

مثّل الدالة $f(x)=\begin{cases} x-2 & , \quad x<-1 \\ x+3 & , \quad x\geq -1 \end{cases}$ بيانيًّا.

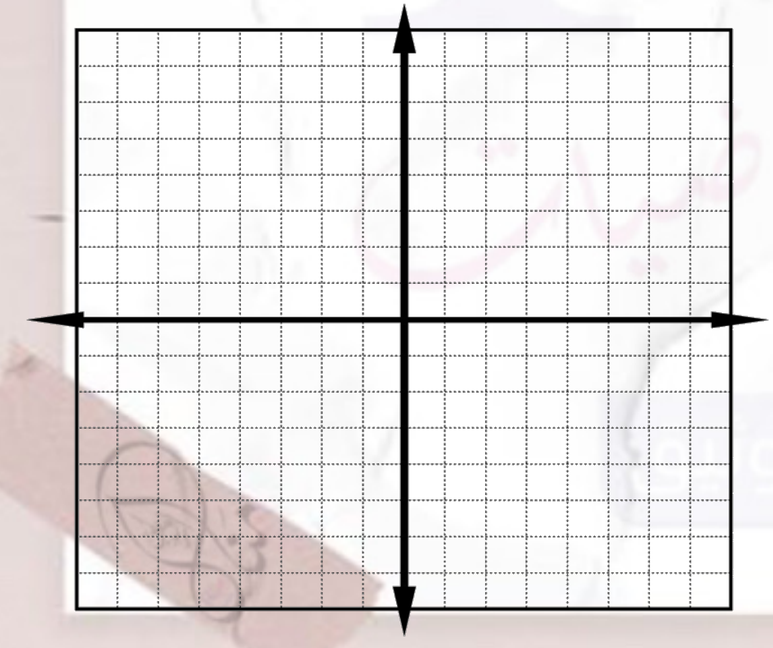
ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.





تحقق من فهمك

1) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$.



تمثِّل الدوال المتعددة التعريف غالبًا بعدة دوال خطية. وتسمى حينئذٍ **الدالة المتعددة التعريف الخطية** .

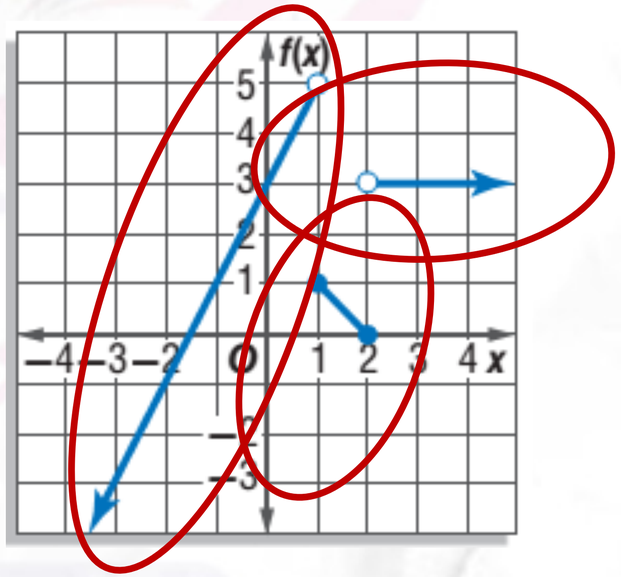
إرشادات للدراسة

تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانيًا

قد تكون الدوال المتعددة التعريف متصلة أو غير متصلة.

مثال

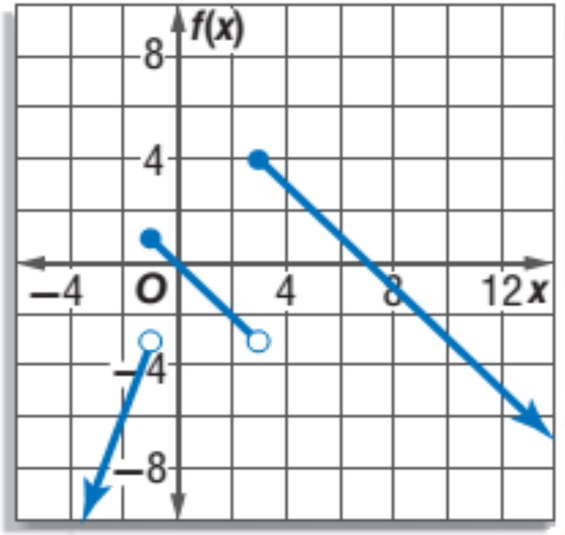
اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور.





تحقق من فهمك

2) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



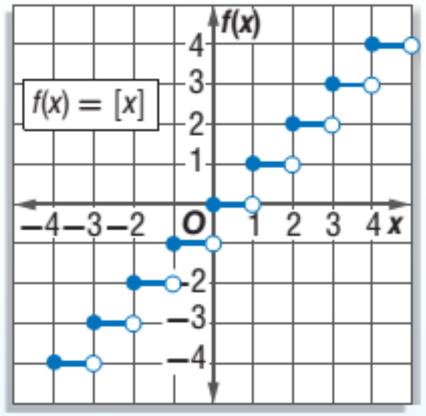
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالة أكبر عدد صحيح

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = [x]$، وتُعرّف على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$



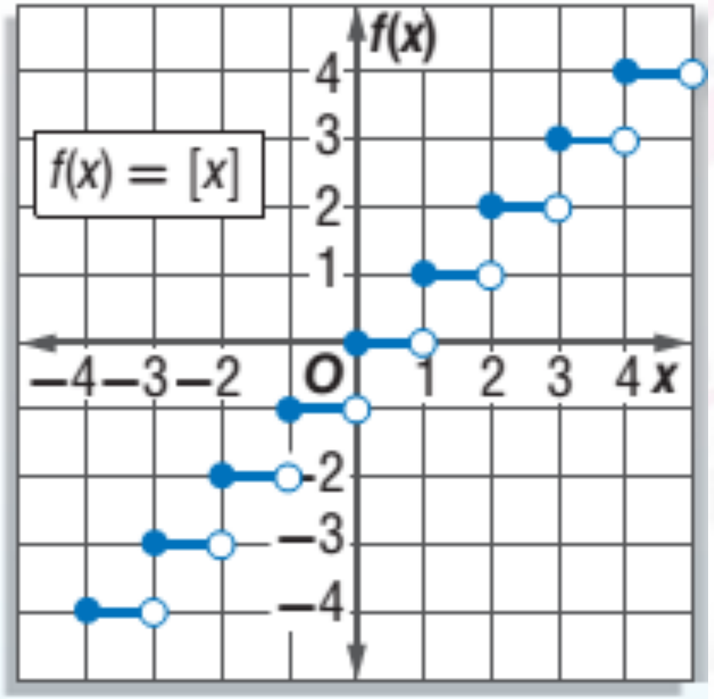
شكل التمثيل البياني: قطع مستقيمة أفقية.

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

المقطعان: $f(x) = 0$ حيث $0 \le x < 1$, $x = 0$

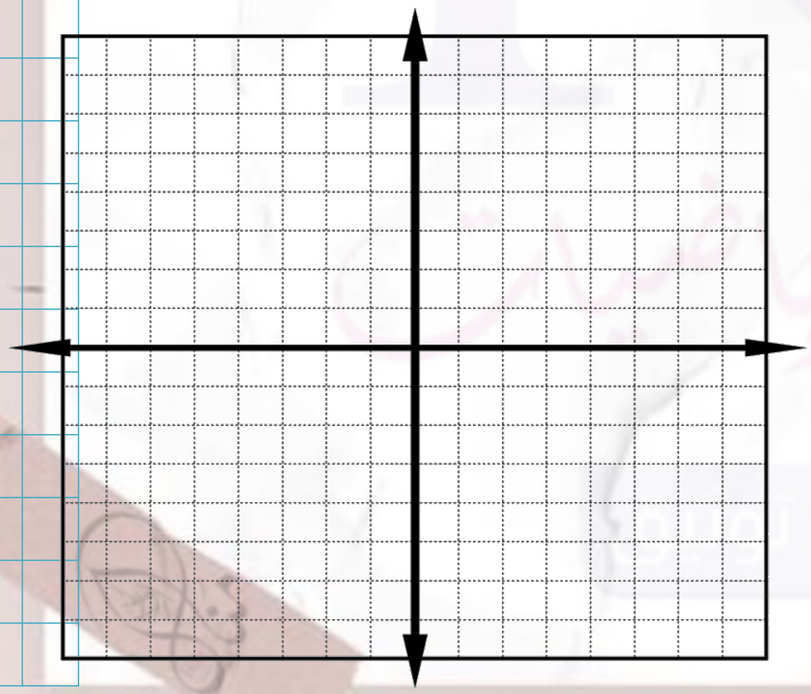
الدالة الدرجية: من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، وقد سُميت بهذا الاسم لأن تمثيلها البياني يشبه الدرج، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [x]$، هي مثال على الدالة الدرجية؛ حيث يعني الرمز $[x]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.



مثال

تمثيل الدالة الدرجية

مثلي الدالة. $f(x)=[\![x]\!]$ ثم حددي مجالها ومداها

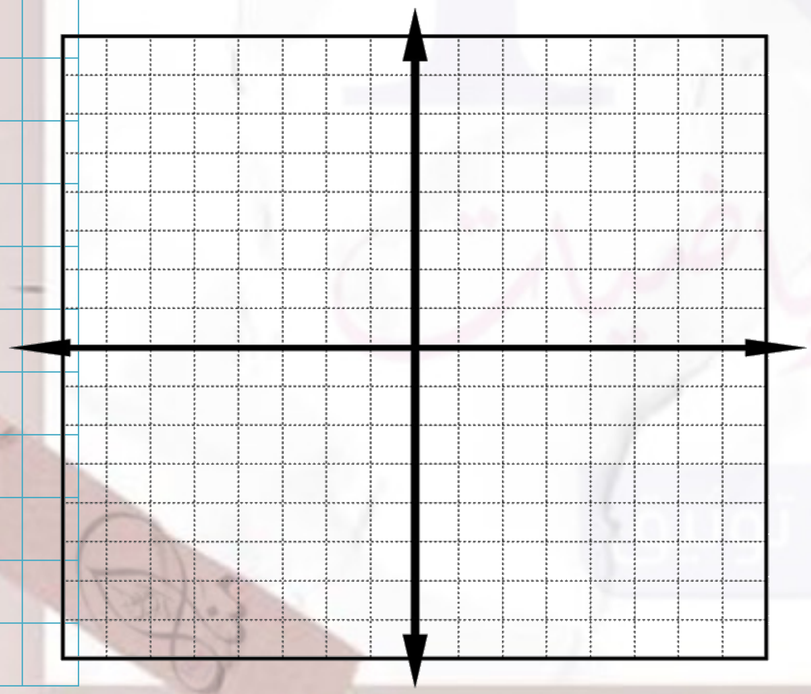




تحقق من فهمك

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، ثم حدّد كلا من مجالها ومداها:

18) $f(x) = [x] - 6$



وهناك نوع آخر من الدوال المتعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

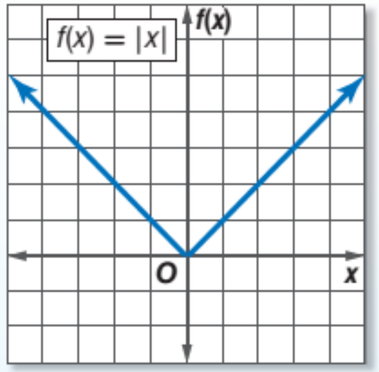
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالة القيمة المطلقة

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = |x|$ ، وتُعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني: على شكل حرف V

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

المقطعان: $x = 0, f(x) = 0$

ولايمكن أن تكون: $f(x) < 0$

مثال

مثّل الدالة $f(x) = |2x| - 4$ بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها.

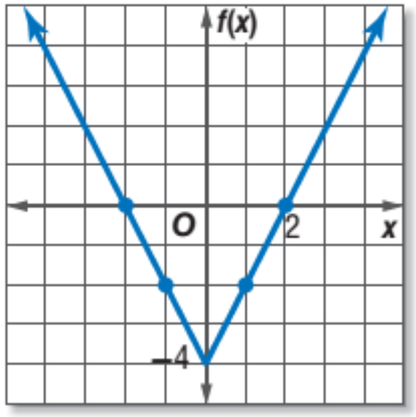
1) اجعل ما بداخل القيمة المطلقة يساوي الصفر، أي $2x = 0$ أو $x = 0$

2) كوّن جدولًا للقيم، يحوي قيمًا لِـ x أكبر من 0 وقيمًا أصغر من 0

x	$\|2x\| - 4$
-2	0
-1	-2
0	-4
1	-2
2	0

3) مثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي.

4) صل بين النقاط.



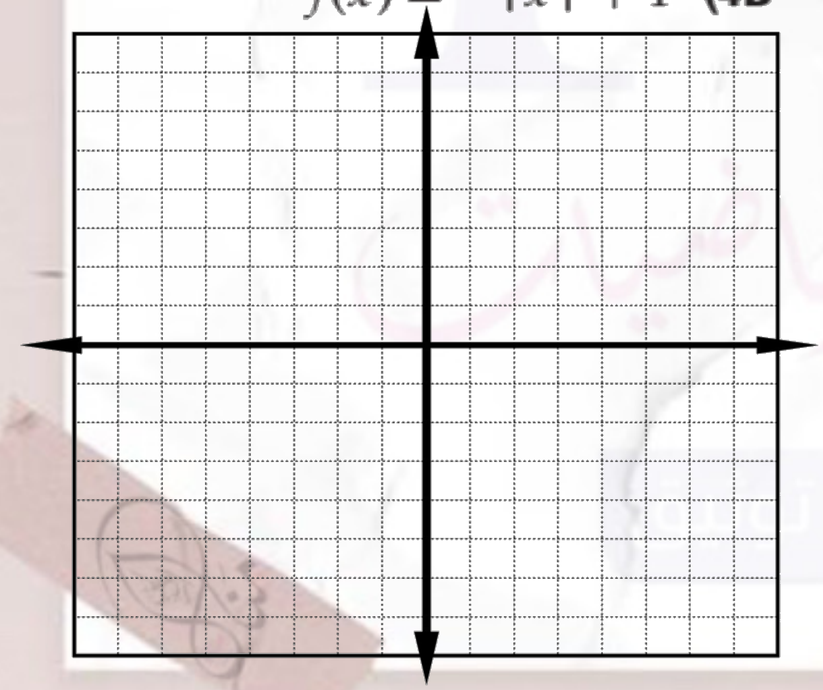
المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq -4\}$.

تحقق من فهمك



(4A $f(x) = |x - 2|$

(4B $f(x) = -|x| + 1$



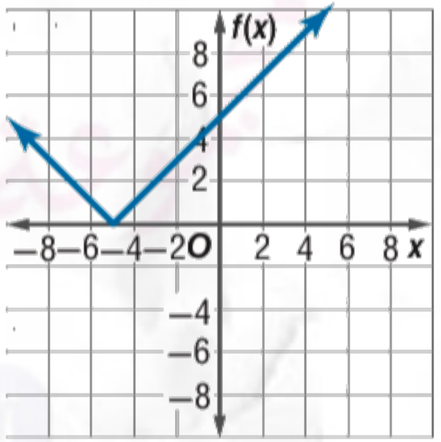


إستراتيجية الدقيقة الواحدة

تحقق من فهمك

اكتب دالة القيمة المطلقة الممثلة بيانيًّا في كلٍّ ممَّا يأتي:

(28





مسائل مهارات التفكير العليا

32) مسألة مفتوحة: اكتب علاقة باستعمال القيمة المطلقة بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

35) مسألة مفتوحة: اكتب دالة قيمة مطلقة $f(x)$، تحقق $f(5) = -3$.

تحصيلي

أيّ دالة مما يأتي يكون فيها $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1$؟

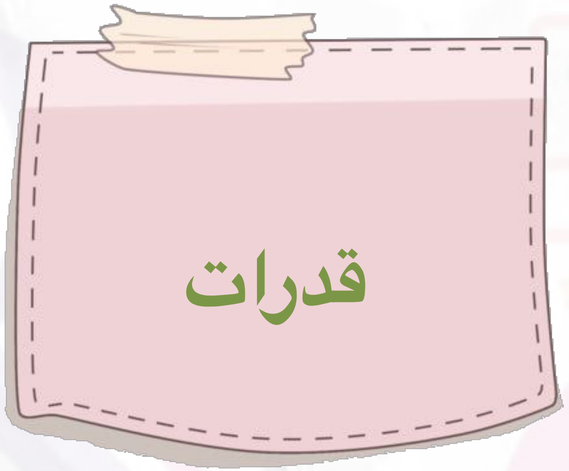
A $f(x) = 2x$

B $f(x) = |-2x|$

C $f(x) = [x]$

D $f(x) = [2x]$





سيارتان إنطلقتا من نقطة واحدة , الأولى انطلقت بسرعة ٦٠ كم / س جهة الشرق والثانية بسرعة ٨٠ كم/س جهة الشمال فما أقصر مسافة بين السيارتين ؟

أ) ١٢٠ كم ب) ١٠٠كم ج) ٩٠ كم د) ٣٠كم

الدرس
٤-١

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

اهداف الدرس



فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية. (مهارة سابقة)

عددي خطوات تمثيل الدالة الخطية.



والآن

- أمثّل المتباينات الخطية بيانيًا .
- أمثّل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا .

مفردات الدرس



المتباينه الخطية



منطقة الحل



الحد

لماذا؟

دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير الطبيعي، ورصد لتلك الدعوة مبلغ 150 ريالًا فقط.

ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية: $6p + 5d \leq 150$ حيث p عدد الفطائر و d عدد أكواب العصير؛ للتأكد من أن سعر عدد معين من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

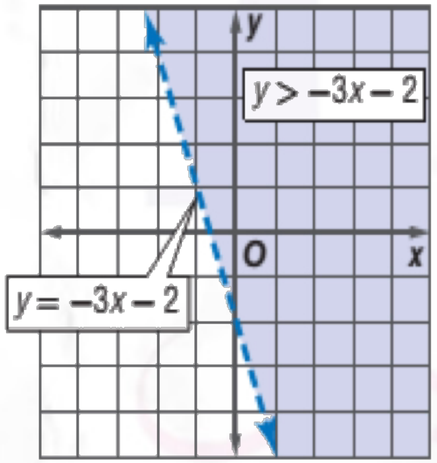


ماذا تعني المتباينة

$$6p + 5d \leq 150$$

هل لدى تركي المبلغ الكافي لشراء 10 فطائر و 20 كوب عصير

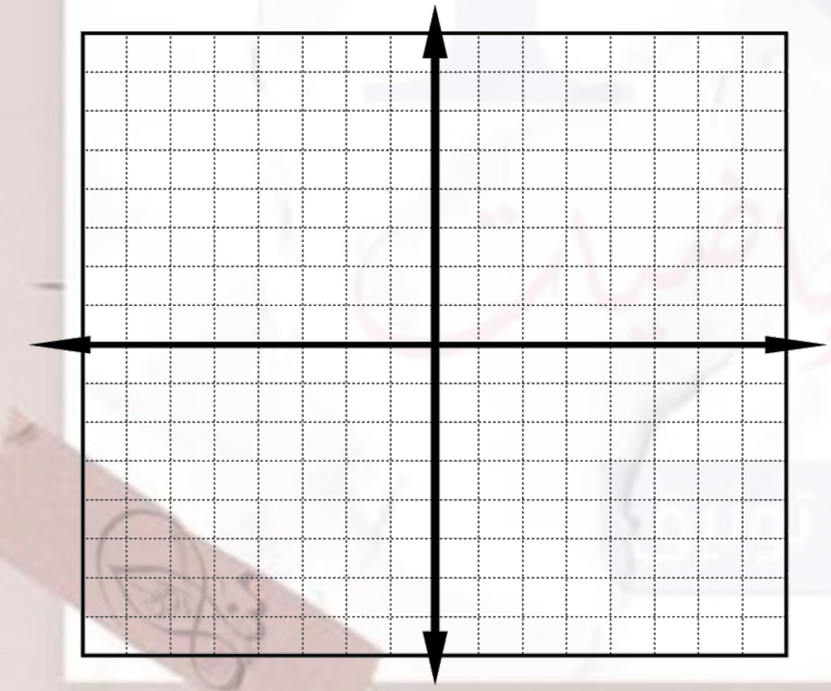
تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا: تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على صورة منطقة مظلّلة تسمى **منطقة الحل**، فكل نقطة في المنطقة المظلّلة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** منطقة الحل وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز $\leq$ أو $\geq$ فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذٍ يكون تمثيل المستقيم خطًّا متصلًا.

مثال

مثّل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيًّا.

