

التبرير والبرهان Reasoning and Proof

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة وعلاقات الزوايا.

والآن:

- أكتب تخمينات، وأجد أمثلة مضادة للعبارات.
- أستعمل التبرير الاستنتاجي للتوصل إلى نتيجة صحيحة.
- أكتب براهين تتضمن نظريات القطع المستقيمة والزوايا.

لماذا؟

العلوم والطبيعة:

يستعمل علماء الأحياء التبريرات الاستنتاجية والاستقرائية لاتخاذ القرارات، ووضع الاستنتاجات المنطقية عن مملكة الحيوانات.



منظم أفكار

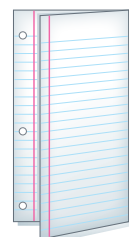
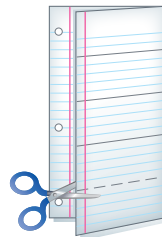
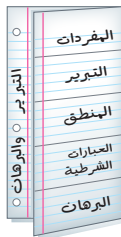
المطويات

التبرير والبرهان: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 1، مبتدئاً بورقة من دفتر الملاحظات.

3 عنون الأشرطة كما في الشكل أدناه.

2 قص خمسة أشرطة كما يظهر في الشكل أدناه.

1 اطو الورقة طويلاً، بحيث تكون حافتها بمحاذاة الثقوب الجانبية.





التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

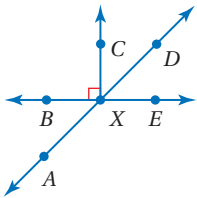
مثال 1

أوجد قيمة $11 - 2x + x^2$ إذا كانت $x = 6$.

مثال 2

حل المعادلة $36x - 14 = 16x + 58$.

مثال 3



إذا كان: $m\angle BXA = (3x + 5)^\circ$ ،
فأوجد قيمة x . $m\angle DXE = 56^\circ$

اختبار سريع

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي عند قيمة x المُعطاة.

(1) $4x + 7$, $x = 6$ (2) $180(x - 2)$, $x = 8$

(3) $5x^2 - 3x$, $x = 2$ (4) $\frac{x(x - 3)}{2}$, $x = 6$

(5) $x + (x + 1) + (x + 2)$, $x = 3$

اكتب كل تعبير لفظي مما يأتي على صورة عبارة جبرية:

(6) أقل من خمسة أمثال عدد ثمانية.

(7) أكثر من مربع عدد بثلاثة.

حل كل معادلة فيما يأتي:

(8) $8x - 10 = 6x$

(9) $18 + 7x = 10x + 39$

(10) $3(11x - 7) = 13x + 25$

(11) $\frac{3}{2}x + 1 = 5 - 2x$

(12) **قراءة:** اشترت عائشة 4 كتب بقيمة 52 ريالاً؛ لتقرأها في أثناء الإجازة الصيفية. إذا كانت الكتب متساوية السعر، فاكتب معادلة لإيجاد ثمن الكتاب الواحد، ثم حلّها.

استعمل الشكل المجاور في مثال 3 للإجابة عما يأتي:

(13) عيّن زاويتين منفرجتين متقابلتين بالرأس.

(14) عيّن زاويتين متتامتين.

(15) عيّن زاويتين متجاورتين متكاملتين في آن واحد.

(16) إذا كان: $m\angle DXB = 116^\circ$ و $m\angle EXA = (3x + 2)^\circ$ ، فأوجد قيمة x .

(17) إذا كان: $m\angle CXD = (6x - 13)^\circ$ و $m\angle DXE = (10x + 7)^\circ$ ، فأوجد قيمة x .

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa

التبرير الاستقرائي والتخمين

Inductive Reasoning and Conjecture

1-1

لماذا؟

في أبحاث التسويق، يتم تحليل إجابات مجموعة من الأشخاص عن أسئلة محددة حول المنتج، ثم يتم البحث عن نمطية معينة في الإجابات حتى الوصول إلى نتيجة. وتسمى هذه العملية التبرير الاستقرائي.

التخمين: التبرير الاستقرائي هو تبرير تُستعمل فيه أمثلة محددة للوصول إلى نتيجة. وعندما تفترض استمرار نمط على نفس الوتيرة، فإنك تستعمل التبرير الاستقرائي، وتسمى العبارة النهائية التي توصلت إليها باستعمال التبرير الاستقرائي **تخميناً**.

فيما سبق:

درست استعمال البيانات لإيجاد أنماط والتوصل إلى توقعات.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أكتب تخمينات مبنية على التبرير الاستقرائي.
- أجد أمثلة مضادة.

المفردات:

التبرير الاستقرائي

inductive reasoning

التخمين

conjecture

الأمثال المضادة

counterexample

مثال 1 الأنماط والتخمين

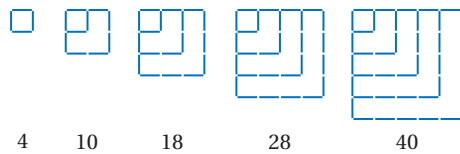
اكتب تخميناً يصف النمط في كلٍّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها.

(a) مواعيد وصول الحافلات إلى محطة الركوب هي: 8:30 صباحاً، 9:10 صباحاً، 9:50 صباحاً، 10:30 صباحاً،

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:



الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

تحقق:

مراجعة المفردات

المتابعة

هي مجموعة من الأعداد أو الأشياء المنظمة بترتيب معين.



تاريخ الرياضيات

أبو علي الحسن بن الهيثم
354 - 430 هـ

عالم موسوعي من أعظم علماء الرياضيات والفيزياء، اعتمد في بحوثه على منهجين هما: الاستقراء، والاستنباط وفي الحاليتين كان يعتمد على التجربة والملاحظة.



وزارة التعليم
Ministry of Education

2021 - 1443

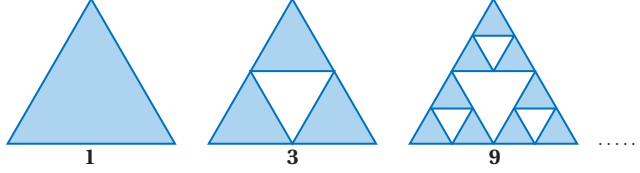
تحقق من فهمك

اكتب تخميناً يصف النمط في كلٍّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها.

(1A) متتابعة أشهر: صفر، رجب، ذو الحجة، جمادى الأولى،

(1B) $10, 4, -2, -8, \dots$

(1C)



إرشادات للدراسة

اختبر جميع العمليات الحسابية الأساسية بما فيها الجذور والقوى عند البحث عن قاعدة تحدد النمط، وقد تتضمن القاعدة، استعمال عمليتين حسابيتين.

لوضع تخمينات جبرية أو هندسية يجب أن تقدم أمثلة.

مثال 2

التخمينات الجبرية والهندسية

ضع تخميناً لكل قيمة أو علاقة هندسية لكلٍّ مما يأتي، وأعط أمثلة عديدة أو ارسم أشكالاً تساعد على الوصول لهذا التخمين.

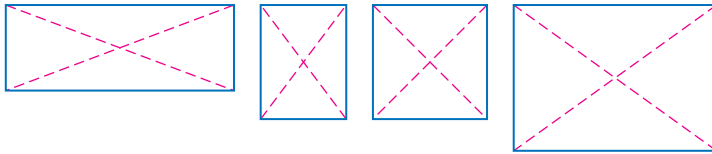
(a) ناتج جمع عددين فرديين.

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

(b) القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل.



الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

إرشادات للدراسة

الأمثلة المؤيدة

والبراهين

الأمثلة المؤيدة للتخمين ليست كافية لإثبات صحته، ولإثبات صحة تخمين جبري أو هندسي، يجب تقديم مبررات صحيحة في صورة تعريفات أو نظريات أو مسلمات تسمى برهاناً. وسوف تتعلم المزيد عن البرهان في الدرس 1-5.

تحقق من فهمك

(2A) ناتج جمع عددين زوجيين.

(2B) العلاقة بين AB و EF ، إذا كانت: $AB = CD$ و $CD = EF$

(2C) مجموع مربعي عددين كليين متتاليين.



تعتمد التخمينات في المواقف الحياتية على بيانات يتم جمعها حول موضوع التخمين.

مثال 3 من واقع الحياة وضع تخمين من مجموعة بيانات

حلاقة: قام صاحب صالون حلاقة بجمع معلومات حول عدد الزبائن الذين يرتادون الصالون أيام الخميس والجمعة والسبت مدة ستة أشهر؛ كي يقرر ما إذا كان يجب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع.

عدد الزبائن في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع						
اليوم	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	الشهر 4	الشهر 5	الشهر 6
الخميس	225	255	321	406	540	450
الجمعة	552	635	642	692	685	705
السبت	603	658	652	712	746	832
المجموع	1380	1548	1615	1810	1971	1987

الربط مع الحياة

يتطلب العمل في صالونات الحلاقة مراعاة شروط صحية تضمن عدم انتقال الأمراض، ومنها غسل اليدين وتعقيم الأدوات المستخدمة بعد كل عملية حلاقة، وعدم الاستعمال الخاطئ للأدوات والمستحضرات.

عدد الزبائن في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع

(a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

(b) ضع تخميناً يعتمد على هذه البيانات، مفسراً كيف يؤيد التمثيل البياني هذا التخمين.

تحقق من فهمك

السنة	السعر (ريال)
1414	20
1419	22
1424	29
1429	32
1434	37
1439	41

(3) **أسعار:** يبين الجدول المجاور سعر

منتج خلال السنوات من 1414هـ إلى 1439هـ.

(A) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

(B) ضع تخميناً لسعر المنتج عام 1444هـ.

(C) هل من المنطقي القول بأن هذا النمط سيستمر بمرور الزمن؟

وإذا لم يكن كذلك، فكيف سيتغير؟ فسر إجابتك.

إيجاد أمثلة مضادة: إثبات صحة تخمين معين لكل الحالات، يتطلب تقديم برهان لذلك التخمين. بينما لإثبات عدم صحة التخمين يكفي تقديم مثال واحد معاكس للتخمين، وقد يكون عددًا أو رسمًا أو عبارة، وهذا المثال المعاكس يُسمى **المثال المضاد**.

