استعمال خاصية التوزيع

فيما سبق

درست إيجاد (ق . م . أ) لمجموعة من وحيدات الحد .

الآن

١) أستعمل خاصية التوزيع لتحليل كثيرة الحدود .
٢) أحل معادلات تربيعية على الصورة : أس^{٢} + ب س = ٠

المفردات

١) تحليل كثيرة حدود .
٢) التحليل بتجميع الحدود .
٣) خاصية الضرب الصفري .

جدول التعلم

ماذا أعرف ؟	ماذا أريد أن أعرف ؟	ماذا تعلمت ؟

لماذا

تُحدَّد أجرة متجر حسب مساحته. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة م= ٦ , ١ض^{٢} + ٦ض، حيث تمثِّل ض عرض المتجر بالأمتار، ويمكننا استعمال التحليل إلى العوامل وخاصية الضّرب الصفري لإيجاد أبعاد المتجر الممكنة.

استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل: استعملت خاصية التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود كما في المثال الآتي:

٥ع (٤ع + ٧) = ٥ع (٤ع) + ٥ع (٧)

= ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع

ويمكنك الإفادة من ذلك في العمل عكسيًّا للتعبير عن كثيرة الحدود بصورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد، وكثيرة الحدود.

٦ , ١ض^{٢} + ٦ ض= ٦ , ١ض (ض) + ٦(ض) = ض (٦ , ١ض + ٦)

كذلك ٥ع (٤ع + ٧) يمثِّل تحليل ثنائية الحدّ ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع. ويشتمل **تحليل كثيرة الحدود** تحليلها إلى عواملها الأوليّة.

استعمال خاصية التوزيع في التحليل

مثال ١

استعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

أ) $٢٧ص^{٢} + ١٨ص$

أوجد (ق .م. أ) لجميع الحدود.

$٢٧ص^{٢} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ص \times ص$ — حلّل كل حد.

$١٨ص = ٢ \times ٣ \times ٣ \times ص$ — ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

(ق .م. أ) $= ٣ \times ٣ \times ص = ٩ص$

اكتب كل حدّ على صورة حاصل ضرب (ق .م. أ) في باقي العوامل. واستعمل خاصيّة التوزيع لإخراج (ق .م. أ).

$٢٧ص^{٢} + ١٨ص = ٩ص(٣ص) + ٩ص(٢)$ — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق .م. أ).

$= ٩ص(٣ص + ٢)$ — خاصية التوزيع.

استعمال خاصية التوزيع في التحليل

مثال ١

ب) $-٤أ^{٢}ب - ٨أب^{٢} + ٢أب$

$-٤أ^{٢}ب = -١ \times ٢ \times أ \times أ \times ب$ حلّل كلّ حدّ.

$-٨أب^{٢} = -١ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times أ \times ب \times ب$ ضع دائرة حول العوامل المشتركة .

$٢أب = ٢ \times أ \times ب$

(ق .م. أ) $= ٢ \times أ \times ب = ٢أب$

$-٤أ^{٢}ب - ٨أب^{٢} + ٢أب = ٢أب(-٢أ) - ٢أب(٤ب) + ٢أب(١)$ أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق .م. أ).

$= ٢أب(-٢أ - ٤ب + ١)$ خاصيّة التوزيع

تحقق من فهمك

أ١) ١٥و – ٣ف

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ب١) ٧ل^{٢}ن^{٢} + ٢١ل^{٢}ن^{٢} – ل ن

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تُسمّى الطريقة التي تُستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكوّن من أربعة حدود أو أكثر **التحليل بتجميع الحدود**؛ لأن الحدود تُجمع بطريقة معينة، ثم يحلِّل كل تجميع، ثم تطبق خاصية التوزيع لإخراج عامل مشترك.

مفهوم أساسي

التحليل بتجميع الحدود

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود ، إذا توافرت جميع الشروط الآتية:

- تتكوّن كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر.
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معًا عوامل مشتركة.
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعيّ للآخر.

الرموز: أس + ب س + أص + ب ص = (أس + ب س) + (أص + ب ص)

= س(أ + ب) + ص(أ + ب)

= (س + ص)(أ + ب)

التحليل بتجميع الحدود

مثال ٣

حلّل: ٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦

٤ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦	العبارة الأصلية
= (٤ك ر + ٨ ر) + (٣ ك + ٦)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
= ٤ ر(ك + ٢) + ٣(ك + ٢)	حلّل كل تجميع بإخراج (ق.م.أ)
= (٤ر + ٣) (ك + ٢)	خاصية التوزيع

لاحظ أنّ (ك+ ٢) عامل مشترك لِـ ٤ ر (ك+٢) وَ ٣ (ك+٢).