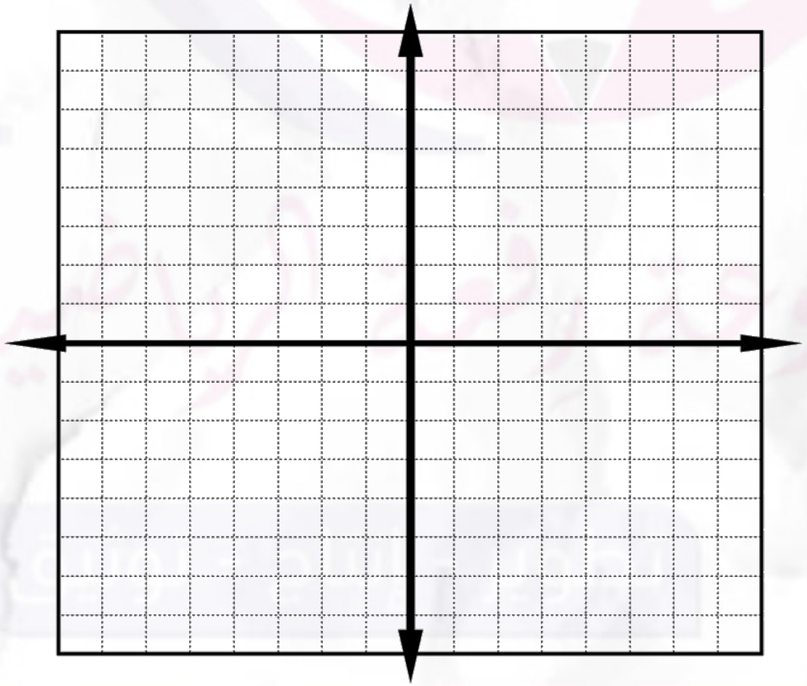




تحقق من فهمك

(1A $3x + \frac{1}{2}y < 2$

(1B $-x + 2y > 4$





تحقق من فهمك

2) **ألعاب:** مع صالح 60 ريالًا يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمن تذكرة كل لعبةٍ عاديةٍ 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير إسلام نوسن

تطبيق

5) وقود: مع عامر 76 ريالًا ، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك بالمبلغ المتبقي. فإذا كان سعر لتر الوقود 0.45 ريال، وسعر عبوة زيت المحرك 13 ريالًا.

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف، ثم مثلها بيانيًّا.

b) هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ 20 لترًا من الوقود وشراء 4 عبوات زيت محرك؟ فسر إجابتك.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير إتقان - تميز

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا: تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية، مثّل بيانيًّا معادلة القيمة المطلقة المرتبطة، وبعد ذلك حدِّد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم حدِّد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

مثال

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا

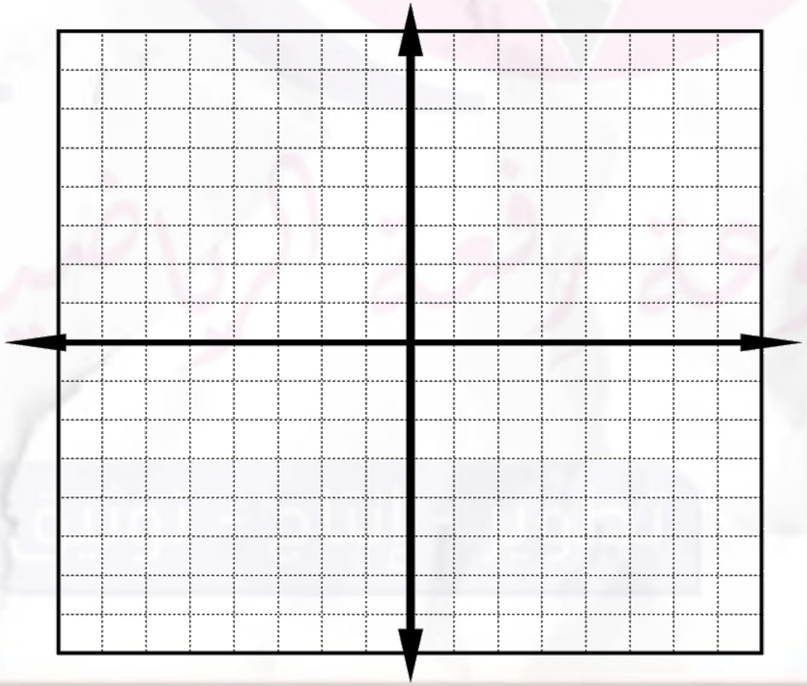
مثل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانيًّا.

تحقق من فهمك

(3A $y \leq 2|x| + 3$

(3B $y \geq 3|x + 1|$





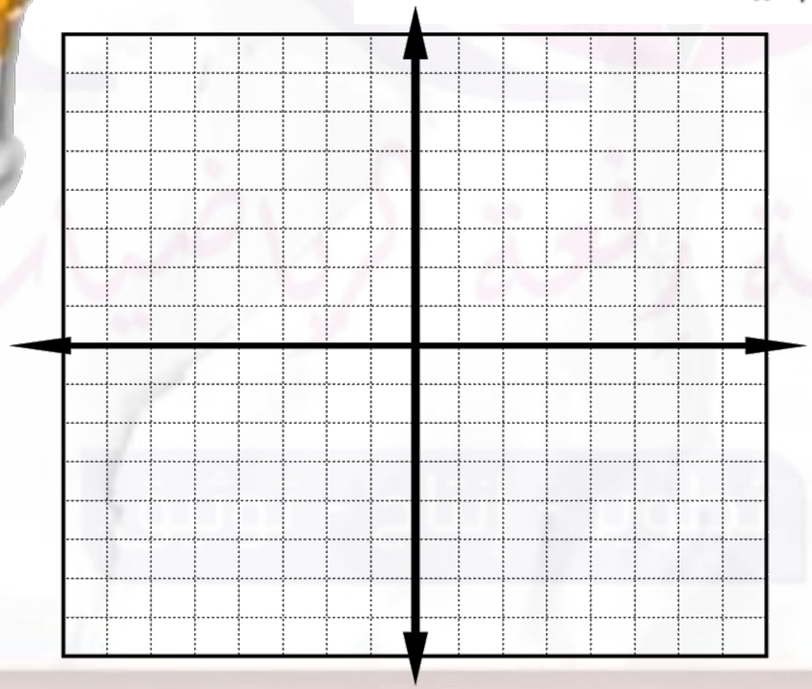
استراتيجية الجيسكو



مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

1) $y \leq 4$

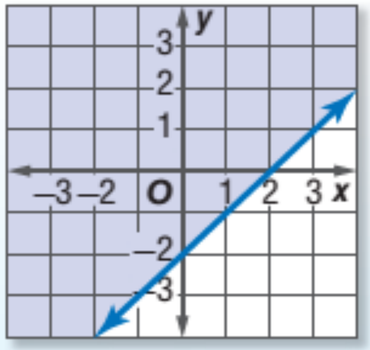
3) $x + 4y \leq 2$



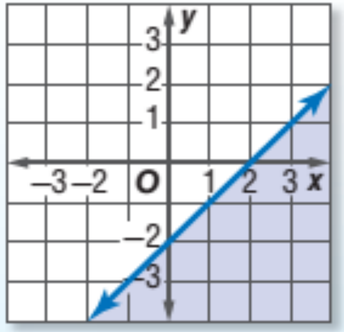
مهارات التفكير العليا

31) اكتشف الخطأ: مثّل كل من زيد ومصعب المتباينة $x - y \geq 2$ بيانيًّا. فأيهما تمثيله صحيح؟ فسّر إجابتك.

زيد



مصعب



تحصيلي

أي الدوال الآتية مداها هو $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$؟

A $f(x) = -x$

B $f(x) = [x]$

C $f(x) = |x|$

D $f(x) = -|x|$



قدرات

إذا نسبة الرمل إلى الماء إلى الإسمنت في خلطة ٥ : ٣ : ٤ على التوالي فإذا كان وزن الخلطة ٢٤٠ كجم كم وزن الماء ؟

أ) ٢٠٠ كم　　ب) ٨٠ كم　　ج) ١٠٠ كم　　د) ٦٠كم

عنوان الدرس
١-٥

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

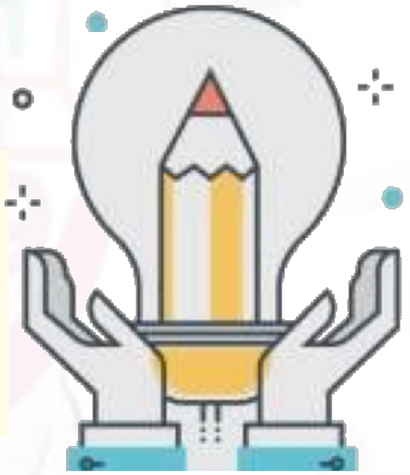
أهداف الدرس

عددي خطوات حل نظام معادلتين خطيتين.

عددي خطوات حل متباينة خطية.

فيما سبق:

درست حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيًا. (مهارة سابقة)



والآن:

- أحل نظام متباينات خطية بيانيًا.
- أحدّد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل.



مفردات الدرس

المفردات:

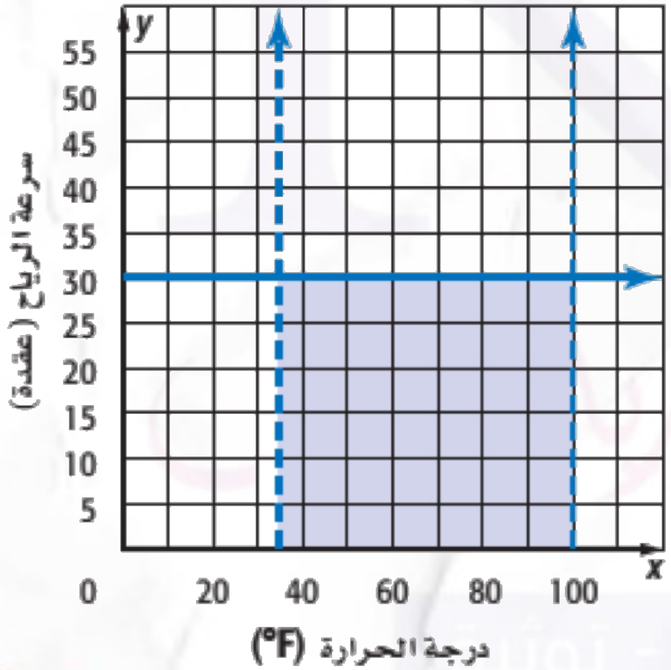
نظام المتباينات الخطية

system of linear inequalities



لماذا؟

تؤخذ الحالة الجوية بالاعتبار عند إطلاق المركبات الفضائية، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وأن لا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدة. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظام من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.



هل الشرط درجة الحرارة
36^0 F
و سرعة الرياح 30 عقدة
يقع في المنطقة المظللة

لماذا تم تمثيل
المستقيمات الرأسية
بخط متقطع والأفقي
بخط متصل ؟

نظام المتباينات الخطية : حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حل أنظمة المتباينات الخطية

الخطوة 1 مثّل كل متباينة في النظام بيانيًا.

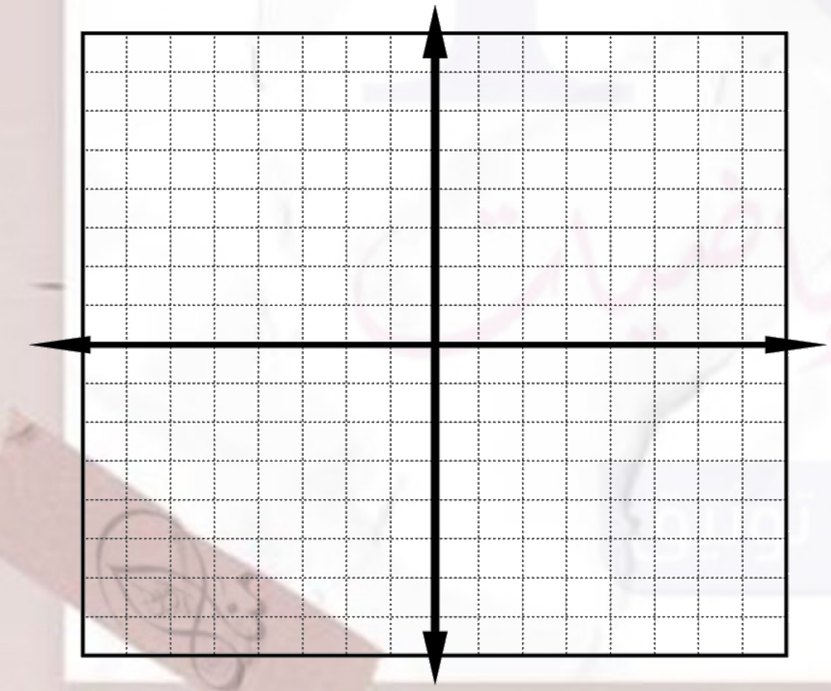
الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

مثال 1 مناطق الحل المتقاطعة

حل النظام الآتي بيانيًّا:

$$y > 2x - 4$$

$$y \leq -0.5x + 3$$

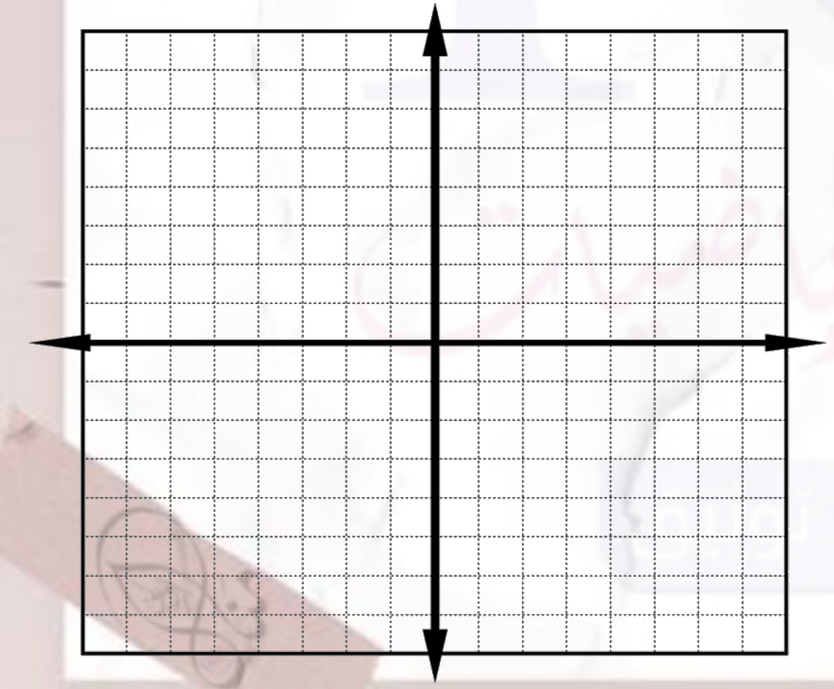




استراتيجية الجيسكو

$y \leq -2x + 5$ (1A

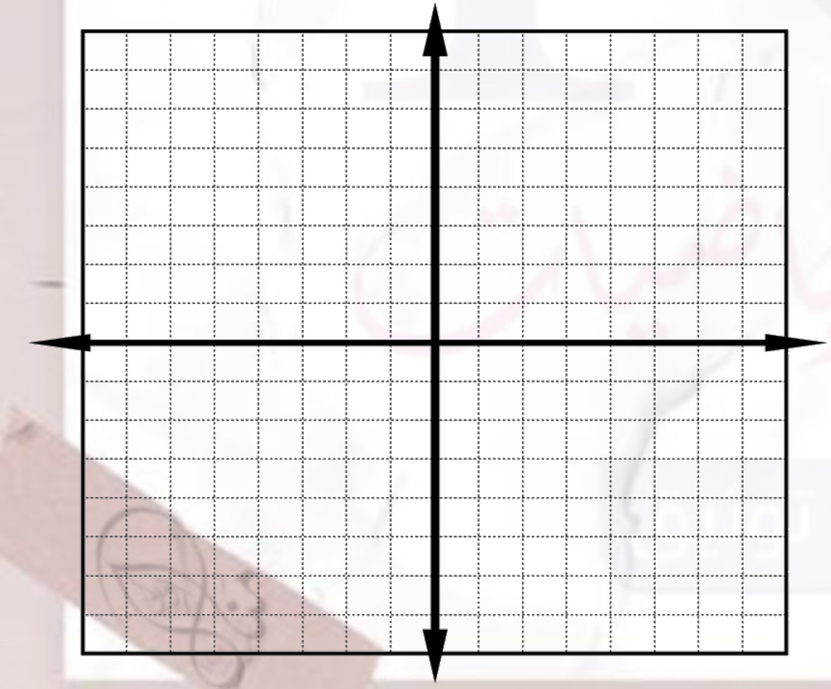
$y > -\frac{1}{4}x - 6$





$y \geq |x|$ (1B

$y < \frac{4}{3}x + 5$



يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين، وعليه فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

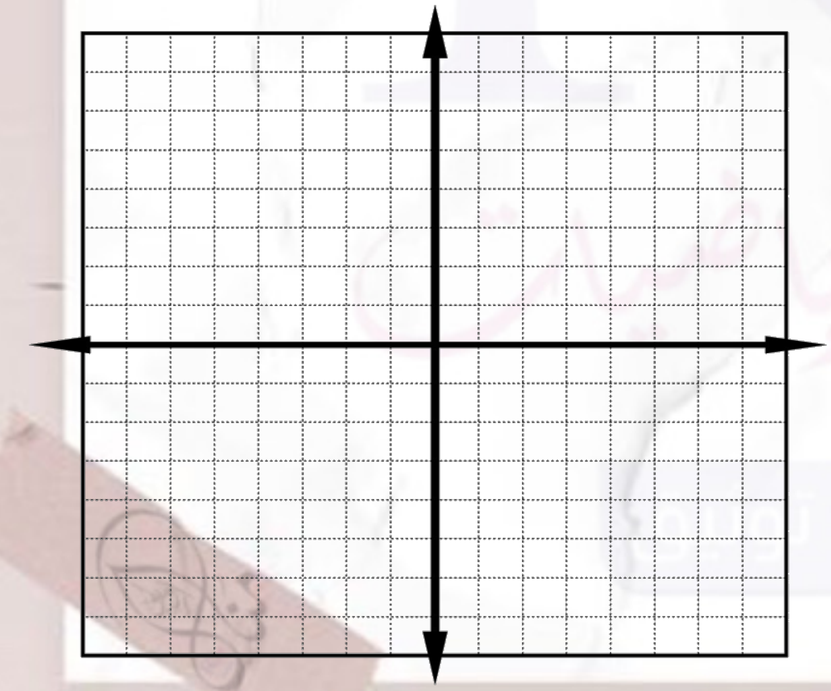
مناطق الحل غير المتقاطعة

مثال

حل النظام الآتي بيانيًّا:

$$y \geq x + 5$$

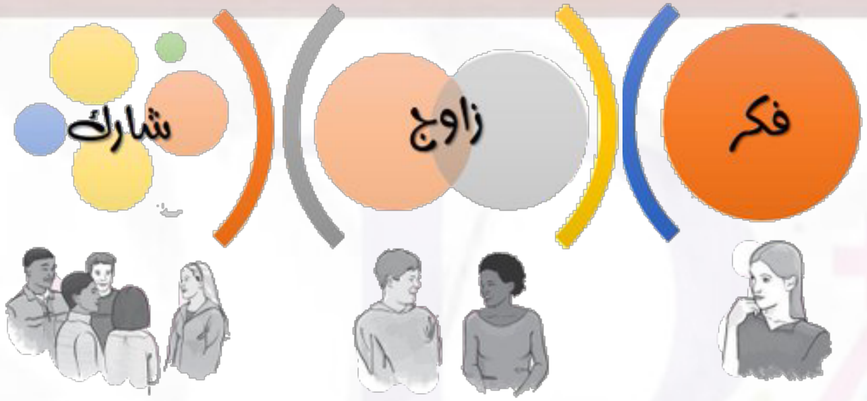
$$y < x - 4$$



قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويرمز إليها بأحد الرمزين $\emptyset$ أو $\{\ \}$.