ربط المفردات

المثال المضاد
المعنى اللغوي
المضاد هو المخالف.
المعنى الرياضي
المثال المضاد هو مثال معاكس لمثال مُعطى.

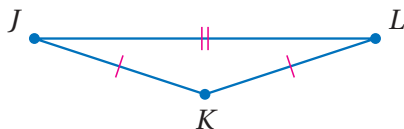
إيجاد أمثلة مضادة

مثال 4

أعط مثالاً مضاداً يبين أن كلاً من التخمينات الآتية خاطئة.

(a) إذا كان n عددًا حقيقيًا، فإن $n^2 > n$.

(b) إذا كان $JK = KL$ ، فإن K منتصف JL .



تحقق من فهمك

(4A) إذا كان n عددًا حقيقيًا، فإن $-n$ يكون سالبًا.

(4B) إذا كان: $\angle ABE \cong \angle DBC$ ، فإن $\angle ABE$ و $\angle DBC$ متقابلتان بالرأس.

قراءة الرياضيات

يرمز للنقطة بحرف كبير
مثل: $A, B, C, \dots$
ويرمز للقطعة المستقيمة
التي طرفاها A, B
بالرمز $\overline{AB}$ أو $\overline{BA}$ ويرمز
للمسافة بين النقطتين
 A, B بالرمز AB

تأكد

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها:

(1) التكلفة: 4.50 ريالاً، 6.75 ريالاً، 9.00 ريالاً،

(2) مواعيد انطلاق الحافلات: 10:15 صباحًا، 11:00 صباحًا، 11:45 صباحًا،



(5) 3, 3, 6, 9, 15,

(6) 2, 6, 14, 30, 62,

ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:

(7) ناتج ضرب عددين زوجيين.

(8) العلاقة بين العددين a و b إذا كان $a + b = 0$.

(9) العلاقة بين مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن النقطة A .



المثال 2

(10) العلاقة بين $\overline{AP}$ و $\overline{PB}$ إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ والنقطة P نقطة منتصف $\overline{AM}$.

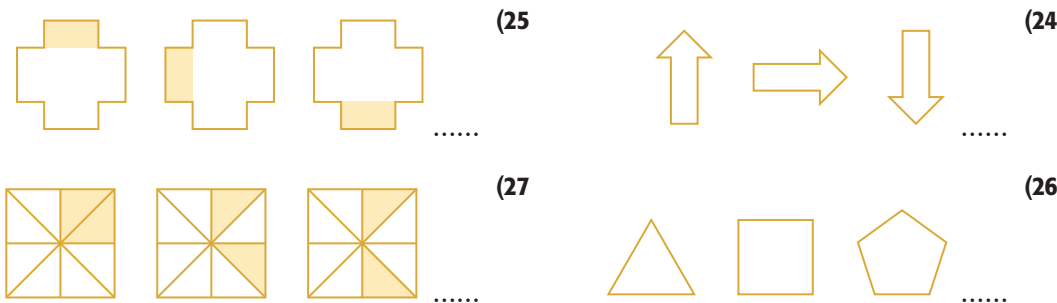
السنة	عدد القطع المنتجة لمصنع (بالملايين)
2012	5
2013	7.2
2014	9.2
2015	14.1
2016	19.7
2017	28.4

- المثال 3** (11) إنتاج مصنع: استعمل الجدول المجاور الذي يبين عدد القطع المنتجة في مصنع لبعض السنوات.
- (a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.
- (b) ضع تخميناً لعدد القطع في سنة 2022 م.

- المثال 4** أعط مثلاً مضاداً يبين أن كلاً من التخمينات الآتية خاطئة.
- (12) إذا كانت $\angle A$ و $\angle B$ متتامتين، فإن لهما ضلعاً مشتركاً.
- (13) إذا قطع نصف مستقيم قطعةً مستقيمةً عند منتصفها، فإنه يعامدها.

تدرب وحل المسائل

- المثال 1** اكتب تخميناً يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها.
- (14) 0, 2, 4, 6, 8 (15) 3, 6, 9, 12, 15 (16) 4, 8, 12, 16, 20
- (17) 2, 22, 222, 2222 (18) 1, 4, 9, 16 (19) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$
- (20) مواعيد الوصول: 10:00 صباحاً، 12:30 مساءً، 3:00 مساءً،
- (21) النسبة المئوية للرطوبة: 100% , 93% , 86% ,
- (22) أيام العمل: الأحد، الثلاثاء، الخميس،
- (23) اجتماعات النادي: المحرم، ربيع أول، جمادى الأولى،



- (28) رياضة: بدأ ماجد تمارين الجري السريع قبل خمسة أيام. فركض في اليوم الأول 0.5 km . وفي الأيام الثلاثة التالية 1.25 km, 1 km, 0.75 km . إذا استمر تمرينه على هذا النمط، فما المسافة التي يقطعها في اليوم السابع؟

- المثال 2** ضع تخميناً لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:
- (29) ناتج ضرب عددين فرديين.
- (30) ناتج ضرب عدد في اثنين، مضافاً إليه واحد.
- (31) العلاقة بين العددين a و b ، إذا كان $ab = 1$.

- (32) العلاقة بين $\overline{AB}$ ومجموعة النقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A و B .
- (33) العلاقة بين حجم المنشور وحجم الهرم اللذين لهما القاعدة نفسها والارتفاع نفسه.



السنة	عدد الطلاب
1435	190
1436	210
1437	240
1438	260

34 مدارس: يبين الجدول المجاور عدد الطلاب في إحدى المدارس الثانوية خلال الفترة من 1435 هـ إلى 1438 هـ.

- (a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.
(b) ضع تخميناً معتمداً على بيانات الجدول، وشرح كيف يؤيد تمثيلك البياني هذا التخمين.

المثال 3

حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينات الآتية صحيحاً أو خاطئاً، وإذا كان التخمين خاطئاً، فأعط مثلاً مضاداً.

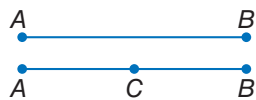
- (35) إذا كان n عدداً أولياً، فإن $n + 1$ ليس أولياً.
(36) إذا كان x عدداً صحيحاً، فإن $-x$ عدد موجب.
(37) في المثلث ABC إذا كان: $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ ، فإن $\triangle ABC$ قائم الزاوية.
(38) إذا كانت مساحة مستطيل تساوي 20 m^2 ، فإن طوله يساوي 10 m ، وعرضه 2 m .
(39) **سكان:** استعمل الجدول أدناه لتعطي مثلاً مضاداً لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

النسبة المئوية من عدد سكان المملكة	العدد التقريبي للسكان بالمليون	المنطقة الإدارية
24.8%	8.1	الرياض
26%	8.5	مكة المكرمة
6.7%	2.2	المدينة المنورة
15.3%	5	الشرقية

المصدر: مسح الخصائص السكانية 2017م - الهيئة العامة للإحصاء.

- (a) النسبة المئوية لمجموع عدد سكان المناطق الإدارية الأربع الواردة في الجدول أقل من 25% من سكان المملكة العربية السعودية.
(b) يزيد عدد سكان أيٍّ من المناطق الإدارية الأربع على ثلاثة ملايين نسمة.
(40) **تخمين جولدباخ:** ينص تخمين جولدباخ على أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فعلى سبيل المثال: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$.

- (a) أثبت أن التخمين صحيح للأعداد الزوجية من 10 إلى 20
(b) إذا أعطيت التخمين الآتي: يمكن كتابة أي عدد فردي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فهل التخمين صحيح أم خاطئ؟ إذا كان خاطئاً، فأعط مثلاً مضاداً.



- (41) **هندسة:** النقطتان الواقعتان على مستقيم تشكّلان قطعة مستقيمة، مثل $\overline{AB}$. إذا أضيفت نقطة أخرى C على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ، فإن النقاط الثلاث تشكّل ثلاث قطع مستقيمة.

- (a) ما عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من أربع نقاط على مستقيم؟ ومن خمس نقاط على مستقيم؟
(b) ضع تخميناً لعدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من n نقطة على مستقيم.
(c) اختبر تخمينك بإيجاد عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من 6 نقاط.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (42) **اكتشف الخطأ:** يتناقش أحمد وعلي في موضوع الأعداد الأولية. فيقول أحمد: إن جميع الأعداد الأولية أعداد فردية. في حين يقول علي: ليست جميع الأعداد الأولية فردية. هل قول أيٍّ منهما صحيح؟ فسّر إجابتك.

المثال 4



الربط مع الحياة

منطقة مكة المكرمة هي أكثر مناطق المملكة تعداداً للسكان، وتضم 12 محافظة هي: مكة المكرمة وجدة والطائف والقنفذة والليث ورايح والجموم وخليص والكامل والخربة ورنية وتربه.
المصدر: الهيئة العامة للإحصاء.

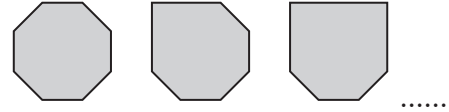
43) مسألة مفتوحة: اكتب متتابعة عددية تتبع حدودها نمطين مختلفين، ووضح النمطين.

44) تبرير: تأمل التخمين: "إذا كانت نقطتان تبعدان المسافة نفسها عن نقطة ثالثة معلومة، فإن النقطتين الثلاث تقع على استقامة واحدة". هل هذا التخمين صحيح أم خاطئ؟ وإذا كان خاطئاً، فأعط مثلاً مضاداً.