تحقق من فهمك

حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية :

٢أ) رن + ٥ن – ر – ٥

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢ب) ٣ن ك + ١٥ك – ٤ن – ٢٠

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التحليل بتجميع الحدود (العوامل نظائر جمعية)

من المفيد معرفة متى تكون إحدى ثنائيتي الحد نظيرًا جمعيًّا للأخرى. فمثلاً ٦ – أ = –١ (أ – ٦)

مثال ٣

حلّل: ٢م ك – ١٢ م + ٤٢ – ٧ ك

٢م ك – ١٢م + ٤٢ – ٧ ك	العبارة الأصلية
= (٢م ك – ١٢م) + (٤٢ – ٧ ك)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.
= ٢م(ك – ٦) + ٧(٦ – ك)	حلّل كلّ تجميع بإخراج (ق. م. أ).
= ٢م(ك – ٦) + ٧[–١)(ك – ٦)]	٦ – ك = –١ (ك – ٦)
= ٢م(ك – ٦) – ٧(ك – ٦)	خاصيّة التجميع
= (٢م – ٧)(ك – ٦)	خاصيّة التوزيع

إرشادات للدراسة

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.

تحقق من فهمك

حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية :

٣أ) جـ – ٢جـ د + ٨ د – ٤

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٣ب) ٣ف – ٢ف^{٢} – ١٨ف + ٢٧

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكنك حلّ بعض المعادلات بالتحليل .

انظر إلى الجمل الآتية: ٣(٠) = ٠ ٠(٢ – ٢) = ٠ –٣١٢(٠) = ٠ ٠(٠,٢٥) = ٠

لاحظ أن أحد العاملين على الأقل في كلّ حالة يساوي صفرًا. وتبيِّن هذه الأمثلة **خاصيّة الضّرب الصفري**.

مفهوم أساسي — **خاصية الضرب الصفري**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا، فيجب أن يكون أحدهما على الأقل صفرًا.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان أ ب = ٠، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو أن كليهما يساوي صفرًا.

سبق أن تعلمت أن حلّ المعادلة أو جذرها هو أيّ قيمة للمتغير تجعلها صحيحة.

حل المعادلات

مثال ٤

حلّ كلاً من المعادلات الآتية وتحقق من صحة الحل:

أ) $(٢د + ٦)(٣د - ١٥) = ٠$

$(٢د + ٦)(٣د - ١٥) = ٠$		المعادلة الأصلية
$٢د + ٦ = ٠$	أو $٣د - ١٥ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$٢د = -٦$	$٣د = ١٥$	حلّ كل معادلة
$د = -٣$	$د = ٥$	اقسم

الجذران هما -٣ ، ٥

تحقق: عوّض عن د بكلٍّ من -٣، ٥ في المعادلة الأصلية.

$(٢د + ٦)(٣د - ١٥) = ٠$

$[٢(-٣) + ٦][٣(-٣) - ١٥] \stackrel{؟}{=} ٠$

$(-٦ + ٦)(-٩ - ١٥) \stackrel{؟}{=} ٠$

$(٠)(-٢٤) \stackrel{؟}{=} ٠$

$٠ = ٠$ ✓

$(٢د + ٦)(٣د - ١٥) = ٠$

$[٢(٥) + ٦][٣(٥) - ١٥] \stackrel{؟}{=} ٠$

$(١٠ + ٦)(١٥ - ١٥) \stackrel{؟}{=} ٠$

$١٦(٠) \stackrel{؟}{=} ٠$

$٠ = ٠$ ✓

تنبيه !

قيمة غير معروفة

قد تجد أنه من الأسهل حلّ معادلة بقسمة كلّ طرف منها على متغير. وبما أن قيمة المتغير غير معروفة، لذا قد تقسم في هذه الحالة على صفر، والقسمة على صفر غير معرّفة.

حل المعادلات

مثال ٤

ب) $جـ^{٢} = ٣جـ$

$جـ^{٢} = ٣جـ$	المعادلة الأصلية
$جـ^{٢} - ٣جـ = ٠$	اطرح ٣ جـ من كل طرف للحصول على صفر في أحد طرفي المعادلة.
$جـ(جـ - ٣) = ٠$	حلّل باستعمال (ق.م.أ) للحصول على الصورة أ ب = ٠
$جـ = ٠$ أو $جـ - ٣ = ٠$	خاصيّة الضرب الصفري
$جـ = ٣$	حلّ كلّ معادلة
الجذران هما ٠ ، ٣	تحقّق بتعويض كل من صفر، ٣ بدلاً من جـ

تنبيه !