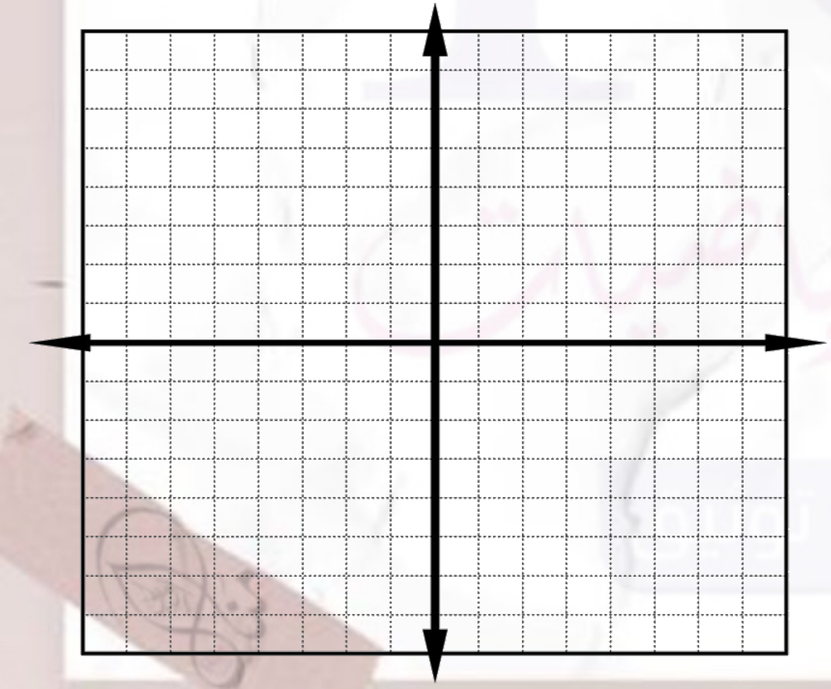
تحقق من فهمك

(2A $y \geq -4x + 8$

$y < -4x + 4$

(2B $y \geq |x|$

$y < x - 6$



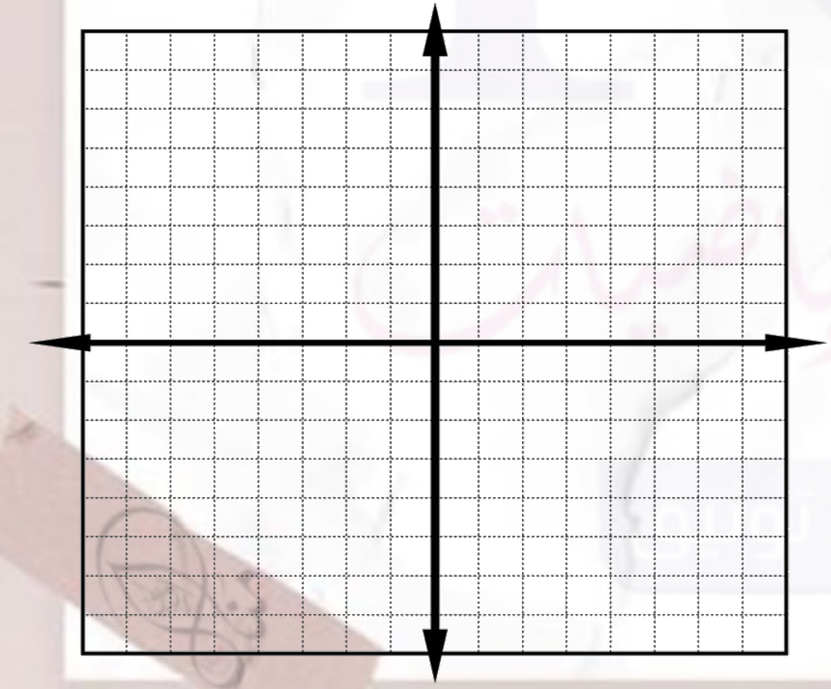


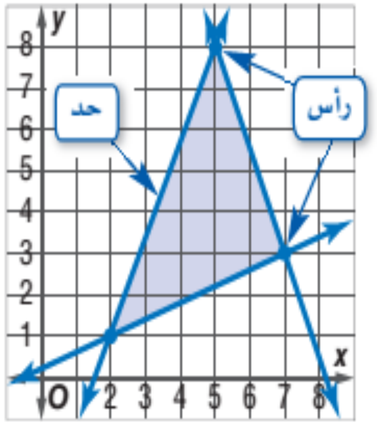
تأكد

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

1) $y \leq 6$

$y > -3 + x$



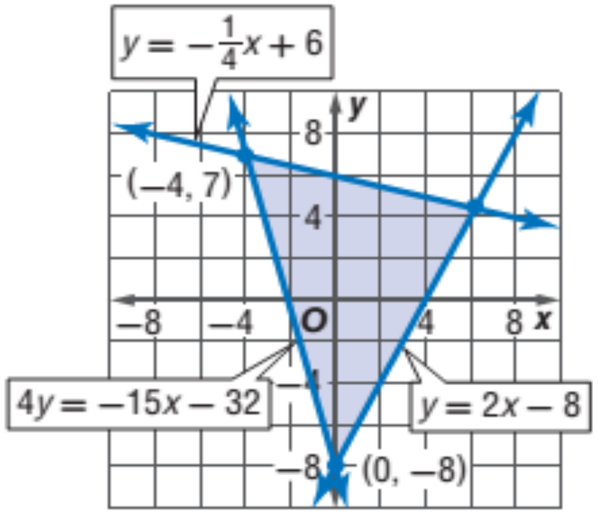


إيجاد رؤوس منطقة الحل: ينتج أحيانًا عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحدِّدة للمنطقة (الحدود).

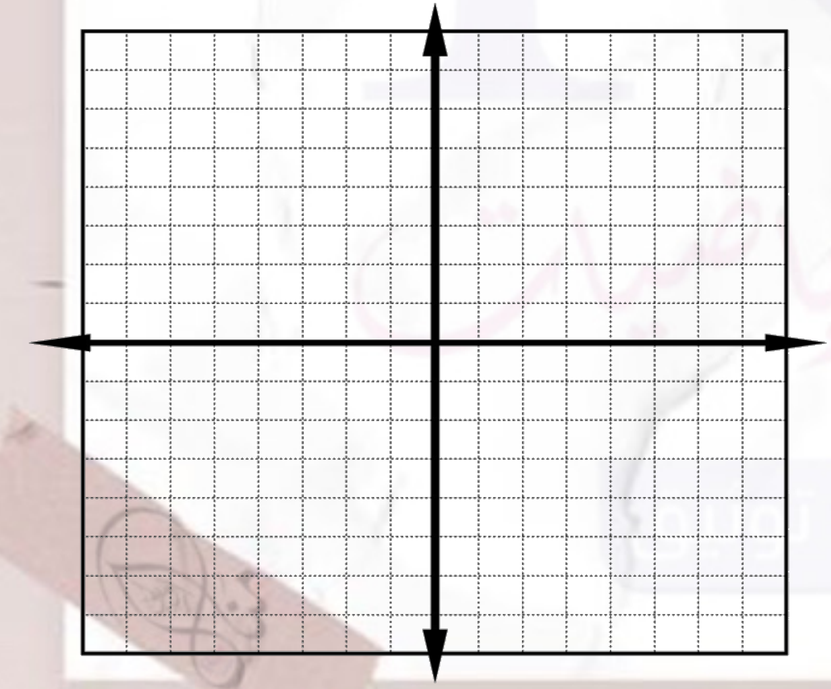
مثال 4 إيجاد رؤوس منطقة الحل

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$y \geq 2x - 8, y \leq -\frac{1}{4}x + 6, 4y \geq -15x - 32$.







تحقق من فهمك

(4A $y \geq -3x - 6$

$2y \geq x - 16$

$11y + 7x \leq 12$

(4B $5y \leq 2x + 9$

$y \leq -x + 6$

$9y \geq -2x + 5$

ضع دائما صورتك التي تريد أن تكون عليها في عقلك و مخيلتك ، و ستتجه تدريجيا نحوها ... إذا لم تهزم نفسك ، ستهزمك نفسك ... سلم النجاه لا يعاني من الازدحام في اعلاه



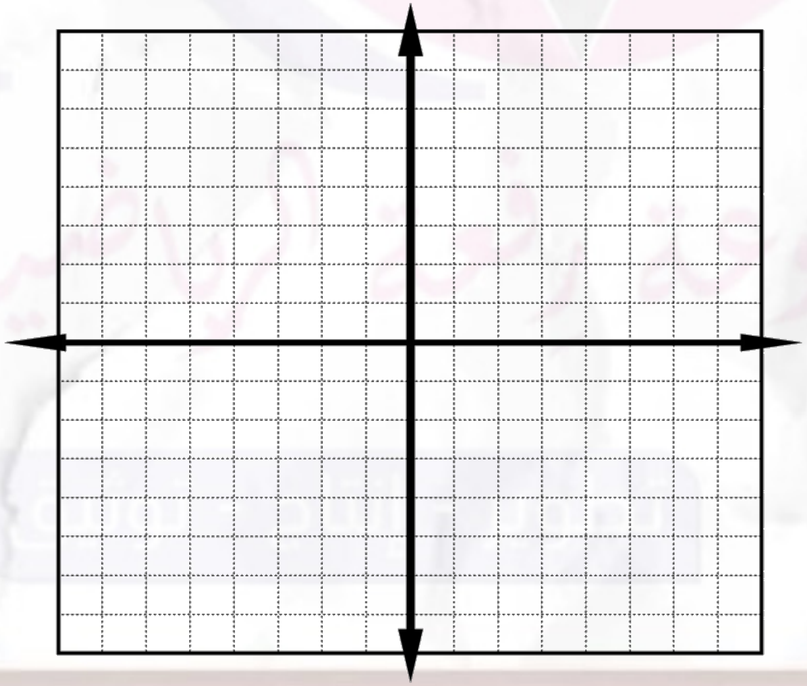
نابليون هيل

تأكد

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

5) $y \geq 2x + 1$
$y \leq 8$
$4x + 3y \geq 8$

6) $y \geq -2x - 4$
$6y \leq x + 28$
$y \geq 13x - 34$



التقويم

النقطة التي لا تمثل رأسًا لمنطقة حل النظام:

$x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 6$ هي:

A $(0, 0)$ **C** $(0, 6)$

B $(0, 3)$ **D** $(3, 0)$

العصف الذهني



39) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظامًا من متباينتين على أن يكون الحل:

a) في الربع الثالث فقط.

b) غير موجود.

c) واقعًا على مستقيم.

d) نقطة واحدة فقط.



قدرات

القيمة الأولى	القيمة الثانية
$\overline{٦٤ر} + \overline{٣ر}$	$\overline{٤٩ر} + \overline{٤ر}$

أ) القيمة الأولى أكبر من الثانية

ب) القيمة الثانية أكبر من الأولى

ج) القيمتان متساويتان

د) المعلومات غير كافية

عنوان الدرس
٦-١

البرمجة الخطية والحل الأمثل

اهداف الدرس

عددي خطوات حل نظام متباينات خطية بيانيا.

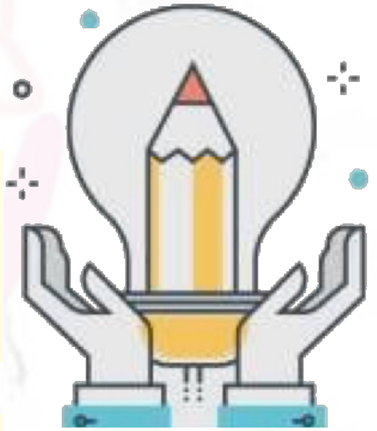
كيف يتم تحديد رؤوس منطقة حل نظام متباينات خطية

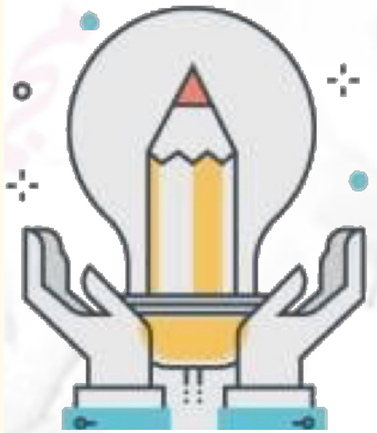
فيما سبق:

درست حل أنظمة متباينات خطية بيانيًا.

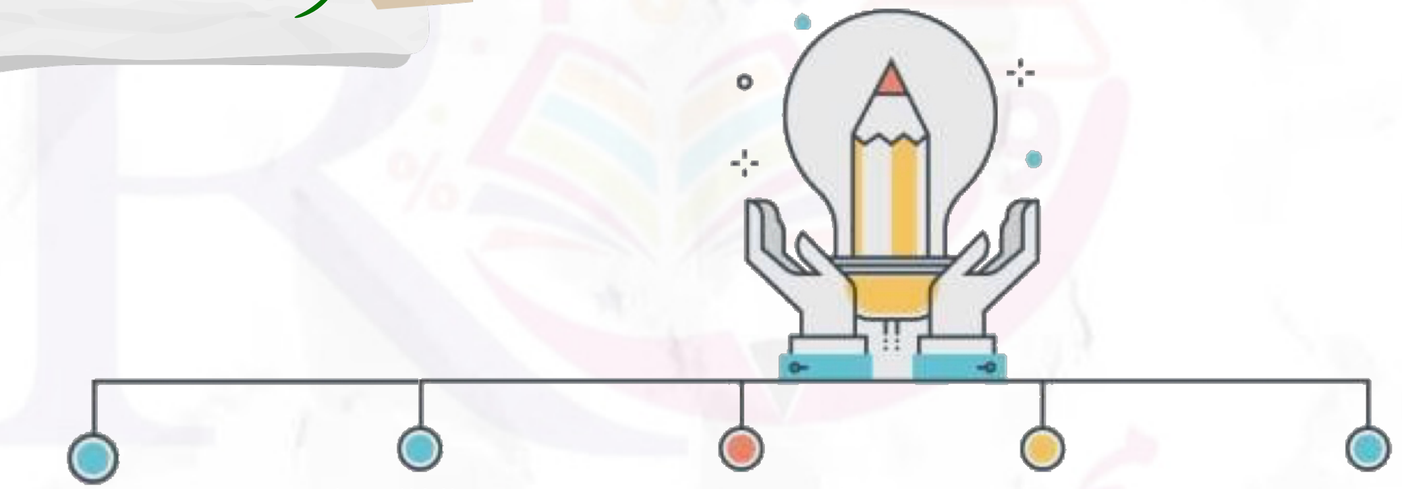
والآن:

- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة الحل.
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.





مفردات الدرس



القيود

البرمجة الخطية

محدود

غير محدود

الحل الأمثل

لماذا؟

يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة في اليوم الواحد من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالًا
كبير	800	1700	70 ريالًا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن ؟

هل تستطيع الشركة إنتاج 2000ثوب من المقاس الصغير في اليوم الواحد؟

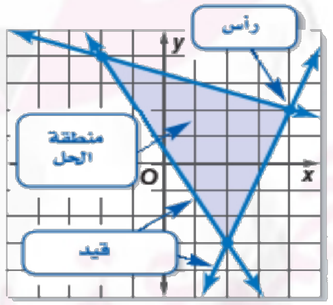
ما تكلفة إنتاج 1000ثوب من المقاس الصغير؟

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه المصانع في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه الأوضاع يمكن التعامل معها عادة باستعمال البرمجة الخطية.

البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

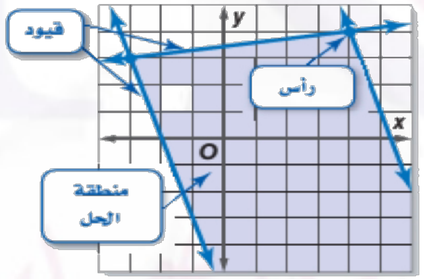
مفهوم أساسي

منطقة الحل



إذا كانت منطقة الحل محدودة (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل.

أضف إلى مطويتك



إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك غير محدودة، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.



مثال

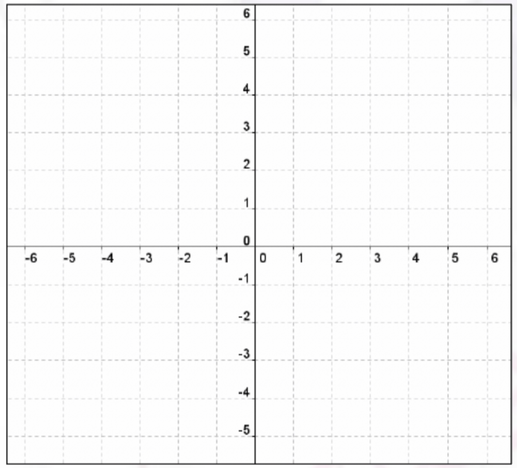
مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$

$$y \le 3x + 12$$

$$y \le -2x + 6$$

$$f(x, y) = 4x - 2y$$



قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x, y. وتُقرأ f لـ x وَ y.



العقل ينمو بالاستعمال
ويتوقف عن النمو من
قلة الاستعمال ...

تحقق من فهمك

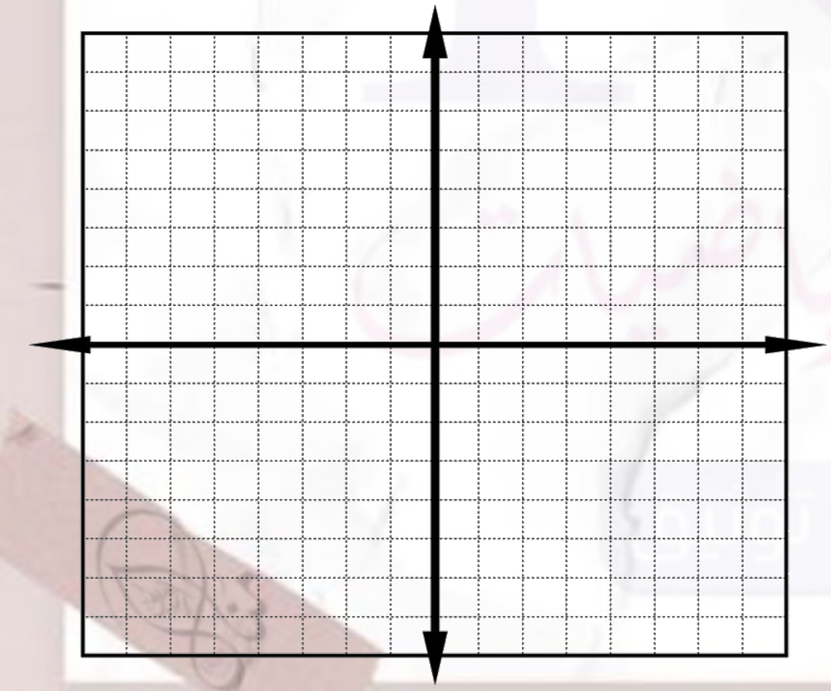
(1A

$-2 \le x \le 6$

$1 \le y \le 5$

$y \le x + 3$

$f(x, y) = -5x + 2y$



إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ مفتوحة وممتدة، فإنها تكون غير محدودة.

مثال

منطقة الحل غير المحدودة

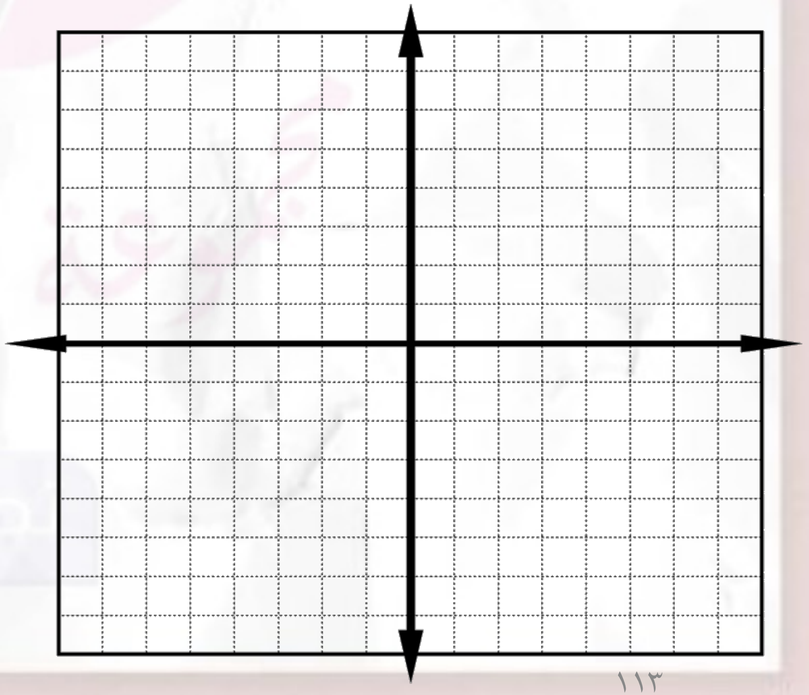
مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا ، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:



تنبيه

القيمة العظمى

لا تفترض عدم وجود قيم عظمى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدّد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.



تحقق من فهمك

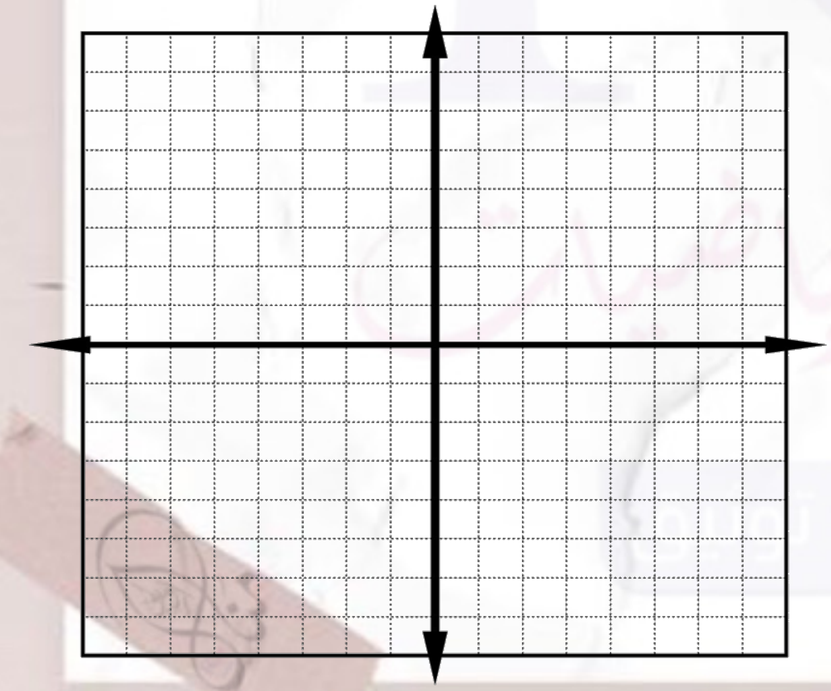
(2A

$y \leq 8$

$y \geq -x + 4$

$y \leq -x + 10$

$f(x, y) = -6x + 8y$



تأكد

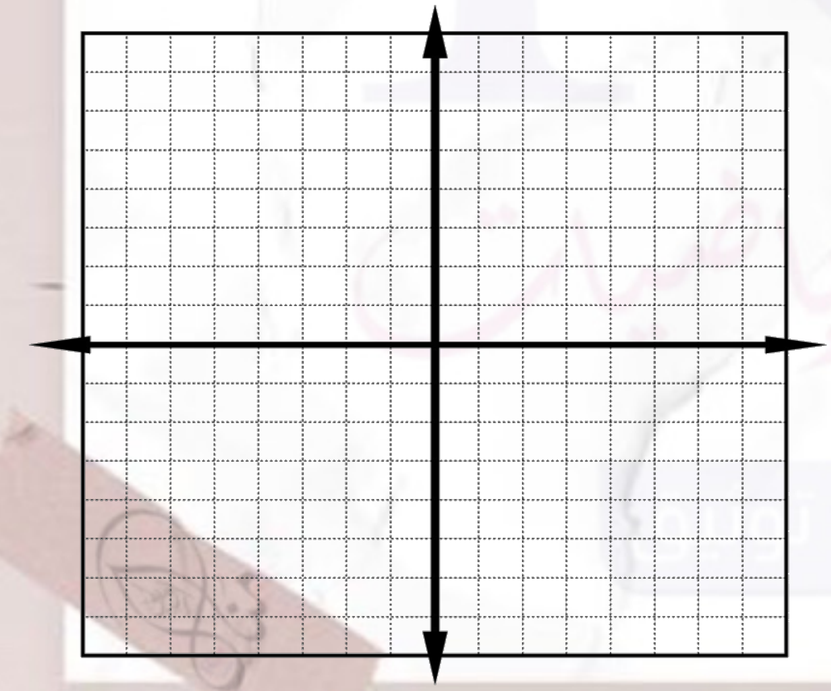
مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة فى هذه المنطقة:

1) $y \leq 5$

$x \leq 4$

$y \geq -x$

$f(x, y) = 5x - 2y$



إيجاد الحل الأمثل: يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكنك الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.