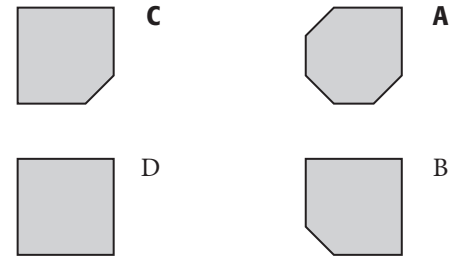
45) اكتب: افترض أنك تجري مسحاً. اختر موضوعاً واكتب ثلاثة أسئلة يتضمنها مسحك. كيف تستعمل التبرير الاستقرائي مع البيانات التي تحصل عليها من خلال هذا المسح؟

تدريب على اختبار

46) انظر إلى النمط الآتي:



ما الشكل التالي في النمط؟



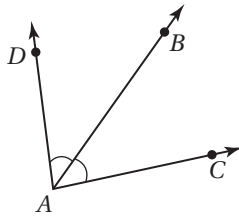
47) إذا علمت أن $a = 10$, $b = 1$ ، فما قيمة العبارة الآتية؟

$$2b + ab \div (a + b)$$

48) في الشكل المجاور،

$\overleftrightarrow{AB}$ محور تناظر $\angle DAC$. أي الاستنتاجات الآتية ليس

صحيحاً بالضرورة؟



A $\angle DAB \cong \angle BAC$

B $\angle DAC$ زاوية قائمة.

C A و D على استقامة واحدة.

D $2(m\angle BAC) = m\angle DAC$

مراجعة تراكمية

49) أحواض سمك: اشترى باسم حوض سمك صغير على شكل أسطوانة دائرية قائمة، طول قطر قاعدتها 25 cm، وارتفاعها 35 cm، أوجد حجم الماء اللازم لملء الحوض. (مهارة سابقة)

أوجد محيط $\triangle ABC$ إذا أعطيت إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

51) $A(-3, 2), B(2, -9), C(0, -10)$

50) $A(1, 6), B(1, 2), C(3, 2)$

52) جبر: قياس زاويتين متتامتين يساوي $(16z - 9)^\circ$ و $(4z + 3)^\circ$. أوجد قياس كل منهما. (مهارة سابقة)

53) جبر: إذا علمت أن: $x = 3$ و $y = -4$ و $z = -5$ ، فأوجد قيمة: $5|x + y| - 3|2 - z|$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

جبر: اكتب كلمة "صح" بجوار العبارة الصحيحة وكلمة "خطأ" بجوار العبارة الخاطئة.

56) العدد 9 عدد أولي

55) $5 - 2 \times 3 = 9$

54) كل مربع هو مستطيل





لماذا؟

عند إجابتك عن «أسئلة من النوع صح أو خطأ» في اختبار، فإنك تستعمل مبدأً أساسياً في المنطق. فمثلاً انظر إلى خريطة المملكة العربية السعودية وأجب عن الخبر التالي بصحيح أو خاطئ: أبها مدينة سعودية. أنت تعرف أنه يوجد إجابة وحيدة صائبة، إما صحيح أو خاطئ.

فيما سبق:

درست إيجاد أمثلة مضادة لتخمينات خاطئة.

(الدرس 1-1)

والآن:

- أعين قيم الصواب لعبارة الوصل وعبارة الفصل.
- أمثل عبارتي الوصل والفصل باستعمال أشكال فن.

المفردات:

العبارة

statement

قيمة الصواب

truth value

نفي العبارة

negation

العبارة المركبة

compound statement

عبارة الوصل

conjunction

عبارة الفصل

disjunction

جدول الصواب

truth table

تحديد قيم الصواب: العبارة هي جملة خبرية لها حالتان فقط إما أن تكون صائبة أو تكون خاطئة، ولا تحتل أي حالة أخرى. وصواب العبارة (T) أو خطأها (F) يسمى **قيمة الصواب** لها، ويرمز للعبارة برمز مثل p أو q .

قيمة الصواب: T

p : المستطيل شكل رباعي

نفي العبارة يفيد معنى مُضاداً لمعنى العبارة. وقيمة الصواب له هو عكس قيمة الصواب للعبارة الأصلية، فمثلاً: نفي العبارة p أعلاه هو $\sim p$ ، أو "ليس p " ، حيث:

قيمة الصواب: F

 $\sim p$: المستطيل ليس شكلاً رباعياً

يمكنك ربط عبارتين أو أكثر باستعمال الرابط (و) ، أو الرابط (أو) لتكوين **عبارة مركبة**. والعبارة المركبة التي تحتوي (و) تُسمى **عبارة وصل**. وتكون عبارة الوصل صائبة فقط عندما تكون جميع العبارات المكونة لها صائبة.

قيمة الصواب: T

p : المستطيل شكل رباعي

قيمة الصواب: T

q : المستطيل مضلع محدب

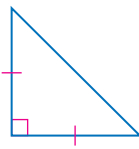
 p و q : المستطيل شكل رباعي والمستطيل مضلع محدب.

بما أن كلتا العبارتين p و q صائبتان، فإن عبارة الوصل p و q صائبة. تكتب عبارة الوصل p و q بالرموز على الصورة $p \wedge q$.

قيم الصواب لعبارات الوصل

مثال 1

استعمل العبارات p, q, r والشكل المجاور لكتابة عبارة الوصل في كل مما يأتي. ثم أوجد قيمة الصواب لها مبرراً إجابتك:



p : الشكل مثلث.

q : في الشكل ضلعان متطابقان.

r : جميع زوايا الشكل حادة.

r و p (a)

 $q \wedge \sim r$ (b)

تحقق من فهمك

(1A) $p \wedge q$ (1B) ليس p وليس r 

وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

تسمى العبارة المركبة التي تحتوي (أو) عبارة فصل.

p : درس مالك الهندسة.

q : درس مالك الكيمياء.

p أو q : درس مالك الهندسة أو درس مالك الكيمياء.

تكون عبارة الفصل صائبة إذا كانت إحدى العبارات المكونة لها صائبة، وتكون خاطئة إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة. فإذا درس مالك الهندسة أو الكيمياء أو كليهما، فإن عبارة الفصل p أو q صائبة. وإذا لم يدرس مالك أيًا من الهندسة والكيمياء، فإن عبارة الفصل p أو q خاطئة.

تكتب عبارة الفصل p أو q بالرموز على الصورة $p \vee q$.

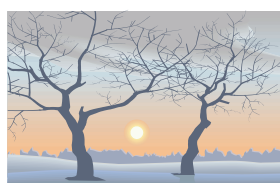
تنبيه

نفي العبارة

كما أن معكوس العدد الصحيح لا يكون سالبًا دائمًا، فإن نفي العبارة ليس بالضرورة أن يكون خاطئًا، وإنما له عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.

مثال 2

قيم الصواب لعبارات الفصل



يناير						
الجمعة	الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الاثنين	الأحد	السبت
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

استعمل العبارات p , q , r والصورة المجاورة؛ لكتابة عبارة الفصل في كل مما يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها مبررًا إجابتك.

p : يناير من أشهر فصل الربيع.

q : عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط.

r : يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

(a) q أو r

(b) $p \vee q$

(c) $\sim p \vee r$



الربط مع الحياة

فصول السنة بالترتيب:

الشتاء: 21 ديسمبر - 20 مارس

من العام التالي.

الربيع: 21 مارس - 20 يونيو

الصيف: 21 يونيو - 20 سبتمبر

الخريف: 21 سبتمبر - 20 ديسمبر

تحقق من فهمك

(2C) $p \vee \sim q$

(2B) $q \vee \sim r$

(2A) p أو r

أضف إلى

مطوبتك

نفي العبارة، عبارة التوصل، عبارة الفصل

ملخص المفهوم

الرموز	التعبير اللفظي	العبارة
$\sim p$ ، وتقرأ ليس p	عبارة تفيد معنى مضافاً لمعنى العبارة الأصلية، وقيمة الصواب لها عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.	نفي العبارة
$p \wedge q$ ، وتقرأ p و q	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).	عبارة التوصل
$p \vee q$ ، وتقرأ p أو q	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (أو).	عبارة الفصل

يمكن تنظيم قيم الصواب للعبارات في جداول تسمى **جداول الصواب**. ويمكن استعمال جداول الصواب لتحديد قيم الصواب لنفي العبارة ولعبارتي الوصل والفصل.

عبارة الفصل		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

عبارة الوصل		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

نفي العبارة	
p	$\sim p$
T	F
F	T

وكذلك يمكنك استعمال جداول الصواب أعلاه لإنشاء جداول الصواب للعبارات المركبة الأكثر تعقيداً.

إنشاء جداول الصواب

مثال 3

أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \vee q$

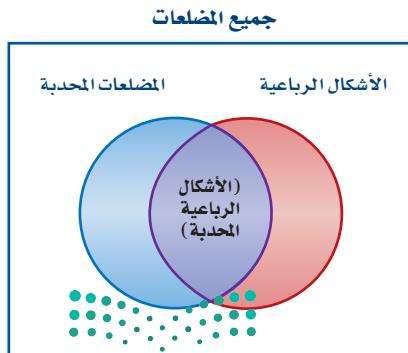
p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$

تحقق من فهمك

(3) أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge q$.

أشكال فن: يمكن تمثيل عبارة الوصل باستعمال أشكال فن. عُد إلى عبارة الوصل في بداية الدرس.

p و q : المستطيل شكل رباعي والمستطيل مضلع محدب.



تعلم أن المستطيلات أشكال رباعية، وهي أيضاً مضلعات محدبة، ويبيّن شكل فن أن المستطيلات تقع في منطقة تقاطع مجموعة الأشكال الرباعية ومجموعة المضلعات المحدبة.

وبمعنى آخر: تقع المستطيلات ضمن مجموعة الأشكال الرباعية، وأيضاً ضمن مجموعة المضلعات المحدبة.

إرشادات للدراسة

جداول الصواب:

كي يسهل عليك تذكر جداول الصواب لعبارتي الوصل والفصل، تذكر ما يأتي:

- عبارة الوصل تكون صائبة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها صائبة.
- عبارة الفصل تكون خاطئة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة.