قيمة غير معروفة

قد تجد أنه من الأسهل حلّ معادلة بقسمة كلّ طرف منها على متغير. وبما أن قيمة المتغير غير معروفة، لذا قد تقسم في هذه الحالة على صفر، والقسمة على صفر غير معرّفة.

تحقق من فهمك

٤أ) ٣ن(ن + ٢) = ٠

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٤ب) ٨ب^{٢} − ٤٠ب = ٠

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

استعمال التحليل

مثال ٥
من واقع الحياة

رمي السهم: يمكن تمثيل ارتفاع سهم بالمعادلة ع = −٥ ن^{٢} + ٢٠ ن، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني. إذا أهمل ارتفاع رامي السهام، بعد كم ثانية يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه؟

عندما يصل السهم إلى الأرض ع = ٠

ع = −٥ن^{٢} + ٢٠ ن	المعادلة الأصلية
٠ = −٥ن^{٢} + ٢٠ ن	عوّض عن ع بـ ٠
٠ = ٥ ن (− ن + ٤)	حلّل بإخراج (ق .م.أ)
٥ ن = ٠ أو − ن + ٤ = ٠	خاصيّة الضرب الصفري
ن = ٠ أو −ن = −٤	حلّ كلّ معادلة
ن = ٤	اقسم كل حد على −١

يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه بِـ ٤ ثوانٍ.

الربط مع الحياة

يتطلب رمي السهم أو الرمي بالقوس تركيزًا عاليًا ومهارة ودقة في التصويب؛ لضمان إصابة الهدف.

تحقق من فهمك

٥) **قفز الأرنب:** يمكن تمثيل قفزة الأرنب بالمعادلة ع= ٥ , ٢ن– ٥ن^{٢}؛ حيث تمثل (ع) ارتفاع القفزة بالمتر، و(ن) الزمن بالثواني. أوجد قيمة ن عندما ع= صفرًا.

.....

.....

.....

.....

.....

تأكد

مثال ١ استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

١) ٢١ب – ١٥أ

.....
.....
.....
.....
.....
.....

٢) ١٤جـ^{٢} + ٢جـ

.....
.....
.....
.....
.....
.....

٣) ١٢ل ك^{٢} + ٦ل^{٢}ك + ٢ل^{٢}ك^{٢}

.....
.....
.....
.....
.....
.....

تأكد

المثالان ٢ ، ٣ حلّل كلاًّ من كثيرات الحدود الآتية:

٤) ن م + ٢ن + ٨م + ١٦

.....
.....
.....
.....
.....
.....

٥) س ص – ٧س + ٧ص – ٤٩

.....
.....
.....
.....
.....
.....

٦) ٣ب جـ – ٢ب – ١٠ + ١٥جـ

.....
.....
.....
.....
.....
.....

تأكد

مثال ٤ حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٧) ٣ك(ك + ١٠) = ٠

.....
.....
.....
.....
.....
.....

٨) (٤م + ٢)(٣م − ٩) = ٠

.....
.....
.....
.....
.....
.....

٩) ر^{٢} = ١٤ر

.....
.....
.....
.....
.....
.....

تأكد

مثال ٥ ١٠) **صواريخ:** أُطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ ثانية. وتمثّل المعادلة ع = ٤٢ ن – ٥ن^{٢} ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟

.....

.....

.....

.....

.....

تأكد

مثال ٥ ١٠) **صواريخ:** أُطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ ثانية. وتمثّل المعادلة ع = ٤٢ ن – ٥ن^{٢} ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

ب) حلّ المعادلة ٤٢ ن – ٥ ن^{٢} = ٠

.....

.....

.....

.....

.....

تأكد

مثال ٥ ١٠) **صواريخ:** أُطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ ثانية. وتمثّل المعادلة ع = ٤٢ ن – ٥ن^{٢} ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

جـ) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟

.....

.....

.....

.....

.....

مهارات التفكير العليا

٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة ٢ م^{٢} = ٤ م. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

راشد

٢م^{٢} = ٤م

٢م^{٢} − ٤م = ٠

٢م(م − ٢) = ٠

٢م = ٠ أو م − ٢ = ٠

م = ٠ أو م = ٢

حمد

٢م^{٢} = ٤م

$\frac{٢م^{٢}}{٢م} = \frac{٤م}{٢م}$

م = ٢

الواجب
بمنصة مدرستي

تصميم
أ. عثمان الربيعي
@uthman20191

موقع رفعة التعليمية