الخطوة 3 مثل نظام المتباينات بيانيًّا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.

الخطوة 6 عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

مثال

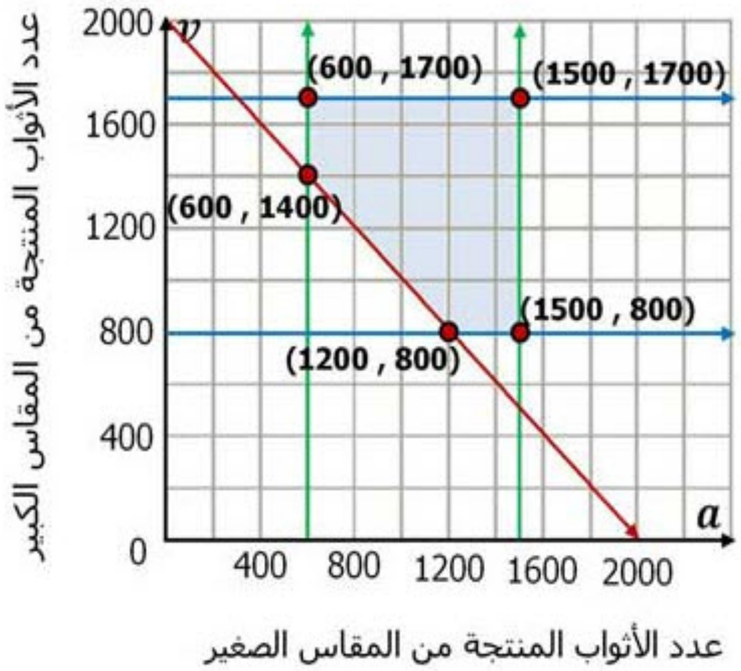
أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي يتطلب إنتاجها من المقاسين، لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالًا
كبير	800	1700	70 ريالًا

الخطوة 1: افرض أن x هي عدد الأثواب المنتجة من المقاس الصغير. y هو عدد الأثواب المنتجة من المقاس الكبير.

الخطوة 2:
$$600 \le x \le 1500$$
$$800 \le y \le 1700$$
$$x + y \ge 20$$

الخطوتان 3 و 4: مثّل نظام المتباينات بيانيًّا كما في الشكل المجاور، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل.



الخطوة 5: الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي:
$$f(x, y) = 55x + 70y$$

الخطوة 6:

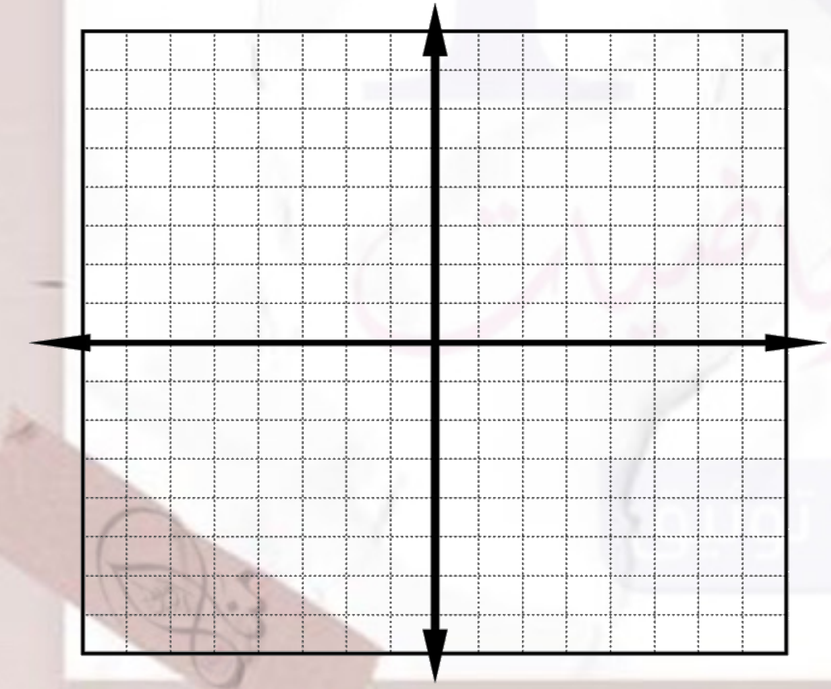
(x, y)	$55x + 70y$	$f(x, y)$	
(600, 1700)	55(600) + 70(1700)	152000	
(600, 1400)	55(600) + 70(1400)	131000	
(1500, 1700)	55(1500) + 70(1700)	201500	← قيمة عظمى
(1500, 800)	55(1500) + 70(800)	138500	
(1200, 800)	55(1200) + 70(800)	122000	← قيمة صغرى

الخطوة 7: يجب إنتاج 1200 ثوبٍ من المقاس الصغير، و 800 ثوبٍ من المقاس الكبير لتكون التكلفة أقل ما يمكن.



تحقق من فهمك

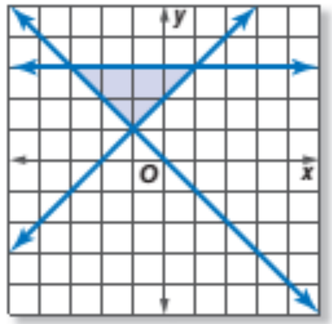
3) **مجوهرات:** تصوغ أسماء من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالًا. وأجرة صياغة السوار 30 ريالًا، وصاغت في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليها صياغتها لتحصل على أكبر أجر؟



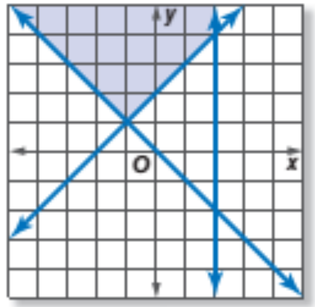
مهارات التفكير العليا

23) حدِّد نظام المتباينات المختلف
عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي.
وضِّح إجابتك.

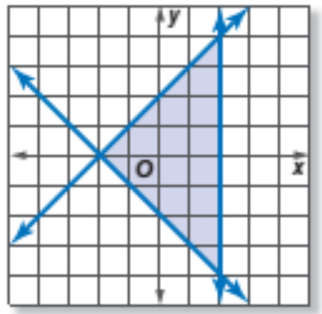
a)



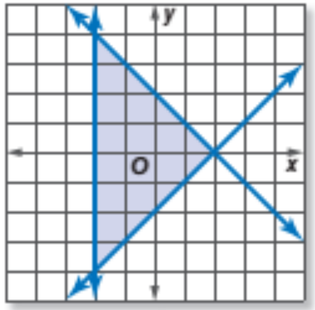
b)



c)



d)



تحصيلي

26) **هندسة :** أيٌّ مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16 \ , \ y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.



الفصل الثاني

المصفوفات

ثق بأن الله ميزك بقدرات تختلف عن غيرك، ومهم أن تثق بنفسك، وتؤمن بقدراتك، ولو قال الناس عنك ما قالوا.

امض قدماً ولا تلتفت



اذا كان اليوم الإربعاء بعد ٥٠ يوم من سيكون ؟

أ)السبت ب) الأحد ج) الجمعة د) الخميس

عنوان الدرس
١-٢

مقدمة في المصفوفات

مجموعة رفعة الرياضيات



- الجنود السعوديين هم رمز للقوة والشجاعة، فادعو الله أن يمنحهم الخير في حياتهم.
- اللهم شدد أزرهم، وقوي من عزيمتهم، وارزقهم الصبر والطمأنينة والهدوء.



والمصفوفة هي تنظيم لمجموعة من الأشياء في صفوف يحتوي كل صف منها على نفس العدد من العناصر ولقد وردت كلمة مصفوفة في قوله تعالى :

(فيها سرر مرفوعة* وأكواب موضوعة،ونمارق مصفوفة)

الغاشية13،14،15

(متكئين على سرر مصفوفة) الطور 20

أما الصف فورد ذكره في أكثر من سورة بالقرآن الكريم نذكر منها :

(وجاء ربك والملك صفاً صفاً) الفجر 22





وفي الاقتصاد تستخدم المصفوفات
كنموذج مفتوح ونموذج مغلق
للعالم ليونتيف لتحديد الأسعار



فيما سبق:

درستُ حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.
(مهارة سابقة)

ما فائدة تنظيم البيانات في جداول



والآن:

- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على عناصر صفوف أو أعمدة مصفوفة لتحليل البيانات.

١ المصفوفة

٢ الحد

٣ الرتبة

٤ مصفوفة الصف

٥ مصفوفة العمود

٦ مصفوفة المربعة

٧ مصفوفة الصفرية

٨ المصفوفات المتساوية

هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

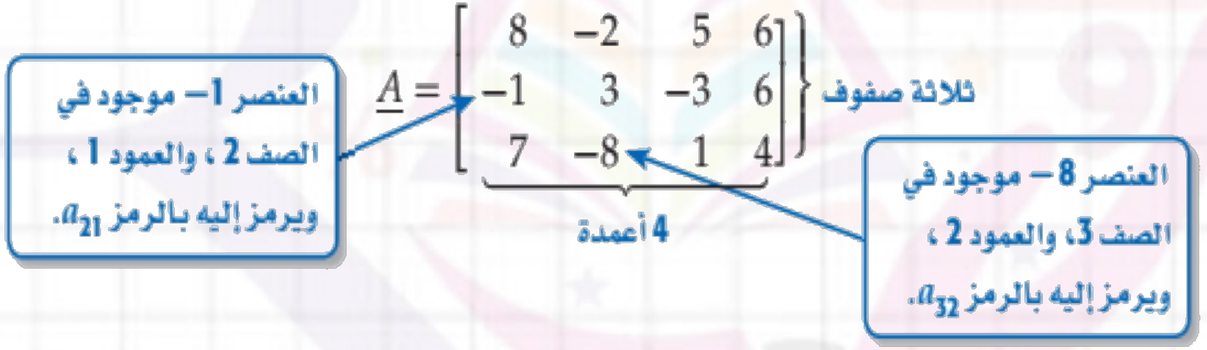
	النوع	سعة الذاكرة	السعر
العرض الأول	a	512	600
العرض الثاني	b	512	500
العرض الثالث	c	256	420
العرض الرابع	d	128	390

كم عدد الصفوف في مصفوفة الهاتف المحمول ؟

كم عدد الأعمدة في مصفوفة الهاتف المحمول ؟

ما العدد الظاهر في الصف الثاني والعمود الثالث ؟

تنظيم البيانات: **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى.
وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال حرف كبير تحته خط مثل $\underline{A}$ و $\underline{B}$.



يمكنك تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًّا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة $\underline{A}$ في الأعلى هي مصفوفة من النوع 4×3 أو من الرتبة 4×3؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{A}$، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{B}$.

رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلٍّ ممّا يأتي:

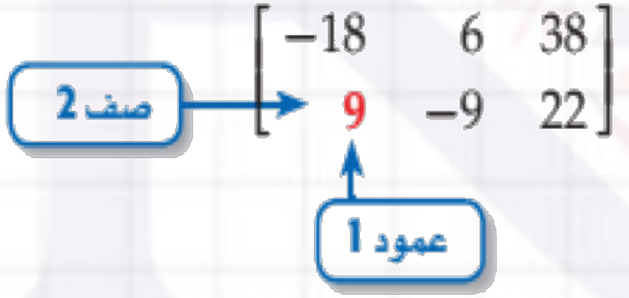
a) حدد رتبة المصفوفة $\underline{A}$.

$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ } صفّان

3 أعمدة

بما أن $\underline{A}$ فيها صفان و3 أعمدة،
فإن رتبتها 3 × 2.

b) ما قيمة العنصر a_{21} ؟



بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2 ،
والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

إستراتيجية الدقيقة الواحدة



$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

1A) ما رتبة $\underline{B}$ ؟

1B) ما قيمة b_{32}؟

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.



بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad [8 \quad -5 \quad 2 \quad 4]$$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

تنظيم البيانات في مصفوفة

كرة قدم: رصد مدرب أحد فرق كرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات الموسم الحالي فكانت على النحو الآتي:

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 قطع تمريرات، 4 أهداف.	ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 قطع تمريرات، 11 هدفاً.	ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 قطع تمريرات، 4 أهداف.

a) نظّم البيانات في مصفوفة A، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًّا حسب عدد التسديدات.

b) حدد رتبة المصفوفة. وما قيمة a_{23}؟

a) الأهداف قطع التمريرات التمريرات التسديدات المباريات

$$\begin{matrix} \text{ماجد} \\ \text{ياسر} \\ \text{معاذ} \end{matrix} \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة؛ لذا فإن رتبة المصفوفة 3×5 وقيمة العنصر a_{23} الموجودة في الصف 2، والعمود 3، هي 20.



تحقق من فهمك

2) بيتزا: يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من البيتزا بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

أسعار البيتزا (بالريال)

	صغيرة	وسط	كبيرة
ثمار البحر	13	24	35
الخضار	12	23	34
الدجاج	14	25	36
اللحم	15	27	37

A) نظّم هذه البيانات في مصفوفة A، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًّا.

B) حدد رتبة المصفوفة.

C) ما قيمة العنصر a_{21}؟

مجموعة رفعة الرياضيات



تحليل البيانات بأستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم، (في مثال 2) استعمال المصفوفة للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة:

	الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
	11	40	170	43	18
	4	30	20	31	20
	4	15	113	24	12

a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3 ، وفسر النتائج.

b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2 ويقسم المجموع على 3 ، فما الناتج؟

c) هل كانت طريقة المدرب في حساب معدل تسديد اللَّاعب في المباراة الواحدة صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى ؟ فسِّر إجابتك.



3) **محافظات:** يبين الجدول المجاور عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

A) نظّم البيانات في مصفوفة .

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف يعطي بيانات ذات معنى؟

عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق مختلفة في المملكة		
المنطقة	محافظة فئة أ	محافظة فئة ب
الرياض	12	8
مكة المكرمة	9	7
المدينة المنورة	4	4
القصيم	5	7

المصدر: المملكة العربية السعودية، حقائق وأرقام، هيئة المساحة الجيولوجية السعودية، 1433 هـ

تأكد

مثال 1 حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

4) a_{32} 5) a_{11} 6) a_{33} 7) a_{24}

8) **زراعة:** يبين الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

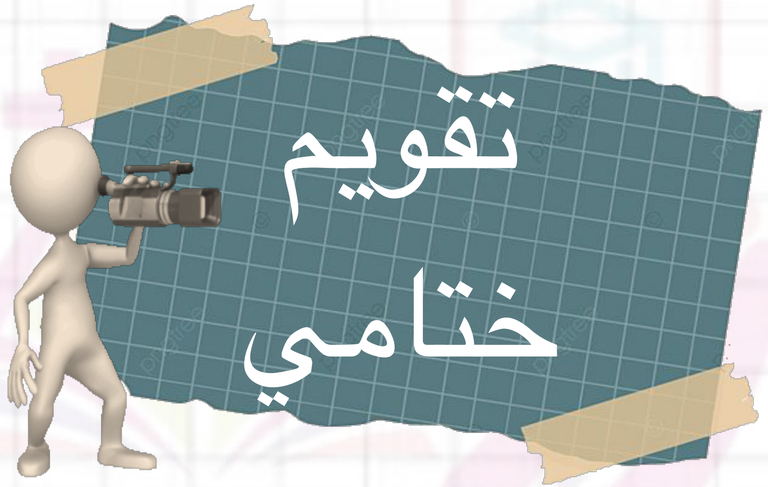
المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

a) نظّم البيانات في مصفوفة.

b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟

c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسِّر إجابتك.

d) اجمع عناصر كل عمود، وفسِّر إجابتك.



ما رتبة المصفوفة: $D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ؟

A 4×2

B 2×4

C 4×8

D 8×4



النقطة التي لا تمثل رأسًا لمنطقة حل النظام:

$x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 6$ هي:

A $(0, 0)$ **C** $(0, 6)$

B $(0, 3)$ **D** $(3, 0)$





س / إذا كان طول قطر الدائرة الكبيرة مثلي قطر الدائرة الصغيرة ، أوجد نسبة مساحة المظلل إلى مجموع مساحتي الدائرتين ؟



(أ) $\frac{1}{5}$

(ب) $\frac{1}{6}$

(ج) $\frac{1}{8}$

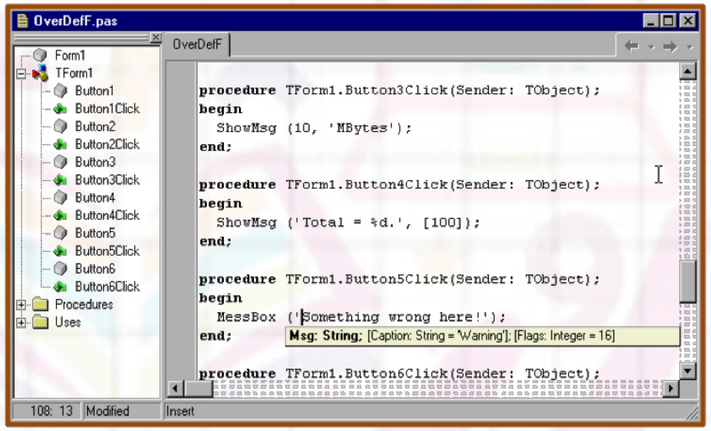
(د) $\frac{1}{10}$

عنوان الدرس
١-٢

العمليات على المصفوفات

مجموعة رفعة الرياضيات

المصفوفات تدخل في
مجال الاتصالات وتقوم
بدور كبير في عملية
التشفير وسرية
المعلومات اعتمادا على
التحويلات الخطية.



تستخدم سلاسل ماركوف في
الأرصاد الجوية و غيرها باحتمال ما
سيكون عليه النظام في حالة معينة
من معرفة الحالة السابقة لها





فيما سبق:

درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات. (الدرس 2-1)

ما فائدة تنظيم البيانات في مصفوفة



والآن:

- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد ثابت.

كيف يتم تحديد رتبة المصفوفة؟

مفردات الدرس

1. جمع مصفوفتين
2. طرح مصفوفتين
3. ضرب المصفوفة في عدد ثابت

مجموعة رفعة الرياضيات

لدى مؤسسة تجارية للمعدات الثقيلة فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض.
وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

جدة

	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	109500	1050
المعرض (2)	135000	1800
المعرض (3)	150500	1800

الشرقية

	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	122000	1700
المعرض (2)	145500	1800
المعرض (3)	160000	1800

الرياض

	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	145000	1900
المعرض (2)	225000	2400
المعرض (3)	290000	2700

ما معدل النفقات اليومي للمعرض 2 في المنطقة الشرقية ؟

ما موقع معدل النفقات اليومية للمعرض الأول في كل مصفوفة ؟

كيف يمكن أن تجدي إجمالي المبيعات اليومية للمعارض 2 للشركة في جميع المناطق ؟



إرشادات للدراسة

إذا كان $\underline{A}+\underline{B}=\underline{C}$

فإن $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

جمع المصفوفات وطرحها: يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جمع المصفوفات وطرحها

التعبير اللفظي: إذا كانت $\underline{A}, \underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $\underline{A}+\underline{B}$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في $\underline{A}$ و $\underline{B}$، وكذلك $\underline{A}-\underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز: لتكن: $\underline{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

فإن: $\underline{A}+\underline{B}=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \underline{A}-\underline{B}=\begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

مثال: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$

٦ إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

a $A + B$

$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ عوّض

$= \begin{bmatrix} 16 + (-4) & 2 + (-1) \\ -9 + (-3) & 8 + (-7) \end{bmatrix}$ اجمع العناصر المتناظرة

$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ بسّط

b $\underline{B} - \underline{C}$

$\underline{B} - \underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ عوّض

بما أن المصفوفتين $\underline{C}, \underline{B}$ لهما رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $\underline{B} - \underline{C}$.



تحقق من فهمك

(1A $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

(1B $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات

الضرب في عدد ثابت: يمكنك ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **ضرب المصفوفة في عدد ثابت**.

مفهوم أساسي

الضرب في عدد ثابت

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة $k\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $\underline{A}$ مضروبًا في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وَ k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot \underline{A} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

إذا كان $k\underline{A} = \underline{B}$

فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$



ضرب مصفوفة في عدد ثابت

إذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$ ، فجد $5\underline{R}$.

$5\underline{R} = 5\begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$ عوّض

$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$ اضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد 5

$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$ بسّط



إستراتيجية الدقيقة الواحدة

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 8 \\ 9 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$، فأوجد $-4\underline{T}$

مجموعة رفعة الرياضيات

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات.وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص جمع المصفوفات

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k:

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات $\underline{A}+\underline{B}=\underline{B}+\underline{A}$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=\underline{A}+(\underline{B}+\underline{C})$

خاصية التوزيع للضرب في عدد $k(\underline{A}+\underline{B})=k\underline{A}+k\underline{B}$



إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4\underline{B} - 3\underline{A}$.