إرشادات للدراسة

أشكال فن

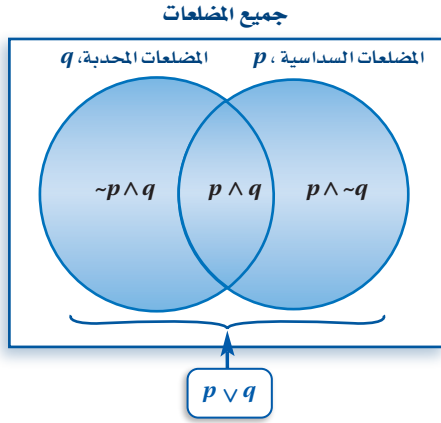
المستطيل الذي يُحيط أشكال فن يمثل المجموعة الكلية. شكل فن الذي يحوي دائرتين يُقسّم المجموعة الكلية إلى أربع مناطق على الأكثر. أما الشكل الذي يحوي ثلاث دوائر فيقسم المجموعة الكلية إلى 8 مناطق على الأكثر. ويمكن إثبات أن شكل فن الذي يحوي n من الدوائر يقسم المجموعة الكلية إلى 2^n من المناطق على الأكثر.

إرشادات للدراسة

تقاطع المجموعات

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما.

يمكن أيضًا تمثيل عبارة الفصل باستعمال أشكال فن. إليك العبارات الآتية:



p : الشكل سداسي.

q : الشكل مضلع محدب.

p أو q : الشكل سداسي أو مضلع محدب.

في شكل فن المجاور تمثل عبارة الفصل باتحاد المجموعتين، ويحوي الاتحاد جميع المضلعات التي هي إما سداسية أو محدبة أو كلاهما.

تتضمن عبارة الفصل المناطق الثلاث الآتية:

$p \wedge \sim q$ المضلعات السداسية غير المحدبة.

$\sim p \wedge q$ المضلعات المحدبة غير السداسية.

$p \wedge q$ المضلعات السداسية المحدبة.

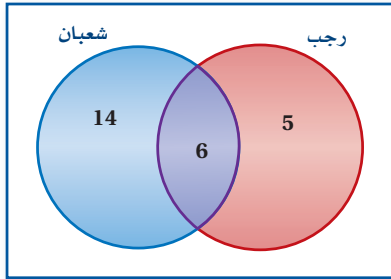
إرشادات للدراسة

اتحاد المجموعات

اتحاد مجموعتين هو مجموعة عناصرهما كلها.

مثال 4 من واقع الحياة استعمال أشكال فن

حملة الاقتصاد في استعمال الورق



بيئة: يُظهر شكل فن المجاور عدد الأشخاص الذين شاركوا في حملة بيئية للتوعية بأهمية الاقتصاد في استعمال الورق أقيمت خلال شهري رجب وشعبان.

(a) كم شخصًا شارك في الحملة لشهر رجب أو شعبان؟

(b) كم شخصًا شارك في الحملة خلال شهري رجب وشعبان؟

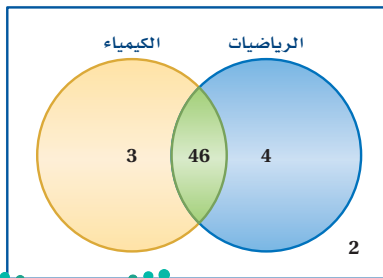
(c) ماذا يمثل العدد 14 في الشكل؟



الربط مع الحياة

الورق الذي تستعمله الولايات المتحدة في يوم واحد يمكن أن يحيط الكرة الأرضية 20 مرة، ولك أن تتخيل عدد الأشجار التي تقطع لصنع هذه الكمية من الورق.

اختباري الرياضيات والكيمياء



تحقق من فهمك

(4) **اختبارات:** يبين شكل فن المجاور عدد طلاب الصف الأول الثانوي الذين نجحوا والذين لم ينجحوا في اختباري الرياضيات أو الكيمياء.

(A) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات، ولم ينجحوا في اختبار الكيمياء؟

(B) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات واختبار الكيمياء؟

(C) ما عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في أي من الاختبارين؟

(D) ما عدد طلاب الصف الأول الثانوي؟

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسراً تبريرك:

p : في الأسبوع الواحد سبعة أيام.

q : في اليوم الواحد 20 ساعة.

r : في الساعة الواحدة 60 دقيقة.

(3) $q \vee r$

(2) $p \wedge q$

(1) r و p

(6) $\sim p \wedge \sim r$

(5) $p \vee r$

(4) $\sim p$ أو q

(7) أكمل جدول الصواب المجاور.

المثالان 1, 2

المثال 3

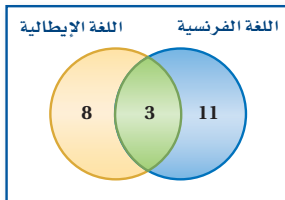
p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	
T	F		
F	T		
F	F		

أنشئ جدول صواب لكل من العبارتين المركبتين الآتيتين:

(9) $\sim p \vee \sim q$

(8) $p \wedge q$

دراسة اللغات



(10) **لغات:** استعمل شكل فن المجاور، والذي يمثل عدد الطلاب الذين

يدرسون اللغتين الفرنسية والإيطالية في معهد اللغات.

(a) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإيطالية فقط؟

(b) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإيطالية والفرنسية معاً؟

(c) ماذا يمثل العدد 11 في الشكل؟

المثال 4

تدرب وحل المسائل



استعمل العبارات p, q, r, s والخريطة المجاورة؛ لكتابة كل عبارة

وصِّل أو فصل أدناه. ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسراً تبريرك:

p : الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية.

q : تقع مكة المكرمة على الخليج العربي.

r : توجد حدود مشتركة للمملكة العربية السعودية مع العراق.

s : المملكة العربية السعودية تقع غربي البحر الأحمر.

المثالان 1, 2

(13) s أو $\sim r$

(12) $p \wedge q$

(11) r و p

(16) $\sim s \vee \sim p$

(15) $\sim r$ و $\sim p$

(14) $r \vee q$

أكمل جدول الصواب الآتي:

المثال 3

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T		F	
T		F	
F		T	
F		T	

(17)



وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

أنشئ جدول الصواب لكل من العبارات المركبة الآتية:

$\sim p \wedge r$ (20)

$\sim (\sim r \wedge q)$ (19)

$\sim (\sim p)$ (18)

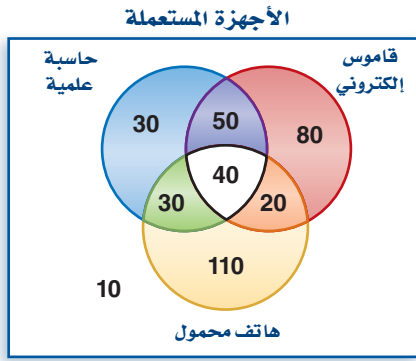
يسمح له بالذهاب	الطلاب المسموح لهم بالذهاب في الرحلة	
	الاختبار الأول	الاختبار الثاني
	تفوق	
T	تفوق	لم يتفوق

(21) **مكافآت:** قرر مدرس الرياضيات مكافأة الطلاب المتفوقين باصطحابهم في رحلة مدرسية، وقرر أن تكون القاعدة أنه "إذا تفوق الطالب في الاختبار الأول أو الاختبار الثاني فإنه سيذهب في الرحلة".

(a) أكمل جدول الصواب المجاور.

(b) إذا تفوق الطالب في الاختبارين، فهل سيذهب في هذه الرحلة؟

(c) إذا تفوق الطالب في الاختبار الأول فقط، فهل سيذهب في هذه الرحلة؟



(22) **إلكترونيات:** سُئل 370 شخصاً من الفئة العمرية بين 13-19 سنة عن الجهاز الذي يستعملونه من بين الهاتف المحمول والقاموس الإلكتروني والحاسبة العلمية، ومُثلت نتائج الاستطلاع بشكل فن المجاور.

(a) ما عدد الذين يستعملون حاسبة علمية وقاموساً إلكترونياً فقط؟

(b) ما عدد الذين يستعملون الأجهزة الثلاثة؟

(c) ما عدد الذين يستعملون هاتفاً محمولاً فقط؟

(d) ما عدد الذين يستعملون قاموساً إلكترونياً وهاتفاً محمولاً فقط؟

(e) ماذا يمثل العدد 10 في الشكل؟

أنشئ جدول الصواب لكل من العبارات المركبة الآتية. ثم عيّن قيمة الصواب لكل منها، إذا علمت أن العبارات p, q, r تكون صائبة إذا تم ذكرها بجانب العبارة المعطاة، وخاطئة إذا لم تذكر:

$(\sim p \vee q) \wedge r; q, r$ (25) $p \wedge (\sim q \vee r); p, r$ (24) $p \wedge (q \wedge r); p, q$ (23)

$(\sim p \vee q) \vee \sim r; p, q$ (28) $\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r); p, q, r$ (27) $p \vee (\sim q \wedge \sim r); p, q, r$ (26)

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدّ: لنفي العبارة التي تحوي كلمة "جميع" أو "كل"، يمكنك استعمال جملة "يوجد واحد على الأقل" أو "هناك واحد على الأقل". ولنفي العبارة التي تحوي كلمة "يوجد"، يمكنك استعمال كلمة "جميع" أو "كل".

p : جميع المضلعات محدبة. $\sim p$: يوجد مضلع واحد على الأقل ليس محدباً.

q : توجد مسألة ليس لها حل. $\sim q$: جميع المسائل لها حل.

انفِ كلاً من العبارات الآتية:

(29) جميع المربعات مستطيلات.

(31) لكل عدد حقيقي جذر تربيعي حقيقي.

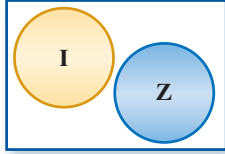
(30) على الأقل يوجد طالب واحد يدرس اللغة العربية التعليم

Ministry of Education

(32) توجد قطعة مستقيمة ليس لها نقطة منتصف.

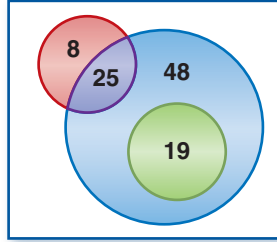
2021 - 1443

R



(33) تبرير: الأعداد غير النسبية (I)، والأعداد الصحيحة (Z) تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (R). معتمداً على شكل فن المجاور، هل صحيح أحياناً أم دائماً، أم غير صحيح أبداً، أن الأعداد الصحيحة هي أعداد غير نسبية؟ فسر تبريرك.

(34) اكتب: صف موقفاً يمكن تمثيله بشكل فن الآتي.



(35) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة مركبة صائبة تحوي « و » فقط.

تدريب على اختبار

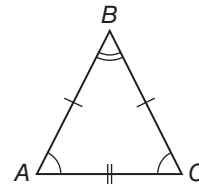
(37) خمن الحد التالي في النمط ... $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3$

$\frac{11}{3}$ C

$\frac{8}{3}$ A

$\frac{9}{3}$ D

4 B



(36) أيُّ العبارات الآتية لها نفس قيمة صواب العبارة $AB = BC$ ؟

$AC = BC$ C

$m\angle A = m\angle C$ A

$AB = AC$ D

$m\angle A = m\angle B$ B

مراجعة تراكمية

(38) طعام: في كل يوم ثلاثاء من الأسابيع الأربعة الماضية، قدّم مطعم سلطنة فواكه هدية بعد كل وجبة. افترض جميل أنه سيتم تقديم سلطنة فواكه يوم الثلاثاء القادم. ما نوع التبرير الذي استعمله جميل؟ فسر إجابتك. **(الدرس 1-1)**

خمن الحد التالي في كلٍّ من المتتابعات الآتية. **(مهارة سابقة)**

$6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ (41)

$1, 3, 9, 27$ (40)

$3, 5, 7, 9$ (39)

جبر: حل كلًّا من المعادلات الآتية: **(مهارة سابقة)**

$4(m - 5) = 12$ (44)

$3x + 9 = 6$ (43)

$\frac{y}{2} - 7 = 5$ (42)

$\frac{y}{5} + 4 = 9$ (47)

$2x - 7 = 11$ (46)

$6(w + 7) = 0$ (45)

استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجد قيمة كلٍّ من العبارات الجبرية الآتية للقيم المعطاة.

$2y + 3x$ إذا كانت $x = -1, y = 3$ (48)

$m^2 + 7n$ إذا كانت $n = -2, m = 4$ (50)

$4d - c$ إذا كانت $c = 2, d = 4$ (49)

$ab - 2a$ إذا كانت $a = -2, b = -3$ (51)





العبارات الشرطية

Conditional Statements

1-3



إذا كنت تريد التحدث
إلى قسم خدمة العملاء،
فاضغط الرقم 2.

لماذا؟

عند إجراء مكالمات هاتفية مع بعض المؤسسات، يحيلك جهاز الرد الآلي إلى قائمة من البدائل تختار منها القسم الذي تريد، ويُسمعك إرشادات بصيغة عبارات شرطية.

عبارة إذا... فإن... : العبارة الشرطية هي عبارة يمكن كتابتها

على صورة (إذا... فإن...). والإرشاد المبين في الصورة أعلاه مثال على العبارة الشرطية.

فيما سبق:

درسنا استعمال المنطق
وأشكال فن لتحديد قيم
الصواب لعبارات النفي
والوصل والفصل.

(الدرس 1-2)

والآن:

- أحلل العبارة الشرطية
(إذا... فإن...).
- أكتب العكس، والمعكوس،
والمعاكس الإيجابي،
لعبارات (إذا... فإن...).

المفردات:

العبارة الشرطية

conditional statement

الفرض

hypothesis

النتيجة

conclusion

العبارات الشرطية

المرتبطة

related conditionals

العكس

converse

المعكوس

inverse

المعاكس الإيجابي

contrapositive

التكافؤ المنطقي

logically equivalent

أضف إلى مطويتك	مفهوم أساسي	العبارة الشرطية
مثال	الرموز	التعبير اللفظي
إذا كان الشكل مربعاً فإنه مستطيل.	$p \rightarrow q$ وتقرأ إذا كان p فإن q ، أو p تؤدي إلى q	العبارة الشرطية (إذا... فإن...)
الشكل مربع.	p	في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (إذا) مباشرة الفرض .
الشكل مستطيل.	q	في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (فإن) مباشرة النتيجة .

عندما تكتب العبارة الشرطية على صورة (إذا... فإن...)، يمكنك تحديد الفرض والنتيجة فيها بسهولة.

مثال 1

تحديد الفرض والنتيجة

حدّد الفرض والنتيجة في كلّ من العبارات الشرطية الآتية:

(a) إذا كان الطقس ماطرًا، فسوف أستعمل المظلة.

الفرض:

النتيجة:

(b) يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان أحاده صفراً.

الفرض:

النتيجة:

تحقق من فهمك

(1A) إذا كان لمضلع ستة أضلاع، فإنه سداسي.

(1B) سيتم إنجاز طبعة ثانية من الكتاب، إذا بيعت نسخ الطبعة الأولى كلّها.



وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

تكتب كثير من العبارات الشرطية دون استعمال الكلمتين (إذا، فإن)، ولكتابة تلك العبارات على صورة (إذا ... فإن ...) حدد الفرض والنتيجة.

تحصل على خصم تشجيعي النتيجة
عند شرائك آياً من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء الفرض

إذا اشتريت آياً من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء، فإنك تحصل على خصم تشجيعي.

تذكر أن النتيجة تعتمد على الفرض.

قراءة الرياضيات

(إذا) و (فإن)

كلمة (إذا) ليست جزءاً من الفرض، كذلك كلمة (فإن) ليست جزءاً من النتيجة.

مثال 2

كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا... فإن...)

حدّد الفرض والنتيجة في كل عبارة شرطية مما يأتي، ثم اكتبها على صورة (إذا... فإن...):

(a) الثدييات حيوانات من ذوات الدم الحار.

الفرض:

النتيجة:

(b) المنشور الذي قاعدته مضلعان منتظمان، يكون منتظماً.

الفرض:

النتيجة:

تحقق من فهمك

(2A) يمكن تبديل 5 أوراق نقدية من فئة الريال بورقة نقدية واحدة من فئة 5 ريالات.

(2B) مجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين يساوي 90°

تذكر أن الفرض والنتيجة والعبارة الشرطية نفسها جميعها عبارات قد تكون صائبة وقد تكون خاطئة.

قال عمر لزملائه: إذا أنهيت واجبي المنزلي، فإني سوف ألعب الكرة معكم.

العبارة الشرطية	النتيجة	الفرض
إذا أنهيت واجبي المنزلي، فإني سوف ألعب الكرة معكم.	يلعب عمر الكرة مع زملائه	أنهى عمر الواجب المنزلي
إذا أنهى عمر واجبه المنزلي، ولعب الكرة مع زملائه، فإن العبارة الشرطية تكون صائبة؛ لأنه أوفى بوعده.	T	T
إذا أنهى عمر واجبه المنزلي ولم يلعب الكرة مع زملائه، تكون العبارة الشرطية خاطئة؛ لأنه لم يَفِ بوعده.	F	T
إذا لم يُنهَ عمر واجبه، ولعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئاً ولكن النتيجة صائبة. وبما أن العبارة الشرطية لا تقرر شيئاً في حالة عدم حل عمر واجبه، فإن الأمر راجع إلى عمر، إما أن يلعب الكرة مع زملائه أو لا، وتكون العبارة الشرطية صائبة بغض النظر عما يفعله عمر.	T	F
إذا لم يُنهَ عمر واجبه، ولم يلعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئاً، والنتيجة خاطئة. وللسبب نفسه في الحالة السابقة تكون العبارة الشرطية صائبة.	T	F

قراءة الرياضيات

ليست خاطئة

إذا كانت العبارة المنطقية ليست خاطئة؛ فإنها تكون صائبة.

لاحظ أن العبارة الشرطية تكون صائبة في جميع الحالات، إلا أن يكون الفرض صائباً والنتيجة خاطئة.

Ministry of Education

2021 - 1443

الدرس 1-3 العبارات الشرطية 27

يمكنك استعمال النتائج السابقة لإنشاء جدول الصواب للعبارات الشرطية.

العبارات الشرطية		
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تكون العبارة الشرطية خاطئة فقط عندما يكون الفرض صائبًا والنتيجة خاطئة.

عندما يكون الفرض خاطئًا، تكون العبارة الشرطية صائبة بغض النظر عن النتيجة.

تنبيه!

تحليل العبارات الشرطية

عند تحديد قيم الصواب للعبارة الشرطية، لا تحاول أن تحدد ما إذا كان للعبارة معنى أم لا، بل اهتم بالسؤال: هل النتيجة تتبع الفرض بالضرورة؟

لإثبات صحة العبارة الشرطية، يجب عليك إثبات أنه عندما يكون الفرض صائبًا، فإن النتيجة صائبة أيضًا. ولإثبات أن العبارة الشرطية خاطئة يكفي أن تعطي مثالًا مضادًا.

قيم الصواب للعبارات الشرطية

مثال 3

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا مضادًا:

(a) عند قسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر، يكون الناتج عددًا صحيحًا أيضًا.

(b) إذا كان الشهر القادم هو رمضان، فإن هذا الشهر هو شهر شعبان.

(c) إذا كان للمثلث أربعة أضلاع، فإنه مضلعٌ مقعّرٌ.

تحقق من فهمك

(3A) إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35^\circ$

(3B) إذا كان $\sqrt{x} = -1$ ، فإن $(-1)^2 = -1$



العبارات الشرطية المرتبطة: يرتبط بالعبارتين الشرطيتين المعطاة عبارات شرطية أخرى تسمى **العبارات الشرطية المرتبطة**.

أضف إلى مطويتك	العبارات الشرطية المرتبطة	مفهوم أساسي
أمثلة	الرموز	التعبير اللفظي
إذا كان $m\angle A = 35^\circ$ ، فإن $\angle A$ حادة.	$p \rightarrow q$	العبارتين الشرطيتين هي العبارتين التي يمكن كتابتهما على صورة إذا كان p ، فإن q .
إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35^\circ$.	$q \rightarrow p$	ينتج العكس من تبديل الفرض مع النتيجة في العبارتين الشرطيتين.
إذا كان $m\angle A \neq 35^\circ$ ، فإن $\angle A$ ليست حادة.	$\sim p \rightarrow \sim q$	ينتج المعكوس عن نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارتين الشرطيتين.
إذا لم تكن $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A \neq 35^\circ$.	$\sim q \rightarrow \sim p$	ينتج المعكوس الإيجابي من نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارتين الشرطيتين.