عوّض $-4\underline{B} - 3\underline{A} = -4\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

أوجد ناتج ضرب المصفوفات في الثوابت $= \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$

بسّط $= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$

اطرح العناصر المتناظرة $= \begin{bmatrix} 16 - (-27) & 32 - 36 \\ -8 - 6 & 12 - (-18) \end{bmatrix}$

بسّط $= \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$



تحقق من فهمك

3) إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-6\underline{B} + 7\underline{A}$

مثال 1 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مثال 3 إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $\underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج كلٍّ مما يلي:

7) $4\underline{B} - 2\underline{A}$

8) $-8\underline{C} + 3\underline{A}$

1) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

فما قيمة $2\underline{A} + 3\underline{B}$ ؟

A $\begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} -5 & 15 & 30 \\ 15 & 25 & 15 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 15 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

لاتتوقفي عن الحلم حتى لو
اخبرك من حولك ان حلمك
اصبح مستحيلاً

29) **تبرير:** حدِّد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ ، ثم فسِّر إجابتك.

a) إذا كانت $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة ، فإن $\underline{A} - \underline{B}$ معرّفة.

b) إذا كان k عددًا حقيقيًّا ، فإن $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرّفتان.

c) إذا كانت $\underline{A} - \underline{B}$ غير معرّفة ، فإن $\underline{B} - \underline{A}$ غير معرّفة.

d) إذا كانت $\underline{A}$ وَ $\underline{B}$ لهما عدد العناصر نفسه ، فإن $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة.

e) إذا كانت $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرفتين، فإن $k\underline{A} + k\underline{B}$ معرّفة.

مجموعة رفعة الرياضيات



رتبة المصفوفة : إذا كانت $\underline{B}$, $\underline{A}$ مصفوفتين من الرتبة 3×5 ، فإن رتبة المصفوفة $\underline{B} - \underline{A}$ هي:

A 3×5 **C** 3×2

B 5×3 **D** 3×3





سيارة تستغرق ٢٤٠ دقيقة لقطع مسافة ما , كم تكون سرعة السيارة بالكليو متر / ساعة إذا كانت المسافة المقطوعة ٣٦٠ كم ؟

أ) ٧٠ كم/س ب) ٧٥ كم/س ج) ٨٠كم/س د) ٩٠ كم/س

مجموعة رفعة الرياضيات



ضرب المصفوفات

مجموعة رفعة الرياضيات

وَعُرِضُوا عَلَىٰ رَبِّكَ صَفًّا لَّقَدْ جِئْتُمُونَا كَمَا خَلَقْنَاكُمْ أَوَّلَ مَرَّةٍۚ بَلْ زَعَمْتُمْ أَلَّن نَّجْعَلَ لَكُم مَّوْعِدًا (48)

فِيهَا سُرُرٌ مَرْفُوعَةٌ (13) وَأَكْوَابٌ مَوْضُوعَةٌ (14) وَنَمَارِقُ مَصْفُوفَةٌ



وفي الاقتصاد تستخدم المصفوفات
كنموذج مفتوح ونموذج مغلق
للعالم ليونتيف لتحديد الأسعار



فيما سبق:

درستُ ضرب المصفوفات في عدد ثابت. (الدرس 2-2)

كيف تتم عملية ضرب مصفوفة في عدد ثابت؟



والآن:

- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

ما هو الشرط الواجب توفره لتكون عملية جمع أو طرح المصفوفات ممكنة ؟

لماذا؟

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام B، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة P.

مصفوفة عدد الأقلام B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأسعار P

الحبر الجاف	الحبر السائل	قلم الرصاص
2	3	1

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

كم سعر الأقلام التي تم بيعها في شهر صفر ؟

كم سعر أقلام الحبر الجاف التي تم بيعها في شهر ربيع1 ؟

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة $\underline{A}$ ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة $\underline{B}$ ذات الرتبة $r \times t$ ، فإن الناتج هو المصفوفة $\underline{A}\underline{B}$ ذات الرتبة $m \times t$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{A}\underline{B}$$

$$m \times r \qquad r \times t \qquad m \times t$$

متساويان

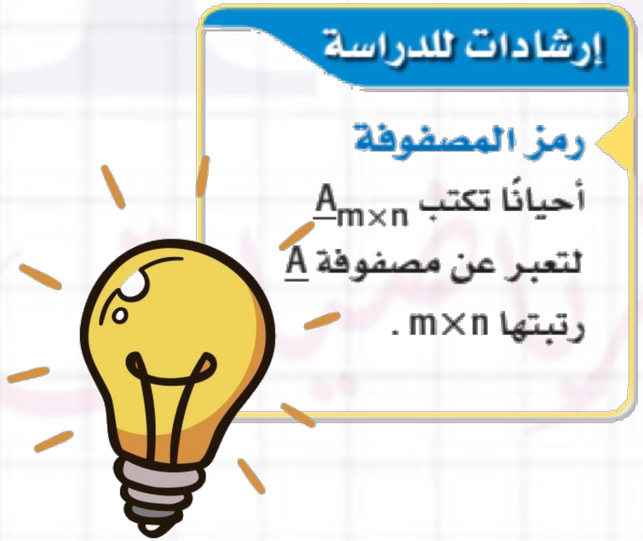
رتبة AB

رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $\underline{B} \cdot \underline{A}$ في كلٍّ مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

(a $\underline{A}_{3 \times 4} \cdot \underline{B}_{4 \times 2}$

(b $\underline{A}_{5 \times 3} \cdot \underline{B}_{5 \times 4}$



إرشادات للدراسة

رمز المصفوفة

أحيانًا تكتب $\underline{A}_{m \times n}$ لتعبر عن مصفوفة $\underline{A}$ رتبتها $m \times n$.

إستراتيجية الدقيقة الواحدة



تحقق من فهمك

(1A $\underline{A}_{4 \times 6} \cdot \underline{B}_{6 \times 2}$

(1B $\underline{A}_{3 \times 2} \cdot \underline{B}_{3 \times 2}$

مجموعة رفعة الرياضيات

مهما تعددت مرات سقوطك ، قف
مجددا ولا تستسلم ، وأعلم بإن الفشل
يستطيع التحول إلى نجاح بالعزيمة
والإصرار



اختيار من متعدد : إذا كانت المصفوفة $\underline{XY}$ من النوع 2×3 ، والمصفوفة $\underline{X}$ من النوع 3×4، فما رتبة المصفوفة $\underline{Y}$؟

A 2×3

B 3×2

C 3×4

D 4×2

مجموعة رفعة الرياضيات

يمكنك إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب المصفوفات

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة $\underline{AB}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة $\underline{A}$، بعناصر العمود r من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

الرموز:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

مثال:

أوجد XY إذا كانت $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{X} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$

$$\underline{X}\,\underline{Y} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

مجموعة رفعة الرياضيات



تحقق من فهمك

2) إذا كانت $V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، $U = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد UV .

مجموعة رفعة الرياضيات

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

سباحة: **في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لمن يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.**

اكتب كلًّا من النتائج والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين، ورتب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة النتائج.

النتائج

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

النقاط

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين. $\underline{RP}$

$$\underline{RP} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7) + 7(4) + 3(2) \\ 8(7) + 9(4) + 1(2) \\ 10(7) + 5(4) + 3(2) \\ 3(7) + 3(4) + 6(2) \end{bmatrix}$$

تبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كلٌّ من الفرق A, B, C, D على الترتيب؛ لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.



تحقق من فهمك

3) **مبيعات:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

مصفوفة عدد الأقلام B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأسعار P

الحبر الجاف	الحبر السائل	قلم الرصاص
2	3	1

حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $\underline{A}_{2\times 4}\cdot\underline{B}_{4\times 3}$

2) $\underline{C}_{5\times 4}\cdot\underline{D}_{5\times 4}$

3) $\underline{E}_{8\times 6}\cdot\underline{F}_{6\times 10}$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$، ولأي عدد k، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٌّ منها معرفتين:

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات $(\underline{A}\underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\underline{C})$

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد $k(\underline{A}\underline{B}) = (k\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(k\underline{B})$

خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات $\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{C}\underline{A} + \underline{C}\underline{B}$

خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات $(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\underline{C} + \underline{B}\underline{C}$

مجموعة رفعة الرياضيات

خصائص ضرب المصفوفات: تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.



اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $\underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{G}\underline{H}$

b) $\underline{H}\underline{G}$

استراتيجية تعاقب الأدوار



تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\underline{B}=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ ، $\underline{A}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{A}\,\underline{B}=\underline{B}\,\underline{A}$ ؟

مجموعة رفعة الرياضيات



اختبار خاصية التوزيع

إذا كانت $\underline{L}=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ ، $\underline{K}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ ، $\underline{J}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -5 & -2\end{bmatrix}$ ، فجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{J}\,(\underline{K}+\underline{L})$

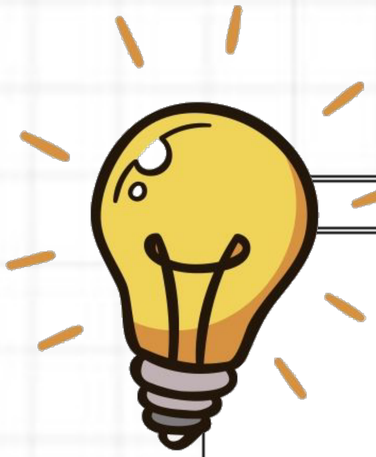
b) $\underline{J}\underline{K}+\underline{J}\underline{L}$



تحقق من فهمك

5) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$، $\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$، $\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$، فحدِّد ما إذا كانت المعادلة $(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \underline{S}\underline{R} + \underline{T}\underline{R}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا.

مجموعة رفعة الرياضيات



بطاقة خروج	درس : ضرب المصفوفات	اسم الطالبة :

اختيار من متعدد : ناتج الضرب :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot [-2 \quad 0 \quad 4]$$ يساوي:

A $[8 \quad -12]$

B $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

D عملية الضرب غير معرّفة

مجموعة رفعة الرياضيات



43) تبرير: إذا كانت رتبة المصفوفة $\underline{AB}$ هي 5×8 ، ورتبة المصفوفة $\underline{A}$ هي 5×6 ، فما رتبة المصفوفة $\underline{B}$؟

مجموعة رفعة الرياضيات



أوجد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [\,1 \quad 3\,]$ ، إذا كان ذلك ممكنًا.

A $[\,-3\,]$

B $[\,11\,]$

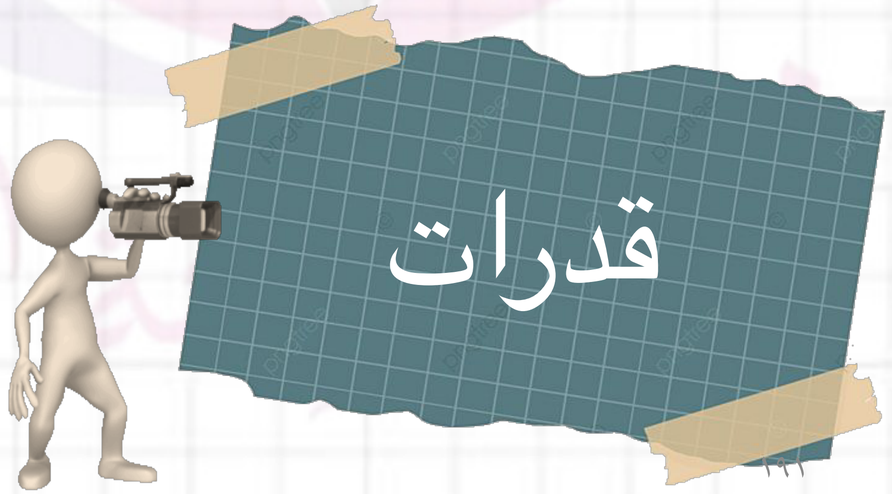
C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

D الضرب غير معرف



إذا نسبة الرمل إلى الماء إلى الإسمنت في خلطة ٥ : ٣ : ٤ على التوالي فإذا كان وزن الخلطة ٢٤٠ كجم كم وزن الماء ؟

أ) ٢٠٠ كم　　ب) ٨٠ كم　　ج) ١٠٠ كم　　د) ٦٠كم



عنوان الدرس

المحددات وقاعدة كرامر

مجموعة رفعة الرياضيات



فيما سبق:

درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًا.

عددي طرق حل نظام معادلتين خطيتين جبريا؟



والآن:

- أحسب المحدِّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

مفردات الدرس

المحدِّدة	determinant
محدِّدة الدرجة الثانية	second-order determinant
محدِّدة الدرجة الثالثة	third-order determinant
قاعدة الأقطار	diagonal rule
مصفوفة المعاملات	coefficient matrix
قاعدة كرامر	Cramer's Rule



قال تعالى :(مَّثَلُ الَّذِينَ يُنفِقُونَ
أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ
أَنبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِي كُلِّ سُنبُلَةٍ
مِّائَةُ حَبَّةٍ ۗ وَاللَّهُ يُضَاعِفُ لِمَن يَشَاءُ ۗ
وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ) (261)

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدَّد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدِّدات لمعرفة مساحتها.



ما الطريقة التي تعرفينها لحساب مساحة المثلث ؟

لماذا يصعب استعمال الصيغة السابقة في هذه الحالة ؟

المحدِّدات: كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدِّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

محدِّدة الدرجة الثانية

التعبيراللفظي: يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

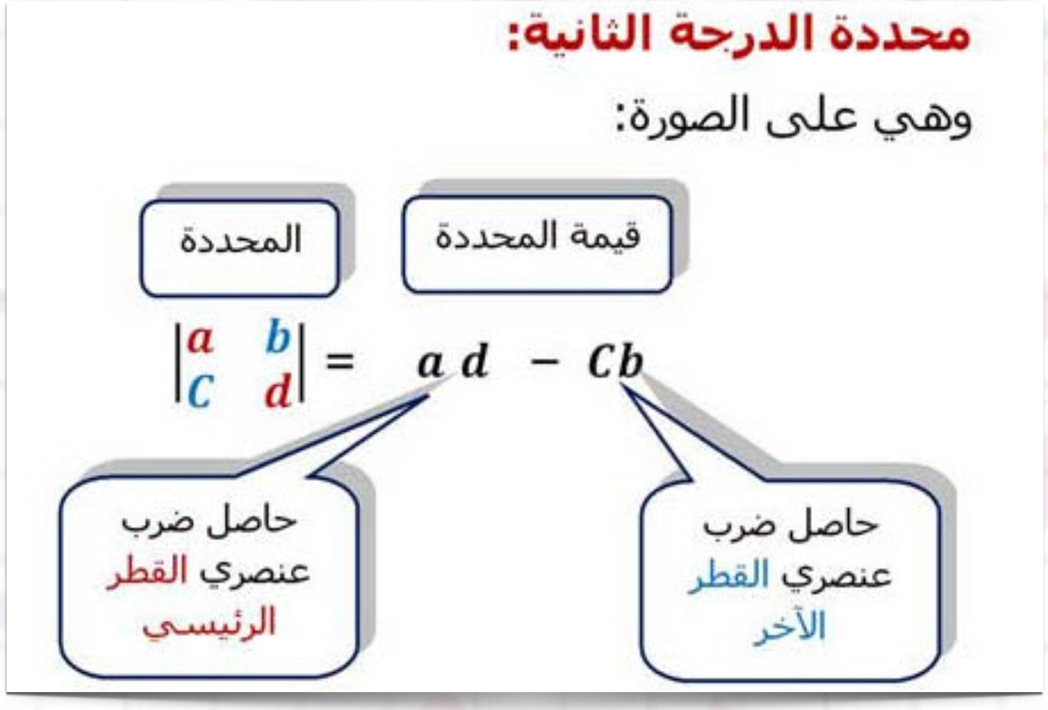
بالرمـــوز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

القطر الرئيس

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

محددة الدرجة الثانية:

وهي على الصورة:





قراءة الرياضيات

المحدِّدات:

يرمز لمحدِّدة المصفوفة A بالرمز $|A|$

أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -11 & 4 \end{vmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات



إستراتيجية الدقيقة الواحدة

تحقق من فهمك

(1A $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

(1B $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

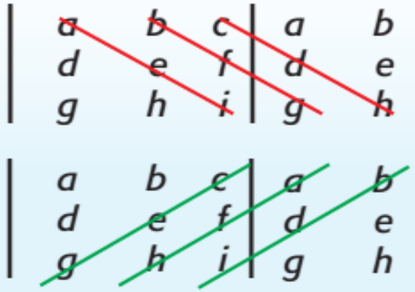
تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حساب محدِّدة المصفوفة 3×3

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار



خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

تحقق من فهمك



(2A) $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات



تحقق من فهمك

(2B

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

مجموعة رفعة الرياضيات



إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

تستعمل المحدِّدات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

مفهوم أساسي

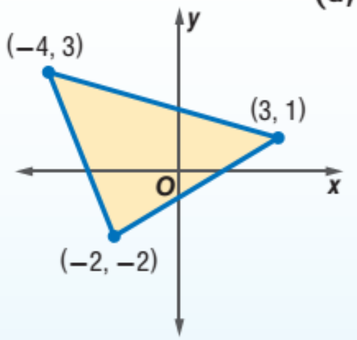
أضف إلى مطويتك

مساحة المثلث

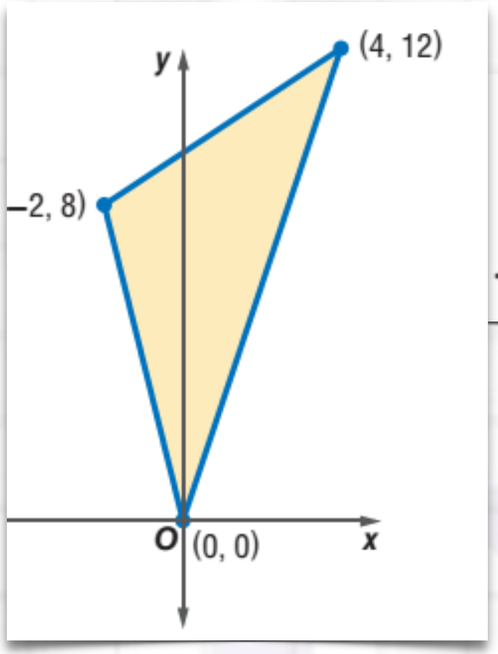
التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A ، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$



عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحدِّدات لإيجاد مساحة الإقليم.



إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.



تحقق من فهمك

3) **خرائط:** يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: (11, 9), (6, 4), (3, 15)، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة 0.5km. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

مجموعة رفعة الرياضيات



النقاط $D(-6, 2), E(3, 5), F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$، احسب مساحة هذا المثلث:

A 54.5 وحدة مربعة.

B 58 وحدة مربعة.

C 60 وحدة مربعة.

D 61.5 وحدة مربعة.

مجموعة رفعة الرياضيات

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مجموعة رفعة الرياضيات

إرشادات للدراسة

المحدِّدات

تستعمل المحدِّدات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

قاعدة كرامر

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من معادلتين خطيتين.

$$ax + by = m$$
$$fx + gy = n$$

مصفوفة المعاملات

$$c = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$$

$c \neq 0$

للنظام حل وحيد

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{c}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{c}$$



المستقيمان متقاطعان

$c = 0$

للنظام عدد لانهائي من الحلول

$$\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix} = 0$$



المستقيمان منطبقين

ليس للنظام حل
$\emptyset$

$$\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix} \neq 0$$



المستقيمان متوازيين

أحمد صالح الديني
www.d-math.com

تحقق من فهمك

(4A

$$7x + 3y = 37$$
$$-5x - 7y = -41$$





تحقق من فهمك

$$8x - 5y = 70 \quad \textbf{(4B}$$
$$9x + 7y = 3$$

مجموعة رفعة الرياضيات

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + \ell z &= p \end{aligned}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مجموعة رفعة الرياضيات

تحقق من فهمك



(5A

$$3x + 5y + 2z = -7$$

$$-4x + 3y - 5z = -19$$

$$5x + 4y - 7z = -15$$

مجموعة رفعة الرياضيات

استراتيجية الجيسكو



تحقق من فهمك

(5B

$$6x + 5y + 2z = -1$$
$$-x + 3y + 7z = 12$$
$$5x - 7y - 3z = -52$$

مجموعة رفعة الرياضيات

أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

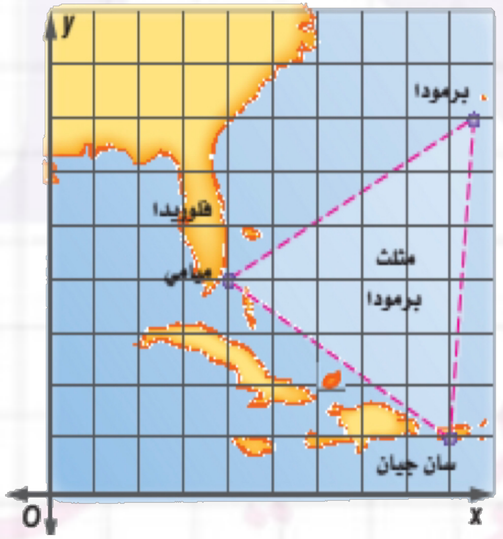
2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

11) **جغرافيا:** استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:



a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.

مهما تعددت مرات سقوطك ، قف
مجددا ولا تستسلم ، وأعلم بإن الفشل
يستطيع التحول إلى نجاح بالعزيمة
والإصرار





33) **مسألة مفتوحة :** أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

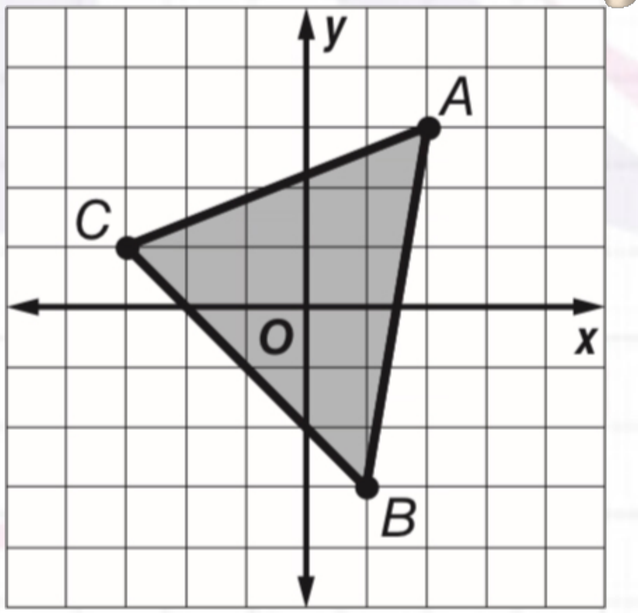
a) المحدِّدة تساوي صفرًا.

b) المحدِّدة تساوي 25

c) جميع العناصر أعداد سالبة والمحدِّدة تساوي -32

مجموعة رفعة الرياضيات





36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.

A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة



ابتسموا ولا تحمّلوا الصباح وِزرَ أوجاع الامس

فالصباح بداية ولتكُن البدايات دائماً أجمل.



خمسة أعداد المنوال لهم ٤ والوسيط ٦ والمدى ٥ فأوجدي قيمة أكبر عدد ؟

أ) ٩ ب) ٧ ج) ٦ د) ٤

مجموعة رفعة الرياضيات

عنوان الدرس

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

مجموعة رفعة الرياضيات

المصفوفات
في حياتنا

المصفوفات في حياتنا

مجموعة رفعة الرياضيات

عددي طرق حل نظام معادلتين خطيتين جبريا؟

ما هي المصفوفة المحايدة في عملية الجمع ؟

كيف يتم إيجاد النظير الجمعي و الضربي لعدد حقيقي ؟



فيما سبق:

درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا. (مهارة سابقة)



والآن:

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها .

- مصفوفة الوحدة
- مصفوفة التغير
- النظير الضربي للمصفوفة
- مصفوفة الثوابت
- المعادلة الصفية
- مصفوفة المعاملات

لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

ما الذي تم التعبير عنه بالعدد3 في المصفوفة الأولى؟

ما رتبة مصفوفة ناتج الضرب؟

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان $\underline{B}$,$\underline{A}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$ ، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \underline{I}$

التحقق من النظير الضربي

حدّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

(a $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

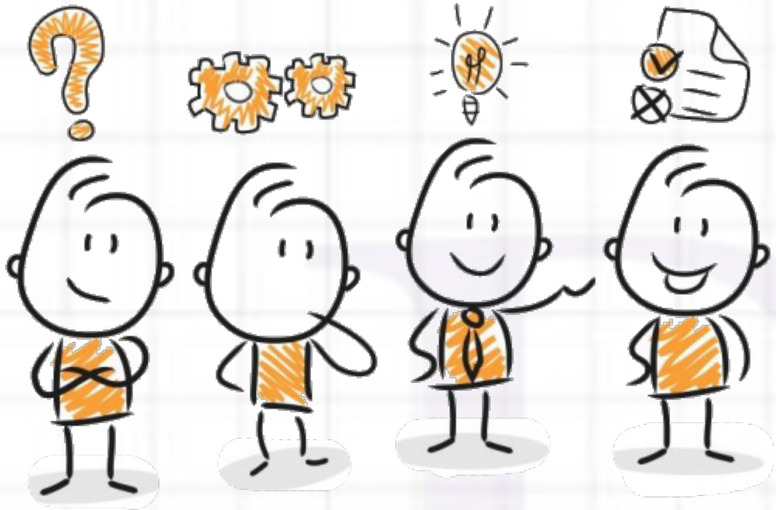
إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.



مجموعة رفعة الرياضيات



تحقق من فهمك

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$ (1

مجموعة رفعة الرياضيات

يمكنك استعمال المحدِّدات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدِّدة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.



إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب A^{-1} .



مجموعة رفعة الرياضيات



إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(a $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات

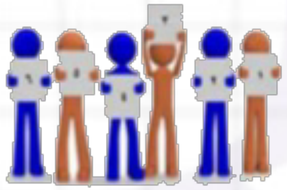


مجموعة رفعة الرياضيات

الرؤوس المرقمة







$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$ (2B



$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$ (2A

مجموعة رفعة الرياضيات



مجموعة رفعة الرياضيات

تأكـد

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

2) $\underline{F}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \underline{G}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

3) $\begin{bmatrix}6 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}$



مجموعة رفعة الرياضيات



إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

مصفوفة المتغيرات
المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة الثوابت
الثوابت في النظام فقط



مجموعة رفعة الرياضيات

المعادلات المصفوفية:

لحل المعادلات الخطية ذات المجهولين باستخدام قاعدة النظير الضربي نتبع الخطوات التالية:

1) نكتب الصورة العامة للمعادلة الخطية.

$$ax + by = m$$
$$fx + gy = n$$

2) نحول المعادلة السابقة إلى 3 مصفوفات.

مصفوفة

B الثوابت	X المتغيرات	A المعاملات
$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

3) نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات (A^{-1}).

4) نوجد قيم x و y من المعادلة المصفوفية التالية.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مثال1: استعمل المعادلة المصفوفية لحل النظام التالي:

$$x + 2y = 9$$
$$3x - 6y = 3$$



مجموعة رفعة الرياضيات



مجموعة رفعة الرياضيات



29) **تبرير:** حدِّد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسِّر إجابتك.

"المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

مجموعة رفعة الرياضيات

إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي ،

فإن قيمة x تساوي:

A $\frac{4}{3}$

B $\frac{4}{5}$

C $-\frac{4}{3}$

D $-\frac{4}{5}$



أوجد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [\ 1 \quad 3\ ]$ ، إذا كان ذلك ممكنًا.

A $[\ -3\ ]$

C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

B $[\ 11\ ]$

D الضرب غير معرف

مجموعة رفعة الرياضيات



الفصل الثالث

تكييرات الحدود ودوالها

قدرات



قيمة المقدار ١٠٠ ٢ ـ ٩٩ ٢ = ...

أ) ١٩٨. ب) ١٩٩.

ج) ٢٠٠. د) ١٠٩

أوجدي ناتج : ٢٢٥ ٢ ـ ١٥,٥ ٢ = ...

أ) ٤٠٠. ب) ٤١٠.

ج) ٥١. د) ٥١٠

@manal_joory



الأعداد المركبة

@manal_joory

أهداف الدرس



فيما سبق :

درستُ تبسيط الجذور التربيعية.

(مهارة سابقة)



والآن :

- أُجري العمليات على الأعداد التخيُّلية البحتة.
- أُجري العمليات على الأعداد المركبة.

@manal_joory

مفردات الدرس



الوحدة التخيُّلية

imaginary unit



العدد التخيُّلي البحت

pure imaginary number



العدد المركب

complex number



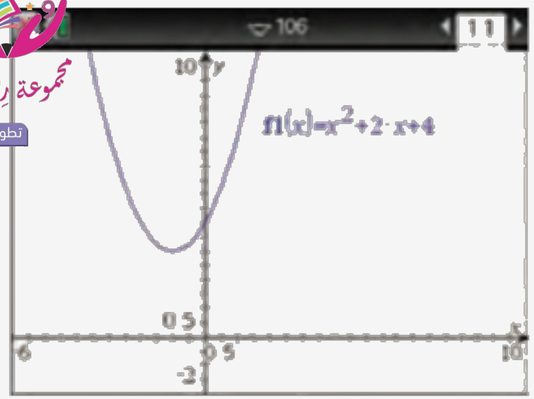
المركبان المترافقان

complex conjugates

@manal_joory

لماذا ؟

بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لايقطع المحور x، لذا ليس للمعادلة جذور حقيقية، فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟



[−6, 10] scl: 0.5 by [−2, 10] scl: 0.5

للتأكد من ذلك استعمل الآلة الحاسبة بالضغط على مفتاح (on)، ومنها اختر 1 مستند جديد ثم اختر 1:إضافة تطبيق الحاسبة ثم اضغط (menu) واختر منها

3: العمليات الجبرية | 3: ادوات كثيرات الحدود | 2: الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود



ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط (enter) (enter) فيظهر على الشاشة كلمة **خطأ**، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيُّلية.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الأعداد التخيلية البحتة: قادت المعادلات "كالمعادلة السابقة" الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، ووحدتها التخيلية i ، حيث تعرف **الوحدة التخيُّلية** i على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن $i = \sqrt{-1}$ ، وهذا يعني أن $i^2 = -1$

والأعداد في الصورة $i\sqrt{3}\ ,\ -2i\ ,\ 6i$، تسمى **أعدادًا تخيُّلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن: $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1} = bi$.

@manal_joory



مثال

1A) $\sqrt{-18}$

1B) $\sqrt{-125}$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

1) $\sqrt{-81}$

2) $\sqrt{-32}$

@manal_joory



ضرب الأعداد التخيلية البحتة

تحقق من فهمك

(2A $3i \cdot 4i$

(2B $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$

(2C i^{31}

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة



تحقق من فهمك

(3A $4x^2 + 100 = 0$

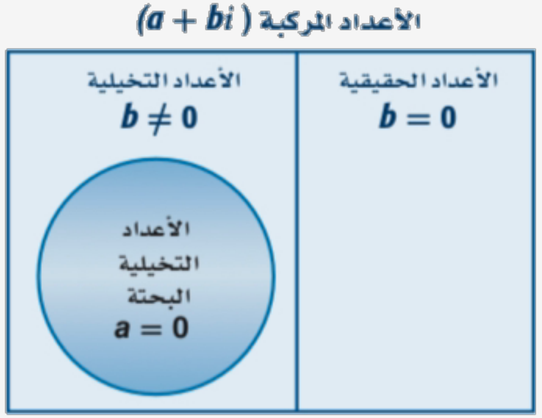
(3B $x^2 + 4 = 0$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

العمليات على الأعداد المركبة

يوضِّح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًّا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

@manal_joory

تساوي الأعداد المركبة



تحقق من فهمك

4) أوجد قيمتي y ، x الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x+1+(3+2y)i = 2x-2+(y-6)i$ صحيحة.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

جمع الأعداد المركّبة وطرحها



أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

تحقق من فهمك

(5A $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$

(5B $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

@manal_joory



تأكد

11 $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

12 $(7 + 4i) - (1 + 2i)$

@manal_joory

الربط مع الحياة

مصابيح الزينة من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا لى شدة الإضاءة.

المصدر: كتاب الفيزياء المقر للصف الثالث الثانوي، 1437 هـ





ضرب الأعداد المركبة

تحقق من فهمك

6) كهرباء: أوجد فرق الجهد لتيار متناوب شدته $4i - 2$ أمبير، ومعاوقته $2i - 3$ أوم.

@manal_joory



تأكد

13 $(6-8i)(9+2i)$

14 $(3+2i)(-2+4i)$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

قسمة الأعداد المركبة



تحقق من فهمك

(7A $\frac{-2i}{3+5i}$

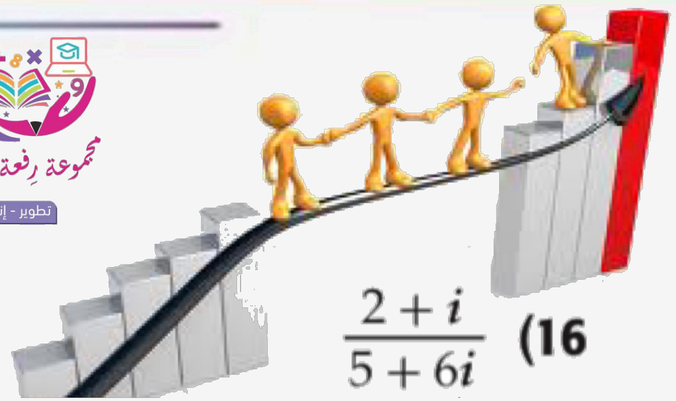
(7B $\frac{2+i}{1-i}$

@manal_joory

تأكد

15) $\frac{3-i}{4+2i}$

16) $\frac{2+i}{5+6i}$



مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا

58) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك:

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي"

59) **مسألة مفتوحة:** اكتب عددين مركّبين يكون ناتج ضربهما يساوي 20.

@manal_joory



تدريب على اختبار

61) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5 + 4i) - (x+yi) = (-1-3i)$ صحيحة؟

A) $x = 6, y = 7$

B) $x = 4, y = i$

C) $x = 4, y = i$

D) $x = 4, y = 7$

62) قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي:

A) $36 - 27i$

B) $9 + 36$

C) $9 - 36$

D) $-27 + 36i$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق





حتىٰ في أعز خساراتك "ثق بقدراتك"

قف من جديد وكل طريقك أنت الأقوىٰ

@manal_joory

قدرات



القيمة الأولى	القيمة الثانية
$\sqrt{٣}^{٢}$	$\sqrt{٢}^{٣}$

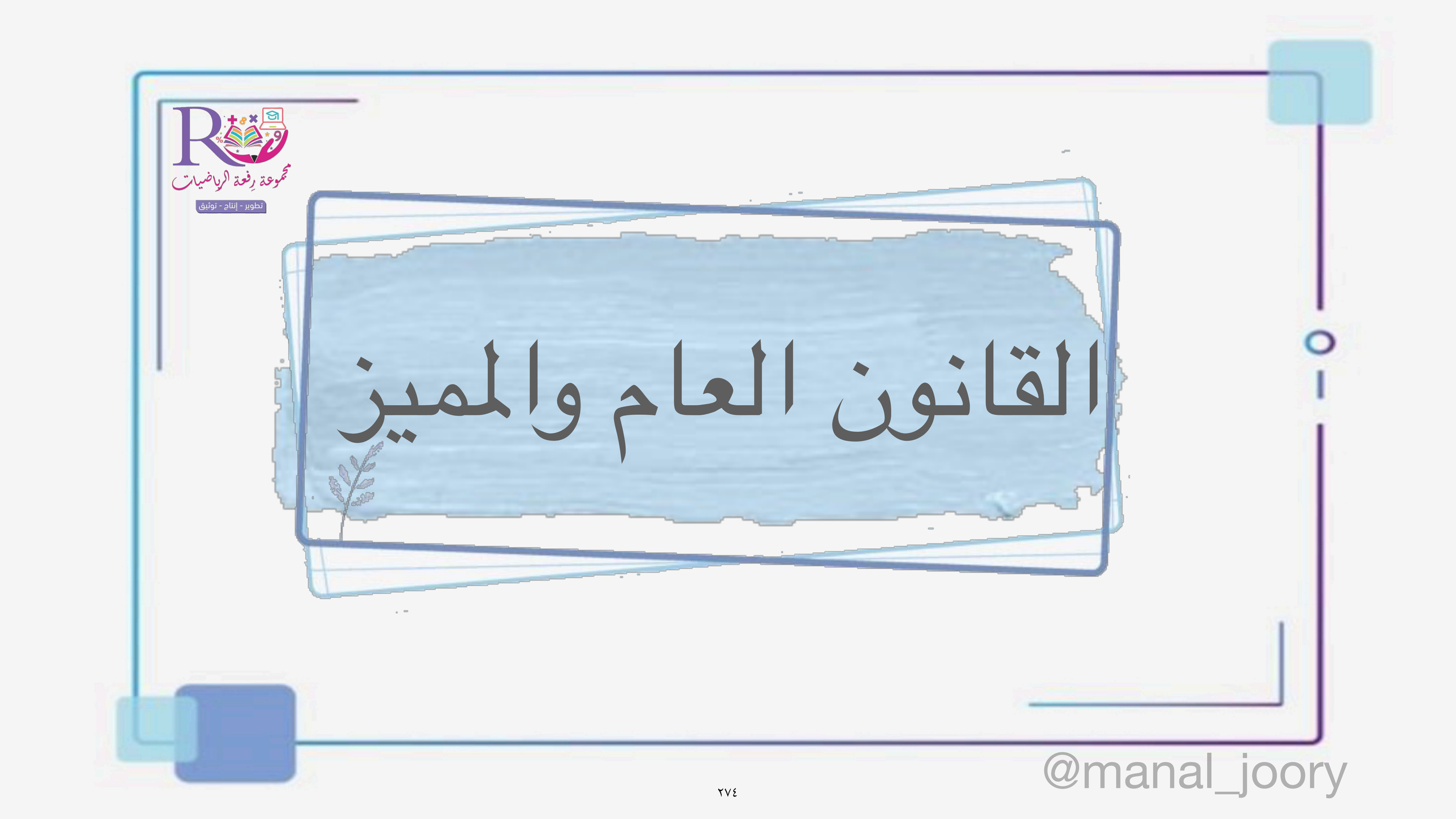
أ) القيمة الأولى أكبر من الثانية

ب) القيمة الثانية أكبر من الأولى

ج) القيمتان متساويتان

د) المعلومات غير كافية

@manal_joory


مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
القانون العام والمميز
@manal_joory

أهداف الدرس



فيما سبق:

درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

(مهارة سابقة)



والآن:

- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفردات الدرس



القانون العام

Quadratic Formula



المميز

discriminant

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

أُطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$$h = -4.9t^2 + 117t + 42$$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0.$$

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.



@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

القانون العام: تمكنت سابقًا من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي، أو بإكمال المربع، أو باستعمال القانون العام؛ وهو قانون يمكن استعماله لحل أية معادلة تربيعية، ويمكن اشتقاق هذا القانون من خلال حل معادلة تربيعية على الصورة القياسية.

الحالة العامة

معادلة تربيعية على الصورة القياسية	$ax^2 + bx + c = 0$
اقسم كلا الطرفين على a	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
اطرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
أكمل المربع	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
حلّل الطرف الأيسر	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
بسّط الطرف الأيمن	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
خاصية الجذر التربيعي	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
اطرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بسّط	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

@manal_joory



تحقق من فهمك

معادلة لها جذران نسبيان

حل المعادلة: باستعمال القانون العام.

(1A $x^2 + 6x = 16$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



حل المعادلة: باستعمال القانون العام.

6) $22x = 12x^2 + 6$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك



حل المعادلة: باستعمال القانون العام.

(2A $x^2 - 16x + 64 = 0$



تاريخ الرياضيات

براهام جوبتا

(598-668 م) عالم رياضيات هندي، وهو أول من أوجد حلًا عامًا للمعادلة التربيعية في الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمَّى الآن القانون العام لحل المعادلة التربيعية.



@manal_joory



تحقق من فهمك

حل المعادلة: باستعمال القانون العام.

(2B $x^2 + 34x + 289 = 0$

@manal_joory

الجذور غير النسبية

تحقق من فهمك



حل المعادلة: باستعمال القانون العام.

(3A $3x^2 + 5x + 1 = 0$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك



حل المعادلة: باستعمال القانون العام.

(3B $x^2 - 8x + 9 = 0$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

تحقق من فهمك



حل المعادلة: باستعمال القانون العام.

(4A $3x^2 + 5x + 4 = 0$

@manal_joory






تأكد

حل المعادلة: باستعمال القانون العام.

(4B $x^2 - 4x \equiv -13$

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية، لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. العبارة $b^2 - 4ac$ تسمى **المميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{المميز}$$

ويمكنك استعمال المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية وأنواعها، والجدول في الصفحة الآتية يلخص الأنواع الممكنة للجذور، وذلك للتأكد من صحة حلك.

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إرشادات للدراسة

الجذور

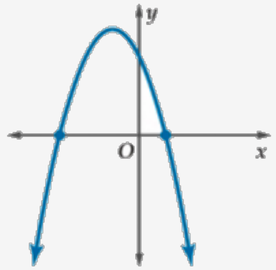
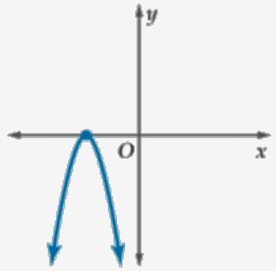
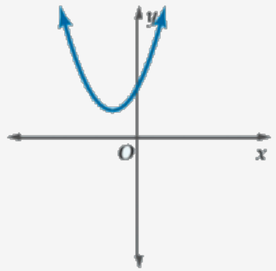
تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X.

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

المميز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b, c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي مكرر مرتين	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان مترافقان	

@manal_joory



تحقق من فهمك

وصف الجذور

أوجد قيمة المميز لكلٍّ من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كلٍّ منهما وأنواعها:

(5A $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

(5B $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

@manal_joory



تأكد

مثال 5 أجب عن الفرعين a،b لكلِّ معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

9) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

10) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **تبرير:** حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك:

a) إذا كانت إشارتا كلٍّ من المعاملَين a،c في المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة القياسية مختلفتين، فإن جذرَي المعادلة حقيقيان.

b) إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين.

@manal_joory



تدريب على اختبار

36) أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟

A $x^2 - 2x + 5 = 0$

B $x^2 - 2x - 5 = 0$

C $x^2 = 19$

D $x^2 - 8x = -16$

37) قيمة المميز للمعادلة $x^2 - 8x = 0$ هي:

A -64

B -8

C 8

D 64

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لكي تنجح خطّط ولكي تخطّط فكِّروا ركل كل مايحبطك حتماً

ستصعد القمم

@manal_joory

قدرات



وزن بدر ٤٠ كجم بعد سنة من اشتراكه في نادي رياضي أصبح وزنه ٦٠ كجم جد النسبة المئوية للزيادة في وزن بدر ؟

أ) ٢٥ %　　ب) ٣٠٪　　ج) ١٥٠٪　　د) ٥٠٪

إذا كان ٧٠٪ من عدد تساوي ٥٦ فما هي القيمة التي تمثل ٥٠٪ من ذلك العدد ؟

أ) ٤٠　　ب) ٣٢　　ج) ٢٥　　د) ٣٦

@manal_joory



العمليات على كثيرات الحدود

@manal_joory

أهداف الدرس



فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم القوى.