إذا كانت العبارتين الشرطيتين صائبين، فليس بالضرورة أن يكون عكسها ومعكوسها صائبين، بينما يكون المعكوس الإيجابي صائباً. ويكون المعكوس الإيجابي خاطئاً إذا كانت العبارتين الشرطيتين خاطئتين. وبالمثل فإن عكس العبارتين الشرطيتين ومعكوسها إما أن يكونا صائبين معاً أو خاطئين معاً. وتسمى العبارتين التي لها قيم الصواب نفسها **عبارتين متكافئتين منطقياً**.

مثال 4 جداول الصواب والعبارات المتكافئة منطقياً

أوجد قيم الصواب للعبارتين الشرطيتين وعكسها ومعكوسها ومعكوسها الإيجابي على نفس الجدول، ثم اكتب عبارتين متكافئتين منطقياً.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	العبارتين الشرطيتين $p \rightarrow q$	عكس العبارتين الشرطيتين $q \rightarrow p$	معكوس العبارتين الشرطيتين $\sim p \rightarrow \sim q$	المعكوس الإيجابي $\sim q \rightarrow \sim p$

تحقق من فهمك

(4) أوجد قيم الصواب للعبارتين: $p \wedge \sim q$ ، $\sim(p \vee q)$ ، $\sim p \vee \sim q$ ، $\sim(p \wedge q)$ على نفس الجدول، ثم اكتب زوجين من العبارتين المتكافئتين منطقياً.

مما سبق نلاحظ أن:

العبارات المتكافئة منطقياً

- العبارتين الشرطيتين ومعكوسها الإيجابي متكافئتان منطقياً.
- عكس العبارتين الشرطيتين ومعكوسها متكافئتان منطقياً.
- $\sim(p \wedge q)$ تكافئ منطقياً $\sim p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q)$ تكافئ منطقياً $\sim p \wedge \sim q$

يمكنك استعمال التكافؤ المنطقي للتحقق من قيمة الصواب لعبارة ما. في المثال 5 أدناه، لاحظ أن كلاً من العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي صائبان. وأن كلاً من العكس والمعكوس خاطئان.

مثال 5 من واقع الحياة العبارات الشرطية المرتبطة

طبيعة: اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة؛ لتحديد ما إذا كان أيٌّ منها صائباً أم خاطئاً. وإذا كان خاطئاً، فأعط مثلاً مضاداً. الأسود هي قطط تستطيع أن تزأر.
العبارة الشرطية:



الربط مع الحياة

تُعد الأسود والنمور من فصيلة القطط، وهي القطط الوحيدة التي تزأر، ولا تموء.

العكس:

المعكوس:

المعاكس الإيجابي:

تحقق:

تحقق من فهمك

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارتين الشرطيتين الآتيتين، ثم حدد ما إذا كان أيٌّ منها صائباً أم خاطئاً. وإذا كان خاطئاً فأعط مثلاً مضاداً.
(5A) الزاويتان اللتان لهما القياس نفسه متطابقتان.
(5B) الفأر من القوارض.

تأكد

المثال 1

حدّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:

- 1) يوم غد هو السبت إذا كان اليوم هو الجمعة.
- 2) إذا كان $2x + 5 > 7$ ، فإن $x > 1$.
- 3) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإن مجموع قياسيهما 180° .
- 4) يكون المستقيمان متعامدين إذا نتج عن تقاطعهما زاوية قائمة.



المثال 2

اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا... فإن...).

- (5) الشخص الذي تجاوز عمره 18 عامًا يمكنه استخراج رخصة قيادة.
- (6) يحتوي الجبن على عنصر الكالسيوم.
- (7) قياس الزاوية الحادة بين 0° و 90°
- (8) المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا.
- (9) **مطر:** هناك أنواع مختلفة من هطل المطر، تتشكل في ظروف مختلفة. اكتب العبارات الشرطية الثلاث الآتية على صورة (إذا... فإن...).
- (a) يتكاثف بخار الماء في الغلاف الجوي فيسقط على شكل مطر.
- (b) يتجمد بخار الماء الشديد البرودة في الغيوم الركامية فيسقط على شكل برد.
- (c) يكون الهطل على شكل ثلج، عندما تكون درجة الحرارة متدنية جدًا إلى حد التجمد في الغلاف الجوي.

المثال 3

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت العبارة صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعط مثالاً مضاداً.

- (10) إذا كان $x^2 = 16$ ، فإن $x = 4$
- (11) إذا كنت تعيش في الرياض، فإنك تعيش في الكويت.
- (12) إذا كان يوم غد هو الجمعة، فإن اليوم هو الخميس.
- (13) إذا كان للحيوان قرنان، فإنه كبش.
- (14) إذا كان قياس الزاوية القائمة 95° ، فإن النحلة تكون سحلية.

المثال 4

أوجد قيم الصواب لكل عبارتين فيما يأتي، ثم قرّر هل هما مكافئتان منطقيًا أم لا؟

$$\sim p \wedge q, \sim (p \wedge q) \quad (15)$$

$$\sim p \vee \sim q, \sim (p \vee q) \quad (16)$$

المثال 5

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل من العبارتين الشرطيتين الآتيتين. ثم حدّد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا، وإذا كان خاطئًا فأعط مثالاً مضاداً.

- (17) إذا كان العدد يقبل القسمة على 2، فإنه يقبل القسمة على 4
- (18) جميع الأعداد الكلية أعداد صحيحة.

تدرب وحل المسائل

المثال 1

حدّد الفرض والنتيجة في كلّ من العبارات الشرطية الآتية:

(19) إذا كانت الزاويتان متجاورتين، فإن لهما ضلعًا مشتركًا.

(20) إذا كنت قائد مجموعة، فإنني سأتابعك.



(21) إذا كان $3x - 4 = 11$ ، فإن $x = 5$

(22) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما متطابقتان.

اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا ... فإن ...).

(23) احصل على قارورة ماء مجاناً عند شرائك خمس قوارير.

(24) كل من حضر الحفل سيحصل على هدية.

(25) تقاطع مستويين يمثل مستقيماً.

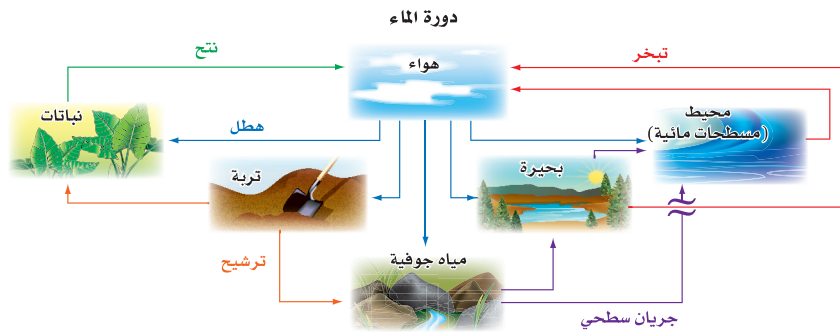
(26) مساحة الدائرة تساوي πr^2

(27) قياس الزاوية القائمة 90°

(28) **كيمياء:** اكتب العبارة الآتية على صورة (إذا... فإن...).

ينصهر الفوسفور عند درجة 44° سيليزية.

(29) **أحياء:** يتغير الماء على الأرض باستمرار عبر عملية تُسمى دورة الماء. اكتب العبارات الشرطية الثلاث أدنى الشكل على صورة (إذا... فإن...).



(a) جريان الماء السطحي يصب في المسطحات المائية.

(b) تعيد النباتات الماء إلى الهواء من خلال عملية النتج.

(c) تعيد المسطحات المائية الماء إلى الهواء عن طريق التبخر.

حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي. وإذا كانت صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعط مثلاً مضاداً:

(30) إذا كان العدد فردياً، فإنه يقبل القسمة على 5

(31) إذا كان الأرنب حيواناً برمائياً، فإن هذا الفصل هو فصل الصيف.

(32) إذا كانت جدة في اليمن، فإن صنعاء هي عاصمة المملكة العربية السعودية.

(33) إذا نتج اللون الأبيض عن مزج اللونين الأزرق والأحمر، فإن $3 - 2 = 0$

(34) إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإنهما متقابلتان بالرأس.

(35) إذا كان الحيوان طائراً، فإنه يكون نسرًا.

(36) إذا كان الموز أزرق، فإن التفاح من الخضراوات.



طبيعة: استعمل العبارة أدناه لكتابة كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة لتحديد قيمة الصواب لكلٍّ منها، وإذا كانت أيٌّ منها خاطئة، فأعط مثالاً مضاداً.

“الحيوان الذي تظهر على جسمه خطوط هو الحمار الوحشي”.

(37) عبارة شرطية (38) عكس العبارة الشرطية

(39) معكوس العبارة الشرطية (40) المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية

أوجد قيم الصواب لكل عبارتين فيما يأتي، ثم قرّر هل هما متكافئتان منطقيًا أم لا؟

$$(41) \sim(p \rightarrow q), \sim p \rightarrow \sim q$$

$$(42) \sim(p \rightarrow q), \sim(\sim q \rightarrow \sim p)$$

$$(43) (p \wedge q) \vee r, p \wedge (q \vee r)$$

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، ثم حدّد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالاً مضاداً.

(44) إذا كنت تعيش في الدمام، فإنك تعيش في المملكة العربية السعودية.

(45) إذا كان الطائر نعمة، فإنه لا يستطيع أن يطير.

(46) جميع المربعات مستطيلات.

(47) جميع القطع المستقيمة المتطابقة لها الطول نفسه.

(48) المثلث القائم الزاوية يحوي زاوية قياسها 90°

استعمل أشكال فن أدناه؛ لتحديد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية. وفّر تبريرك.

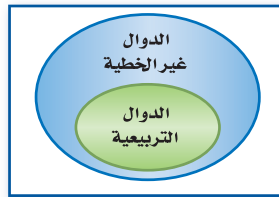
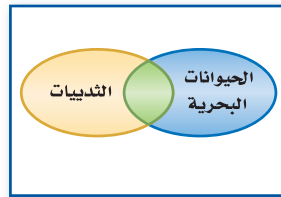
المثال 4

المثال 5



الربط مع الحياة

موطن ظباء الدكدك هو أفريقيا، وهي ظباء صغيرة الحجم؛ يبلغ متوسط طولها من قدم واحدة إلى ما يزيد على قدمين قليلاً، وتتميز أجسامها بخطوط تشبه خطوط الحمار الوحشي.



(49) إذا كانت الدالة غير خطية، فإنها تكون دالة تربيعية.

(50) إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه لا يكون حيواناً بحرياً.

(51) إذا كانت الشجرة متساقطة الأوراق، فإنها لا تكون دائمة الخضرة.

(52) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي أحد قوانين المنطق باستعمال العبارات الشرطية.

(a) **منطقيًا:** اكتب ثلاث عبارات شرطية صائبة، بحيث تكون نتيجة كل عبارة فرضاً للعبارة التي تليها.

(b) **بيانيًا:** ارسم شكل فن يوضح هذه السلسلة من العبارات الشرطية.

(c) **منطقيًا:** اكتب عبارة شرطية مستعملاً فرض العبارة الأولى، ونتيجة العبارة الثالثة. إذا كان فرض العبارة الأولى صائباً، فهل تكون العبارة الشرطية الناتجة صائبة؟

(d) **لفظيًا:** إذا أعطيت العبارتين الشرطيتين الصائبتين: إذا كان a ، فإن b ، وإذا كان b ، فإن c ، فاكتب تخميناً حول قيمة الصواب للعبارة c عندما تكون العبارة a صائبة. وفّر تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) اكتشف الخطأ: حدّد كلٌّ من أحمد وماجد قيمة الصواب للعبارة الشرطية "إذا كان العدد 15 أولياً، فإن العدد 20 يقبل القسمة على 4". كلاهما يعتقد أن هذه العبارة صائبة، ولكنهما برّرا ذلك بتبريرين مختلفين. أيُّهما كان مصيباً؟ فسّر تبريرك.

ماجد
الفرض خاطئ؛ لأن 15 ليس عدداً
أولياً؛ إذن العبارة الشرطية
صائبة.

أحمد
النتيجة صائبة؛ لأن العدد 20
يقبل القسمة على 4؛ إذن العبارة
الشرطية صائبة.

54) تبرير: عبارة شرطية فرضها صائب، ونتيجتها خاطئة. هل يكون معكوسها صائباً؟

55) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة شرطية، بحيث يكون العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لها جميعها صائبة. فسّر تبريرك.

56) تحدّد: تجد أدناه معكوس العبارة الشرطية A. اكتب العبارة الشرطية A وعكسها ومعاكسها الإيجابي. فسّر تبريرك.

"إذا لم تدرك تكبيرة الإحرام مع الإمام، فإنك ذهبت إلى المسجد متأخراً."

57) اكتب: صف العلاقة بين العبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي.

تدريب على اختبار

59) جبر: ما أبسط صورة للعبارة $\frac{10a^2 - 15ab}{4a^2 - 9b^2}$ ؟

C $\frac{a}{2a + 3b}$

A $\frac{5a}{2a - 3b}$

D $\frac{a}{2a - 3b}$

B $\frac{5a}{2a + 3b}$

58) إذا كان مجموع قياسيّ زاويتين يساوي 90° فإنهما متتامتان. أيُّ العبارات الآتية هي عكس العبارة الشرطية أعلاه؟

A إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما 90°

B إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما 90°

C إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي 90°

D إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي 90°



مراجعة تراكمية

أنشئ جدول الصواب لكل من العبارات المركبة الآتية. (الدرس 1-2)

(63) $\sim p \wedge \sim q$

(62) $\sim p \wedge q$

(61) $\sim q \vee p$

(60) $q \wedge p$

اكتب تخمينًا معتمدًا على المعلومات المعطاة في كل مما يأتي. وارسم شكلًا يوضح تخمينك (الدرس 1-1)

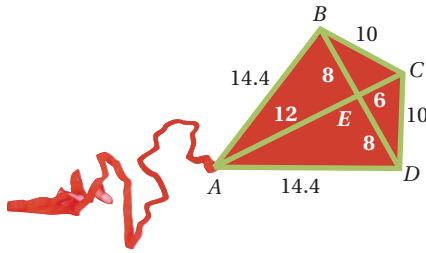
(64) تقع النقاط J, H, K على أضلاع مختلفة لمثلث.

(65) $R(3, -4), S(-2, -4), T(0, -4)$

(66) $A(-1, -7), B(4, -7), C(4, -3), D(-1, -3)$

(67) **طائرة ورقية:** تصنع الطائرات الورقية بشكل يشبه الماسة؛ لذلك تسمى الطائرة الماسية.

سم جميع القطع المستقيمة المتطابقة في الشكل المجاور. (مهارة سابقة)



استعد للدرس اللاحق

جبر: حدّد العملية التي استعملتها لتحويل المعادلة (1) إلى المعادلة (2) في كل مما يأتي.

(70) $\frac{1}{3}m = 2$ (1)

$m = 6$ (2)

(69) $x + 9 = 4 - 3x$ (1)

$4x + 9 = 4$ (2)

(68) $8(y - 11) = 32$ (1)

$y - 11 = 4$ (2)



العبارة الشرطية الثنائية Biconditional Statments

1-3



يُعدُّ سعد أفضل طلاب المدرسة في لعبة كرة القدم. وإذا انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية. إذا مثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه يكون قد انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

p : انتُخب سعد من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

q : مثل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$p \rightarrow q$: إذا انتُخب سعد من قبل فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$q \rightarrow p$: إذا مثل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه قد انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

في هذه الحالة، العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ وعكسها $q \rightarrow p$ كلاهما صائب. والعبارة المركبة الناتجة عن وصل هاتين العبارتين باستعمال (و) تسمى عبارة شرطية ثنائية.

أضف إلى

مطوبتك

العبارة الشرطية الثنائية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: العبارة الشرطية الثنائية هي عبارة وصل مكونة من العبارة الشرطية وعكسها.

الرموز: $(p \leftrightarrow q)$ ، ويُرمز لها اختصاراً $(p \leftrightarrow q)$ ، وتقرأ p إذا وفقط إذا كان q

إذن تُكتب العبارة الشرطية الثنائية السابقة على النحو التالي:

$p \leftrightarrow q$: يُنتخب سعد من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي إذا وفقط إذا مثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

مثال

اكتب كلاً من العبارتين الشرطيتين الثنائيتين الآتيتين على صورة عبارة شرطية وعكسها، ثم حدّد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثلاً مضاداً.

(a) تكون الزاوية قائمة إذا وفقط إذا كان قياسها 90°

العبارة الشرطية: إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها 90°

العكس: إذا كان قياس الزاوية 90° ، فإنها زاوية قائمة.

كلٌّ من العبارة الشرطية وعكسها صائبان؛ إذن العبارة الشرطية الثنائية صائبة.

(b) x عددٌ موجبٌ إذا وفقط إذا كان $x > -2$

العبارة الشرطية: إذا كان x عدداً موجباً، فإن $x > -2$. العبارة الشرطية صائبة.

العكس: إذا كان $x > -2$ ، فإن x عدد موجب. افترض أن $x = -1$ ؛ إذن $-1 > -2$ ، لكن -1 ليس عدداً موجباً؛ إذن عكس العبارة الشرطية خاطئ، والعبارة الشرطية الثنائية خاطئة.

تمارين:

اكتب كل عبارة شرطية ثنائية مما يأتي على صورة عبارة شرطية وعكسها. ثم حدّد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثلاً مضاداً.



(1) تكون الزاويتان متتامتين إذا وفقط إذا كان مجموع قياسيهما 90° (2) لا دوام في المدارس إذا وفقط إذا كان اليوم هو الجمعة.

(4) $|2x| = 4$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$

(3) يتقاطع المستقيمان إذا وفقط إذا كانا غير أفقيين.

التبرير الاستنتاجي

Deductive Reasoning

لماذا؟

عندما يقوم المحققون بتحليل قضية جنائية، فإنهم يجمعون الأدلة مثل بصمات الأصابع، ويستعملونها لتقليص قائمة الاتهام، باستبعاد المتهمين وتحديد الجاني في نهاية الأمر.



التبرير الاستنتاجي: الطريقة التي يستعملها المحققون من أجل تحديد الجاني تُسمى التبرير الاستنتاجي.

وكما ترى فإن **التبرير الاستنتاجي** يستعمل حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص من أجل الوصول إلى نتائج منطقية من عبارات معطاة، على خلاف التبرير الاستقرائي الذي تستعمل فيه أنماط من الأمثلة أو المشاهدات لعمل تخمين.

فيما سبق:

درست استعمال التبرير الاستقرائي لتحليل الأنماط ووضع تخمينات.

(الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل قانون الفصل المنطقي للتبرير الاستنتاجي.
- أستعمل قانون القياس المنطقي للتبرير الاستنتاجي.

المفردات:

التبرير الاستنتاجي

deductive reasoning

قانون الفصل المنطقي

Law of Detachment

قانون القياس المنطقي

Law of Syllogism

مثال 1 من واقع الحياة التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي

حدّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلّ مما يأتي:

(a) في كل مرة تستخدم هند الخلطة الجاهزة لإعداد قالب كيك، تلاحظ أن قالبها صغير لا يكفي لخبز الكيك، جهزت هند اليوم خلطة الكيك فاستنتجت أن قالبها لن يكفي لخبز الكيك.

(b) إذا تأخر مشاري عن دفع قسط سيارته، فإنه سيقوم بدفع غرامة تأخير مقدارها 150 ريالاً. تأخر مشاري عن دفع قسط هذا الشهر، فاستنتج أن عليه دفع غرامة مقدارها 150 ريالاً.

تحقق من فهمك



(1A) يُجري طالب مرحلة ابتدائية تجربة دمج الألوان في المختبر، فقام بثلاث محاولات للحصول على درجة معينة من اللون الرمادي، فاكشف أنه كلما زادت كمية اللون الأسود كانت درجة اللون الرمادي أعمق.