(مهارة سابقة)



والآن:

- أضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى، وأقسمها وأبسّطها.
- أجمع كثيرات حدود، وأطرحها وأضربها.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفردات الدرس



التبسيط

simplifying



درجة كثيرة الحدود

Degree of a polynomial

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريبًا؛ إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ تقريبًا.

ما الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} \text{m}$ تقريبًا؟



@manal_joory



خصائص الأسس

الخاصية	التعريف
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ، حيث $x \neq 0$
الأسّ السالب	$\frac{1}{x^{-a}} = x^a$ ، $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$، حيث $x \neq 0$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

تبسيط وحيدات الحد

أضف إلى مطويتك

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أقواسًا أو أسسًا سالبة.

@manal_joory

تحقق من فهمك



(1A $(2x^{-3}y^{3})(-7x^{5}y^{-6})$

(1B $\dfrac{15c^{5}d^{3}}{-3c^{2}d^{7}}$

(1C $\left(\dfrac{a}{4}\right)^{-3}$

(1D $(-2x^{3}y^{2})^{5}$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$

4) $(6g^5h^{-4})^3$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

العمليات على كثيرات الحدود: **درجة كثيرة الحدود** المبسّطة هي أكبر درجة لوحيدات الحد المكوِّنة لها.

فمثلًا درجة كثيرة الحدود $58 + 4x + x^2$ هي 2.

تحقق من فهمك



(2A $\frac{x}{y} + 3x^2$

(2B $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$

إرشادات للدراسة

كثيرات الحدود

تذكّر أن كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد، وتُسمى كل وحيدة حد منها حدًّا في كثيرة الحدود. ودرجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

5) $3x + 4y$ **6)** $\frac{1}{2}x^2 - 7y$ **7)** $x^2 + \sqrt{x}$

@manal_joory

جمع كثيرات الحدود وطرحها



تحقق من فهمك

(3A $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$

@manal_joory



تأكد

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي واكتبه في أبسط صورة:

9) $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$

10) $(3a + 4b) + (6a - 6b)$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود



تحقق من فهمك

(4A $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

(4B $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

@manal_joory

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود



تحقق من فهمك

(5A $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

(5B $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

@manal_joory



تأكد

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي واكتبه في أبسط صورة:

11 $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$

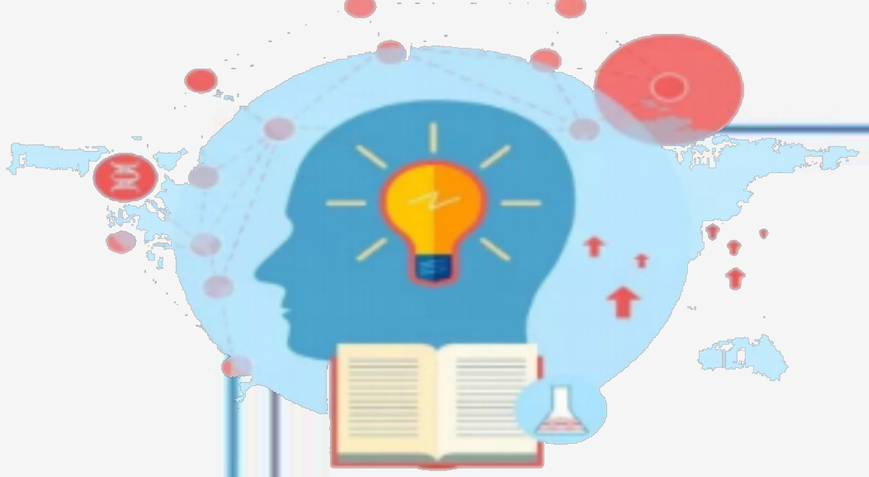
12 $(n - 9)(n + 7)$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

42) تحدٍّ: ما الذي يحدث للمقدار x^{-y} عندما تزداد قيمة y لكل $x > 1, y > 0$؟

@manal_joory



تدريب على اختبار

46) إجابة قصيرة: بسّط المقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$.

47) أيّ مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود $x^3 - x^2 - 2x$؟

A x

B $x + 1$

C $x - 1$

D $x - 2$



مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



حتي تصل للعليا لابد لك من صعود القمم لوحدك.. فان وصلت فهذ جميل.. وان سقط فهذا لك وانهض حاول مرة اخرى حتما ستصعد لانك لن تسلك الطريق الاول.

@manal_joory

قدرات



خمسة أعداد المنوال لهم ٤ والوسيط ٦ والمدى ٥ فأوجدي قيمة أكبر عدد ؟

أ) ٩ ب) ٧ ج) ٦ د) ٤

متوسط ٥ مدارس ١٧٠ فما هو مجموعهم ؟

أ) ٨٥٠ ب) ٨٠٠ ج) ١٧٠ د) ١٠٠٠

@manal_joory



قسمة كثيرات الحدود

@manal_joory

أهداف الدرس



فيما سبق:

درست قسمة وحيدات الحد. (الدرس 3 - 3)



والآن:

- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

@manal_joory

مفردات الدرس



القسمة التركيبية

Synthetic division

@manal_joory

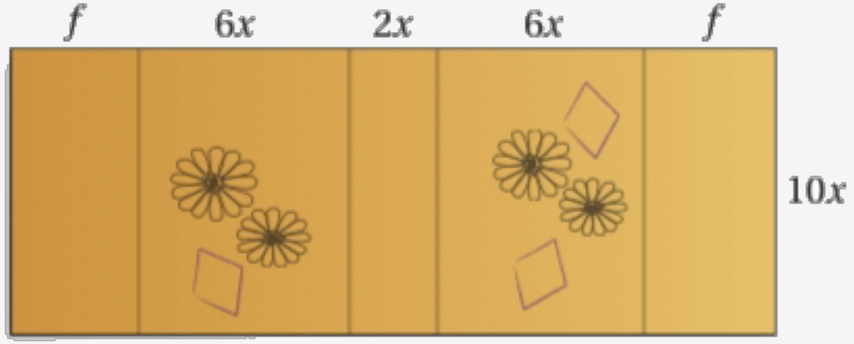
مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

قسمة كثيرات الحدود
Dividing Polynomials

لماذا؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.





f = عرض الثنية

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@manal_joory



تحقق من فهمك

قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

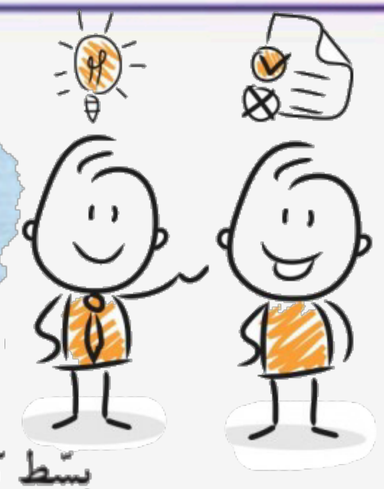
(1A $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

(1B $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

1) $\dfrac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$

2) $(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$

@manal_joory



تحقق من فهمك

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود

(2A $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:

- اكتب كثيرة الحدود في كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه، بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا حسب درجتها.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني ... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :



3) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$؟

A $-r - 6 + \frac{13}{1 - r}$

B $r + 6$

C $r - 6 + \frac{13}{1 - r}$

D $r + 6 - \frac{13}{1 - r}$

@manal_joory



القسمة التركيبية:

القسمة التركيبية: القسمة التركيبية هي طريقة مبسّطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مفهوم أساسي

القسمة التركيبية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x-r$، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4: كرر الخطوتين 3 , 2 على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

@manal_joory



تحقق من فهمك :

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

(4A $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

(4B $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم

$2x^3 - 4x^2 + 6$

فاكتبه في صورة

$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :



(4C $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



تحقق من فهمك :

(5A $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

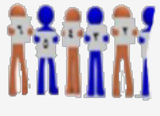
(5B $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

@manal_joory









تحقق من فهمك

(5C $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$

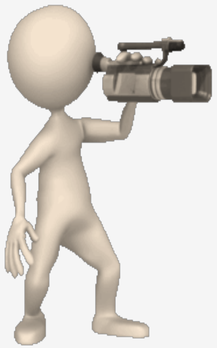
@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

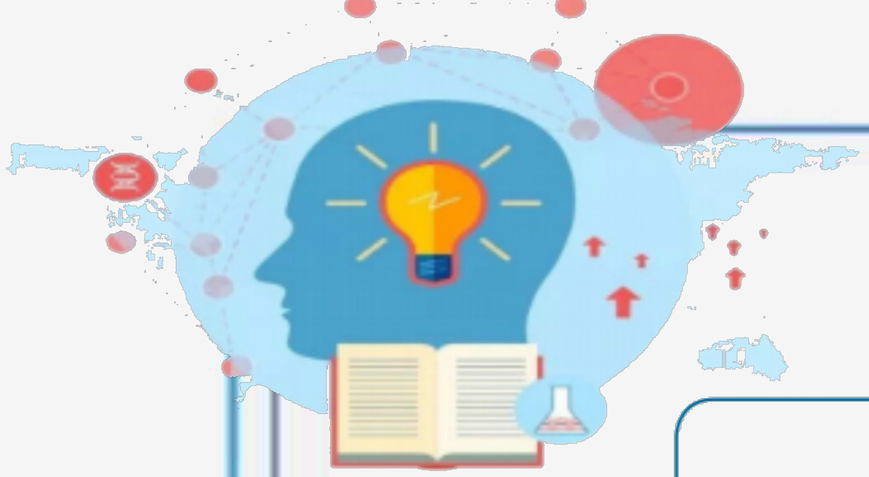
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** قسَّم كلٌّ من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$، فقال خليفة: إن الباقي 26، وقال جمال: إن الباقي -100. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

38) **تحدٍّ:** إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتجه عن العلاقة بينهما؟



@manal_joory



تدريب على اختبار

43) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة:
$(-4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$؟

A $2x^2$ **C** $-10x^2 + 17x$

B $-10x^2$ **D** $2x^2 + 17x$

44) أيُّ كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟

A $x^3 + x^2 - 2x^4$ **C** $x^2 + x + 12^3$

B $-2x^2 - 3x + 4$ **D** $1 + x + x^3$

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@manal_joory





في رحلتك لتحقيق أحلامك.. سيخبرك البعض أنك لاتستطيع، والبعض أنك تخاطر، وبعضهم سيشعر بالغيرة لإنك وجدت طريقك في الحياة، لذا لاتسمح لهم بإيقاف رحلتك.. وواصل طريقك نحو القمة بثبات، ولا تلتفت للاصوات الصغيرة خلفك.!

@manal_joory

قدرات



مامتوسط الأعداد الأتية : ٣٠٠٠ , ٤٥٠٠ , ٣٢٥٠ , ٣٠٠٠, ٤٠٠٠ , ٤٧٥٠ ؟

أ) ٣٢٥٠ ب) ٣٥٠٠ ج) ٣٧٥٠ د) ٤٠٠٠

@manal_joory


مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
دوال كثيرات الحدود

@manal_joory

أهداف الدرس



فيما سبق:

درست تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية. (مهارة سابقة)



والآن:

- أجد قيم دوال كثيرات الحدود.
- أتعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود، وأحدد عدد أصفارها الحقيقية.

@manal_joory



مفردات الدرس



كثيرة حدود بمتغير واحد

polynomial in one variable



دالة كثيرة الحدود

polynomial function



سلوك طرفي التمثيل البياني

end behavior



المعامل الرئيس

leading coefficient



دالة القوة

power function



صفر الدالة

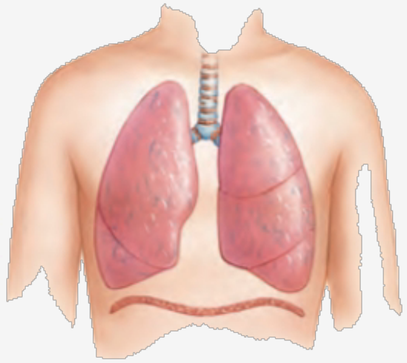
zero of a function

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

يمكن تمثيل حجم الهواء في رئتي الإنسان خلال دورة تنفس مدتها t ثانية بالدالة: $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$، حيث v الحجم باللترات، t الزمن بالثواني. وهذه الدالة مثال على دالة كثيرة حدود.



كيف تمثل الدالة التربيعية هندسيا؟

@manal_joory



دوال كثيرات الحدود: **كثيرة الحدود بمتغير واحد** هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ، حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا، ودرجة كثيرة الحدود هي أسّ المتغير ذي أكبر أسّ فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

كثيرة الحدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x - 9$	1	4
التربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	n	a_n

@manal_joory



تحقق من فهمك

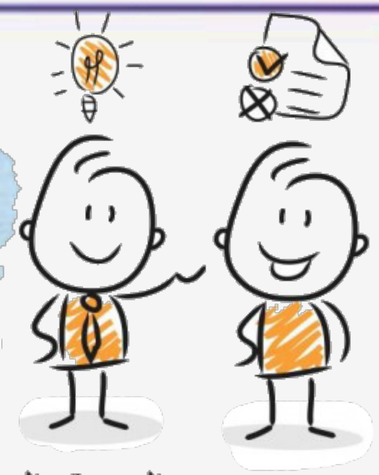
(1A $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$

(1B $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



مثال1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

2) $-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22$

3) $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

4) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$

@manal_joory



ايجاد قيمة دالة كثيرة حدود

دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد ، فمثلا $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ دالة كثيرة حدود تكعيبية. وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود على الصورة $f(x) = ax^b$ ، حيث a عدد حقيقي، b عدد صحيح غير سالب، وتُسمى عندئذٍ **دوال القوة**.

إذا علمت عنصرًا في مجال دالة كثيرة حدود، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

تحقق من فهمك

إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود

ارجع إلى الفقرة في بداية الدرس،

2) **تنفس:** أوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 4 ثوانٍ.



الربط مع الحياة

تصل سعة الرئة لدى الشخص البالغ السليم إلى 6 لترات تقريبًا.

@manal_joory



تأكد

مثال2 أوجد $w(-4), w(5)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

5) $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$

6) $w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

@manal_joory



قيمة دالة كثيرة حدود عند متغير

تحقق من فهمك

3A) إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$.

3B) إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$، فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$.

@manal_joory



تأكد

مثال 3 إذا كانت $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2,\ d(x) = 3x^2 + 6x - 10$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

7 $c(y^3)$

8 $-4[d(3z)]$

9 $6c(4a) + 2d(3a - 5)$

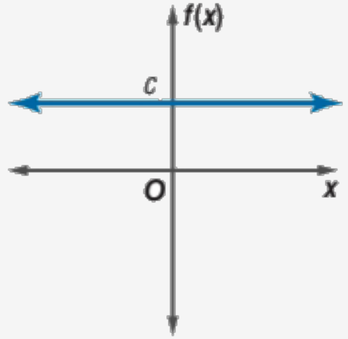
10 $-3c(2b) + 6d(4b - 3)$

@manal_joory

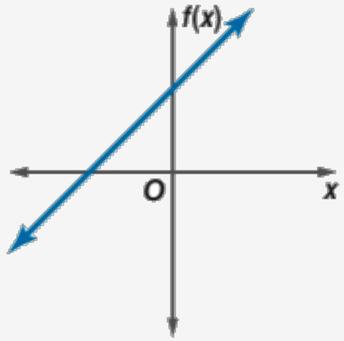
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود: إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر عدد المرات التي يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.

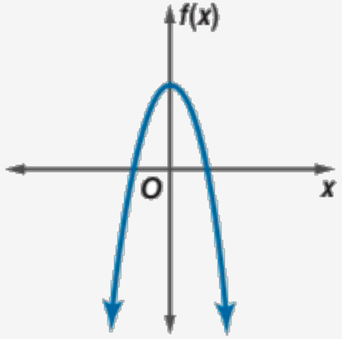
الدالة الثابتة
الدرجة 0



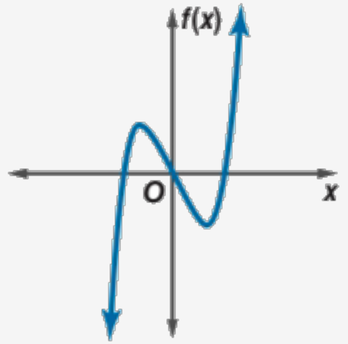
الدالة الخطية
الدرجة 1



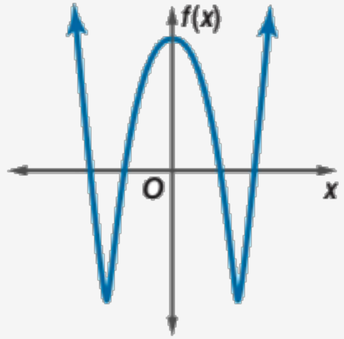
الدالة التربيعية
الدرجة 2



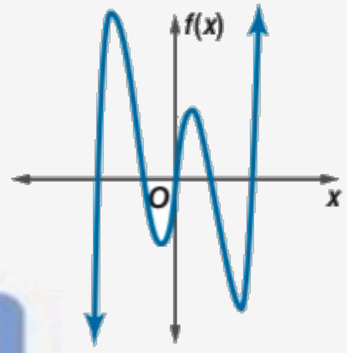
الدالة التكعيبية
الدرجة 3



دالة من الدرجة الرابعة
الدرجة 4



دالة من الدرجة الخامسة
الدرجة 5



قراءة الرياضيات

الرمزان $\infty+$, $\infty-$

نعبر عن التزايد غير المحدود لقيم المتغير x، باستعمال الرمز $\infty+$ ويُقرأ ما لا نهاية ويُكتب $x \to +\infty$، كما نعبر عن التناقص غير المحدود لقيم المتغير x باستعمال الرمز $\infty-$ ويُقرأ سالب ما لا نهاية ويُكتب $x \to -\infty$.

@manal_joory

مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ويُحدد **سلوك طرفي التمثيل البياني** للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$، أو سالب المالانهاية $(x \to -\infty)$ بكل من: درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيس لها.

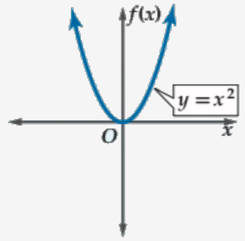
مفهوم أساسي

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

أضف إلى مطويتك

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: موجب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .

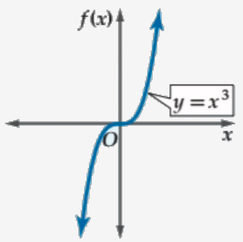
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في الاتجاه نفسه)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: موجب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

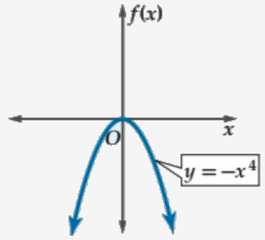
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في اتجاهين مختلفين)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: سالب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى

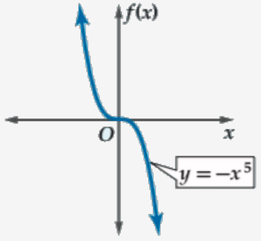
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في الاتجاه نفسه)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: سالب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

سلوك طرفي التمثيل البياني: (في اتجاهين مختلفين)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفَي التمثيل البياني

المعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني.

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

صفر الدالة هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x، لذا فإنه يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها. تذكّر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار؛ ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار.

إرشادات للدراسة

الصفر المكرر

عندما يمس التمثيل البياني المحور x، يكون للدالة صفران متساويان (صفر مكرر).

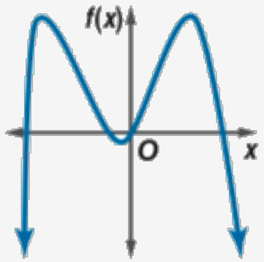


مفهوم أساسي أضف إلى مطويتك

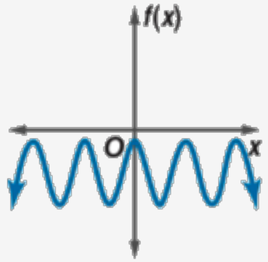
أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة

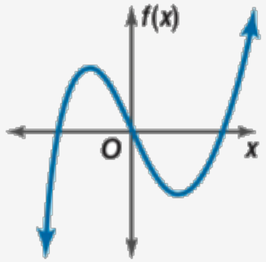


لها 4 أصفار حقيقية

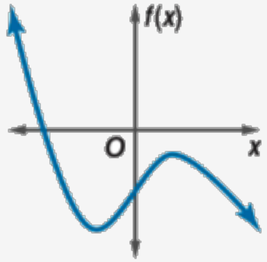


ليس لها أصفار حقيقية

كثيرتا حدود فرديتا الدرجة



لها 3 أصفار حقيقية



لها صفر واحد حقيقي

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



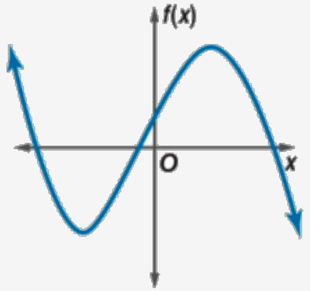
تحقق من فهمك

وصف دالة كثيرة الحدود من تمثيلها البياني

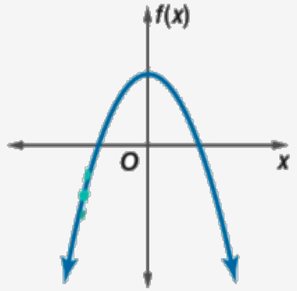
أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

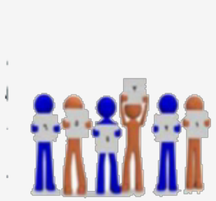
(4A



(4B



@manal_joory






تأكد

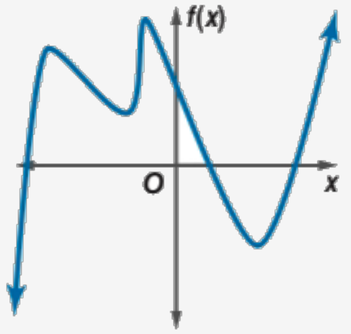
مثال4 أجب عن الفروع a – c لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

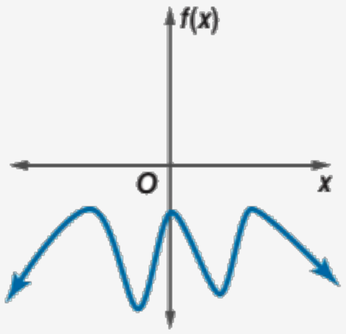
b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

11)

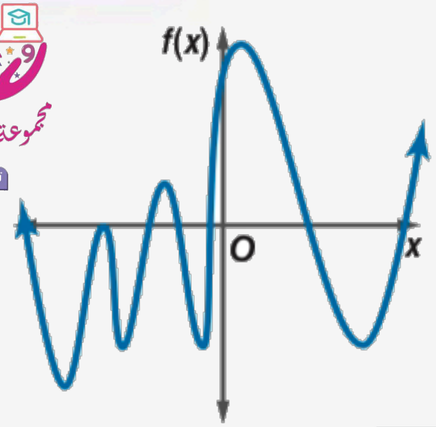


12)



@manal_joory

مسائل مهارات التفكير العليا



52) اكتشف الخطأ: حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ماجد

يوجد 8 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x 7 مرات، وأحد الجذور مكرر مرتين.

بدر

يوجد 7 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x سبع مرات.

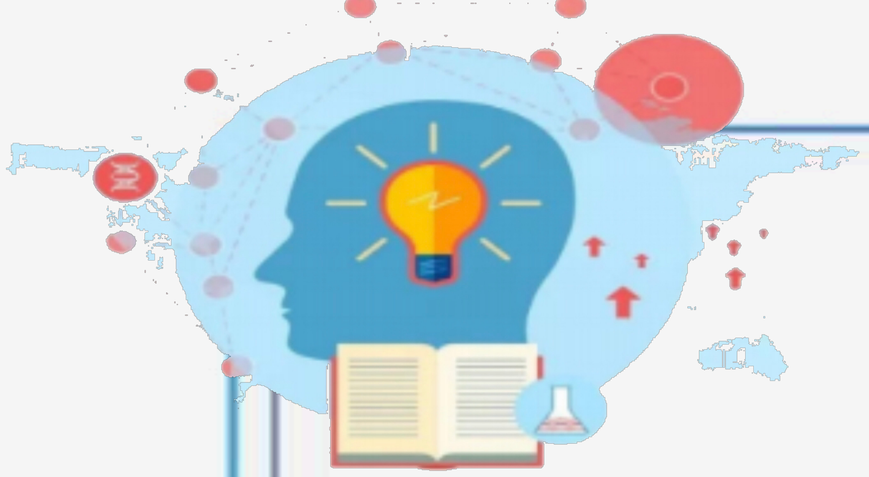
53) تحدٍّ: إذا كانت $g(x)$ من عوامل $f(x)$، وكانت درجة $f(x)$ تساوي 5، ومعاملها الرئيس موجبًا، وكانت درجة $g(x)$ تساوي 3 ومعاملها الرئيس موجبًا، فصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$، وفسّر إجابتك.

54) مسألة مفتوحة: مثّل بيانيًّا كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها 8، وأحدها مكرر مرتين.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@manal_joory



تدريب على اختبار

56) ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟

A -11 **C** -1

B 1 **D** 11

57) إذا كان $i = \sqrt{-1}$ ، فإن $5i(7i)$ يساوي :

A 70 **C** -35

B 35 **D** -70

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

كن طموحا للوصول للقمم ولكن تذكر : ان الطريق
اليها يتطلب الكثير من الجهد و المثابرة و الصبر فلا
تيأس ان قابلتك عقبات : استمر ولا تتوقف

@manal_joory

قدرات



٣ حنفيات الأولى تعبأ الخزان في ١٢ ساعة والثانية ٢٠ ساعة والثالثة ٣٠ ساعة وفتحت الحنفيات الثلاثة معاً ففي كم ساعة يعبأ الخزان بالكامل ؟

أ) ٦ ب) ٤ ج) ٥ د) ٣

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

حل معادلات كثيرات الحدود

@manal_joory

أهداف الدرس



فيما سبق:

درستُ حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

(الدرس 2 - 3)



والآن:

- أحلّل كثيرات الحدود.
- أحلّ معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفردات الدرس



كثيرة حدود أولية

prime polynomial



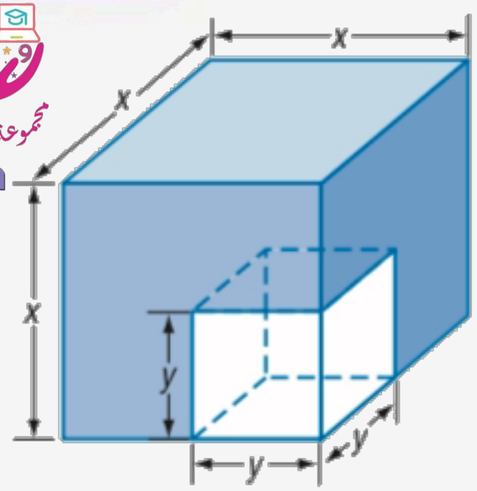
الصورة التربيعية

quadratic form

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟



قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطي حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية x^3-y^3.

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقًا أنه يمكنك تحليل كثيرات الحدود التربيعية تمامًا كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكنك تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية بقوانين خاصة.

ما قانون حجم المكعب؟

ما حجم المكعب الكبير في الشكل إذا كان x=5؟

ما الفرق بين حجمي المكعبين إذا كان y=2 , x=5؟

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

مجموع مكعبين والفرق بينهما

أضف إلى
مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

@manal_joory



تحقق من فهمك

مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

(1A $5y^4 - 320yz^3$

(1B $-54w^4 - 250wz^3$

إرشادات للدراسة

التحليل التام لكثيرات الحدود

يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حللت إلى أقصى درجة ممكنة.



@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



الأمثلة 3-1 حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

1) $3ax + 2ay - az + 3bx$

3) $12qw^3 - 12q^4$

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$



@manal_joory



تحقق من فهمك

التحليل بتجميع الحدود

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

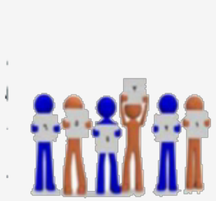
(2A $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

(2B $13ax + 18bz - 15by - 14az$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة:
للتحقق من صحة إجابتك، اضرب العوامل لتتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

@manal_joory






تأكد

الأمثلة 3-1 حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

5) $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

@manal_joory



تستطيع أحيانًا أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلًا بفرض أن $u = x^2$، يمكنك كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$.
وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على **الصورة التربيعية**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الصورة التربيعية

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: au^2+bu+c ، $a\neq0$ ، a,b,c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك



كتابة عبارات في الصورة التربيعية

اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين في الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

(5A $x^4 + 5x + 6$

(5B $8x^4 + 12x^2 + 18$

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية

لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ *a* بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصًا بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك



يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية.

حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

(6A $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$

(6B $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



مثال 5 اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

8) $4x^6 - 2x^3 + 8$

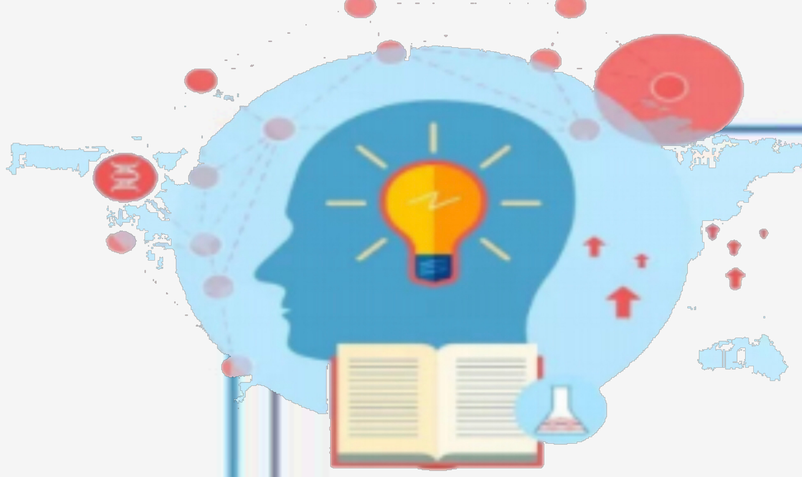
9) $25y^6 - 5y^2 + 20$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

66) **تبرير:** أعط مثالًا مضادًّا للعبارة: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

@manal_joory



تدرب على الاختبار

تدريب على اختبار

69) إجابة قصيرة حل المعادلة: $x^3 + 27 = 0$.

70) إذا كان الفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{12}, k$ مساويًا للفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$، فما قيمة k ؟

A $\frac{1}{60}$

B $\frac{1}{20}$

C $\frac{1}{15}$

D $\frac{13}{60}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق





رتب امورك مع الله ستترتب باقي امورك

الصلاة مفتاح الفلاح و التوكل على الله اول خطوات النجاح

@manal_joory

قدرات



إذا كانت سرعة جسم ٦٠٠ متر في الدقيقة , فكم سرعته بالسنتيمتر لكل ثانية ؟

أ) ٣٦٠٠ ب) ١٠٠٠ ج) ٣٦٠ د) ١٠٠

@manal_joory


مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
نظريتا الباقي والعوامل
@manal_joory

أهداف الدرس



فيما سبق:

درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية.
(الدرس 3 - 3)



والآن:

- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أستعمل التعويض التركيبي لأحدّد ما إذا كانت ثنائية حدٍّ عاملًا من عوامل كثيرة حدود أم لا.

@manal_joory

مفردات الدرس



نظرية الباقي

Remainder Theorm



التعويض التركيبي

synthetic substitution



نظرية العوامل

Factor Theorm

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

قدّر صاحب بقالة أرباحه السنوية بالدالة:
$S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، حيث x عدد السنوات منذ العام 1420هـ، وتمثل $S(x)$ قيمة الأرباح بمئات الريالات.

يمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير الأرباح في العام 1440هـ، بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

ما قيمة x إذا رغبت بمعرفة الأرباح المتوقعة عام 1419؟

كيف يمكنك توقع الأرباح عام 1438؟

استخدمي القسمة التركيبية لتوقع الأرباح عام 1438؟

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التعويض التركيبي: يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x - 3 \overline{)\ -3x^2 + 5x + 4} \\ (-)\ \underline{-3x^2 + 9x} \\ \quad -4x + 4 \\ (-)\ \underline{-4x + 12} \\ \quad -8 \end{array}$$

الطريقة 2: القسمة التركيبية

3	−3	5	4
		−9	−12
	−3	−4	−8

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8 ، وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$ عوّض العدد 3 بدلًا من x

$= -27 + 15 + 4$ اضرب

$= -8$ بسّط

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضِّح **نظرية الباقي**.

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نظرية الباقي

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$، وكذلك :

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x-r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2+6x+2 = (x-4) \cdot (x+10) + 42$

إن عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية تسمى **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيم دوال كثيرات الحدود، خصوصًا عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

@manal_joory

تحقق من فهمك



1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$.

@manal_joory

تحقق من فهمك



1B) إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $g(-1)$.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد



اوجد قيمة الدالة مستعملاً التعويض التركيبي

1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$

2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

عوامل كثيرات الحدود: تبيّن القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضِّح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة.

@manal_joory

تحقق من فهمك



3) حدد ما إذا كان $x-2$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $x^3-7x^2+4x+12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطًا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملا كثيرة الحدود x^3+x^2-x+15 هما $x+3$ و x^2-2x+5.



@manal_joory



تأكد

مثال 3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى، حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$

5) $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@manal_joory

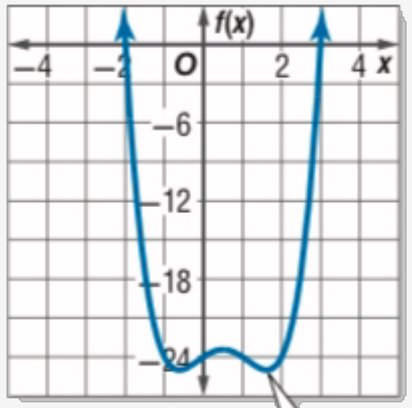
مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تمارين ومسائل



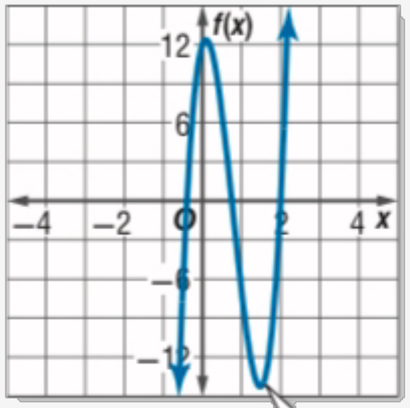
استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

(28



$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

(29



$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@manal_joory



تمارين ومسائل

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كلٍّ مما يأتي يساوي 3:

31 $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

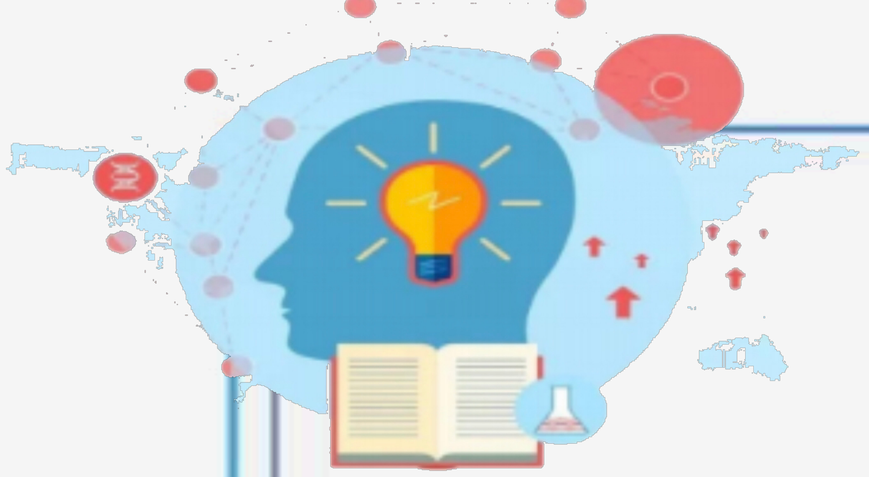
35) **تبرير:** إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

a) الباقي يساوي صفرًا؟

b) الباقي يساوي 1؟

c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفرًا؟

@manal_joory



تدريب على اختبار

38) أيٌّ مما يأتي هو تحليل للعبارة $27x^3 + y^3$ ؟

A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

39) ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 + i)(4 - i)$؟

A 15

B $16 - i$

C 17

D $17 - 8i$

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق





ستكون كما تؤمن أنك ستكون، ..حدد أهدافك

واصنع حدودك بنفسك، أنت عظيم إن أردت

@manal_joory

قدرات



ناتج $\overline{)٢٩٨١١٦}$ = ...

أ) ١٢٥ ب) ٧٦٣ ج) ٥٤٦ د) ٧٦٢

ناتج ٥٦٢١٦١٦ ÷ ٤٥٦٣ = ...

أ) ٦٥٤٣ ب) ٤٥٦٧ ج) ١٢٣٢ د) ٥٤٣٥

@manal_joory



الجذور والأصفار

@manal_joory

أهداف الدرس



فيما سبق:

درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية.
(الدرس 2 - 3)



والآن:

- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية للدالة.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@manal_joory

مفردات الدرس

النظرية الأساسية في الجبر



Fundamental Theorm of Algebra

@manal_joory



لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالةَ:
$g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$،
لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات، حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.

ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

أنواع الجذور تعلمت سابقًا أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًّا تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x.

بناء على المعادلة ما تكلفة إنتاج القطعة الواحدة في عام 1410؟

هل تبقى المعادلة صحيحة لقيم x السالبة ؟

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أضف إلى مطويتك

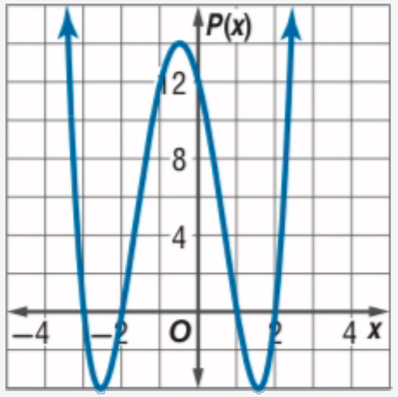
ملخص المفهوم

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x.

مثال: افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي: $-3, -2, 1, 2$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

@manal_joory

تحقق من فهمك



حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

(1A $x^3 + 2x = 0$

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك



تحديد عدد الجذور وأنواعها

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

(1B $x^4 - 16 = 0$

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا



@manal_joory

تحقق من فهمك



حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

1C) $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

@manal_joory



تأكد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

2) $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اختبر حَلَّ كلِّ معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6 = 0$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 = 0$	$-2x^5 - 3x^2 + 8 = 0$
3 جذور	4 جذور	5 جذور



@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.





تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت

(1650 - 1596 م)، فيلسوف، ورياضي، وفيزيائي فرنسي، يلقب بـ "أبو الفلسفة الحديثة" . له تأثير واضح في علم الرياضيات؛ فقد اخترع نظامًا رياضيًا شكّل أساس الهندسة التحليلية سمّي باسمه وهو نظام الإحداثيات الديكارتية.

@manal_joory



تحقق من فهمك

إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية لدالة

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة.

$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية يساوي العدد 6 مطروحًا منه مجموع عدد الأصفار الحقيقية

@manal_joory

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

استراتيجية الجيسكو

تأكد



مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ دالة ممَّا يأتي :

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إرشادات للدراسة

استعمال الأصفار لكتابة الدالة

إن أي دالة على الصورة $f(x)=a(x^3-9x^2+16x+26)$، (حيث a عدد صحيح لا يساوي الصفر)، تحقق المعطيات الواردة في المثال 3، ولكن اعتبر أن $a=1$ للتسهيل فقط.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي

نظرية الأصفار المركبة المترافقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين، و كان $a+bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a-bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3+4i$ صفرًا للدالة $f(x)=x^3-4x^2+13x+50$، فإن $3-4i$ صفر للدالة أيضًا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

@manal_joory



استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $i - 5$ ، -1 من أصفارها .

افهم: **المعطيات:** العددان $i - 5$ ، -1 من أصفار كثيرة حدود.

المطلوب: كتابة دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والعددان $i - 5$ ، -1 من أصفارها.

خطط: بما أن $i - 5$ صفر للدالة، فإن $i + 5$ أيضًا صفر للدالة بحسب نظرية الأصفار المركبة المترافقة.

لذا فإن $x - (5 + i)$ ، $x - (5 - i)$ ، $x + 1$ عوامل لكثيرة الحدود.

حل: اكتب المعادلة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

اكتب الدالة	$P(x) = (x + 1)\,[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$
أعد تجميع الحدود	$= (x + 1)\,[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$
الفرق بين مربعين	$= (x + 1)\,[(x - 5)^2 - i^2]$
أوجد مربع الحدين	$= (x + 1)\,[(x^2 - 10x + 25 - (-1)]$
بسّط	$= (x + 1)\,(x^2 - 10x + 26)$
اضرب	$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$
اجمع الحدود المتشابهة	$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$

تحقق: بما أن هناك 3 أصفار، فإن دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة، ولذا فإن $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، وأصفارها هي: $5 + i$ ، $5 - i$ ، -1 .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@manal_joory



تأكد

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

9) $4, -1, 6$

@manal_joory



تدرب وحل مسائل

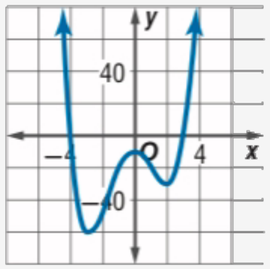
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

(a $-3, 4, i, -i$

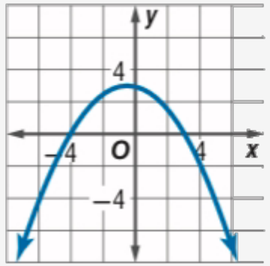
(b $-4, 3$

(c $-4, 3, i, -i$

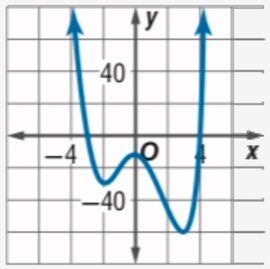
(33



(34



(35



@manal_joory

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

41) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًا لكل عبارة فيما يأتي:

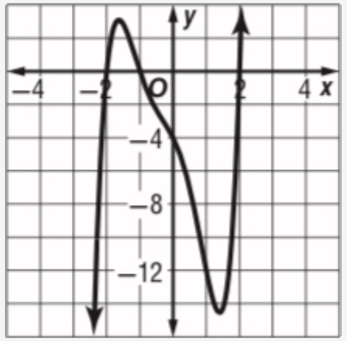
a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.

b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

@manal_joory

تدريب على اختبار

43) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟



A $x - 2$

B $x - 1$

C $x + 2$

D $x + 1$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

رابط القناة بالتلجرام

https://t.me/RAFAH_Secondary3

انتهى

المرجع :

ماجروهيل . رياضيات(٢-١) . وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار . المملكة العربية السعودية . (2008)

سلسلة عروض رفعة الرياضيات
لمنهج رياضيات (٢ - ١)

المراجع / كتاب رياضيات (٢-١)



إعداد وتصميم :
منال سعد النصيري