(1B) دُعي خالد إلى حفل عشاء، وقد حضر جميع المدعوين الحفل؛ إذن فقد حضر خالد الحفل.

قانون الفصل المنطقي: يستعمل المثال المضاد لإثبات عدم صحة التخمين الذي يتمّ العوصل إليه عن طريق التبرير الاستقرائي، ولا يعد المثال طريقة صائبة لإثبات صحة التخمين. فلا إثبات صحة التخمين يجب استعمال التبرير الاستنتاجي، وأحد أشكاله **قانون الفصل المنطقي**.

أضف إلى
مطويتك

مفهوم أساسي
قانون الفصل المنطقي

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صائبة، والفرض p صائبًا، فإن النتيجة q تكون صائبة أيضًا.

مثال: المعطيات: إذا لم يكن في السيارة وقود، فإنها لن تعمل. لا يوجد وقود في سيارة عبدالله.

نتيجة صائبة: لن تعمل سيارة عبدالله.

عندما تكون العبارات المعطاة صائبة، فإن النتائج التي تتوصل إليها بتطبيق التبرير الاستنتاجي حتمًا تكون صائبة.

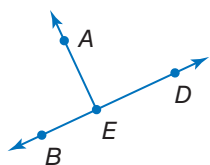
إرشادات للدراسة

المعلومات المعطاة

من الآن فصاعدًا اعتبر جميع المعطيات في الكتاب صائبة.

مثال 2 استعمال قانون الفصل المنطقي

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا في كل مما يأتي أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك.



- (a) المعطيات: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإن ضلعيهما غير المشتركين يكونان نصفي مستقيم متعاكسين. $\angle AEB$ و $\angle AED$ متجاورتان على مستقيم.

الاستنتاج: $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{ED}$ نصفان مستقيمان متعاكسان.

الخطوة 1:

الخطوة 2:

- (b) المعطيات: عندما يذهب مالك إلى النادي الرياضي، فإنه يرتدي ملابس رياضية. ارتدى مالك ملابس رياضية.

الاستنتاج: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

الخطوة 1:

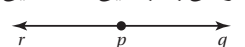
الخطوة 2:

إرشادات للدراسة

نصف المستقيم

المتعاكسان

هما نصفا المستقيم نفسه لهما نقطة البداية نفسها، ولكن باتجاهين متعاكسين.



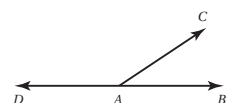
$\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr}$

نصفان مستقيمان متعاكسان

الزاويتان المتجاورتان

على مستقيم

هما زاويتان متجاورتان؛ بحيث يكون ضلعاها غير المشتركين نصفي مستقيم متعاكسين.



$\angle DAC, \angle BAC$

متجاورتان على مستقيم

تحقق من فهمك

- (2A) المعطيات: إذا كانت ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة، فإنها تحدد مستوى.

النقاط A, B, C تقع في المستوى G .

الاستنتاج: النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

- (2B) المعطيات: إذا حضر الطالب موافقة من ولي أمره، فإنه يمكنه الذهاب في الرحلة المدرسية.

أحضر سلمان موافقة من ولي أمره.

الاستنتاج: يمكن أن يذهب سلمان في الرحلة المدرسية.



وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

مثال 3 من واقع الحياة

الحكم على الاستنتاج باستعمال أشكال فن

- مكافآت وحوافز:** صرفت شركة خاصة مكافآت وحوافز لبعض موظفيها؛ بناءً على المعلومات أدناه. حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا، اعتمادًا على المعطيات.
- المعطيات:
- إذا صُرف للموظف مكافأة، فإن عدد ساعات عمله تكون قد تجاوزت 175 ساعة في الشهر.
 - تجاوز عدد الساعات التي عملها محمد 175 ساعة في الشهر.
- الاستنتاج: صُرف لمحمد مكافأة.
- افهم:



الربط مع الحياة

حوافز: هي وسائل وعوامل من شأنها حث الموظفين والعمال على أداء أعمالهم بجد وإخلاص، وتشجيعهم على بذل أكبر جهد في مجال الإنتاج، وهي تتنوع ما بين الحوافز المادية كالتقدير المادي، والحوافز المعنوية كالمشاركة في الأهداف المستقبلية وشهادات التقدير وغيرها.

خطط:

حل:

تحقق:

تحقق من فهمك

- (3) المعطيات: • إذا كان الشكل مربعًا، فإنه مضلع.
- الشكل A مربع.
- الاستنتاج: الشكل A مضلع.

قانون القياس المنطقي: قانون القياس المنطقي هو طريقة أخرى للتبرير الاستنتاجي، وباستعمال هذا القانون يمكنك الحصول على نتائج من عبارتين شرطيتين صائبتين، وذلك عندما تكون نتيجة العبارة الشرطية الأولى هي الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

إرشادات للدراسة

الدليل المنطقي يكون مدعومًا بقوانين المنطق، ويختلف عن الدليل الإحصائي المدعوم بالأمثلة أو البيانات.

أضف إلى

مطوياتك

قانون القياس المنطقي

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارتان الشرطيتان $q \rightarrow r$, $p \rightarrow q$ صائبتين، فإن العبارة الشرطية $p \rightarrow r$ صائبة أيضًا.

مثال: المعطيات: إذا حصلت على عمل، فسوف تكسب نقودًا،

إذا كسبت نقودًا، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

نتيجة صائبة: إذا حصلت على عمل، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

مثال 4 من الاختبار

- أي العبارات الآتية تنتج منطقياً عن العبارتين الآتيتين؟
- (1) إذا أمطرت اليوم فسوف تؤجل المباراة.
 - (2) إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تؤجل المباراة.
- A إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تمطر اليوم.
B إذا أمطرت اليوم فسوف يعتذر أحد الفريقين.
C إذا لم تمطر فلن يعتذر أحد الفريقين.
D لا توجد نتيجة صائبة.

تحقق من فهمك

- (4) أي العبارات الآتية تنتج منطقياً عن العبارتين الآتيتين؟
- (1) إذا لم تأخذ قسطاً كافياً من النوم، فسوف تكون مرهقاً.
 - (2) إذا كنت مرهقاً، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيداً.
- A إذا كنت مرهقاً، إذن أنت لم تأخذ قسطاً كافياً من النوم.
B إذا لم تأخذ قسطاً كافياً من النوم، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيداً.
C إذا لم يكن أداؤك في الاختبار جيداً، فإنك لم تأخذ قسطاً كافياً من النوم.
D لا توجد نتيجة صائبة.

تطبيق قوانين التبرير الاستنتاجي

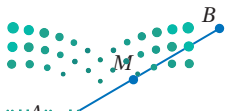
مثال 5

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة فاكتب "لا نتيجة صائبة"، وفسّر تبريرك.

المعطيات: • إذا كان عمرك 18 عاماً، فإنه يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.
• عُمر سلمان 18 عاماً.

تحقق من فهمك

- (5) المعطيات: • إذا كانت القطعتان المستقيمتان متطابقتين فإن طوليهما متساويان.
• M نقطة منتصف $\overline{AB}$.



المثال 1

حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كل مما يأتي:

- (1) جميع الطلاب الذين تم تكريمهم معدلهم العام يزيد على 95%. محمد من الطلاب الذين تم تكريمهم؛ إذن معدل محمد العام يزيد على 95%.
- (2) لاحظ خالد أن جاره يسقي أشجار حديقته كل يوم جمعة. واليوم هو الجمعة، فاستنتج أن جاره سوف يسقي أشجار حديقته اليوم.

المثال 2

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك.

- (3) **المعطيات:** • إذا كان العدد يقبل القسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2.
• العدد 12 يقبل القسمة على 4.
الاستنتاج: العدد 12 يقبل القسمة على 2.
- (4) **المعطيات:** • إذا ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا، فسوف يكون مرهقًا في اليوم التالي.
• فيصل مرهق.
الاستنتاج: ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا.

المثال 3

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك باستعمال أشكال فن.

- (5) **المعطيات:** • إذا كان الشاطئ عامًا، فإنه لا يوجد فيه منقذون.
• الشاطئ الجنوبي لا يوجد فيه منقذون.
الاستنتاج: الشاطئ الجنوبي عام.
- (6) **المعطيات:** • إذا اجتاز الطلاب اختبار القبول، فسوف يُقبلون في الكلية.
• اجتاز عبدالله اختبار القبول.
الاستنتاج: سيُقبل عبدالله في الكلية.

المثال 4

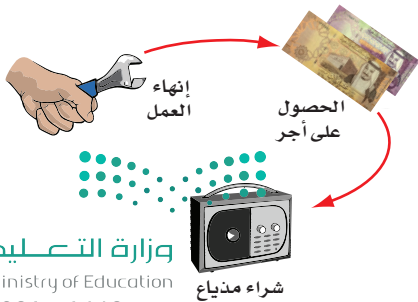
(7) **اختيار من متعدد:** أيُّ العبارات الآتية تنتج منطقيًا عن العبارتين (1)، (2)؟

- (1) إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن قياس إحدى زواياه 90°
- (2) إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90° ، فإن زواياه الحادتين تكونان متتامتين.
- A إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإنه يحوي زاوية قياسها 90° .
- B إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90° ، فإن زواياه الحادتين لا تكونان متتامتين.
- C إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن زواياه الحادتين متتامتان.
- D إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90° ، فإنه لا يكون مثلثًا قائم الزاوية.

المثال 5

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك.

- (8) **المعطيات:** • إذا أنهى وليد عمله، فإنه سيحصل على أجر.
• إذا حصل وليد على أجر، فإنه سيشتري مذياعًا.
- (9) **المعطيات:** الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.
 $\angle 1 \cong \angle 2$



المثال 1

- حدّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلّ ممّا يأتي:
- (10) تنصّ التعليمات المدرسية على أنه إذا تأخرت طالبة عن المدرسة خمس مرات، فسوف تُعطى تنبيهًا. تأخرت فاطمة خمس مرات عن المدرسة؛ لذلك سوف تُعطى تنبيهًا.
- (11) لاحظ طبيب الأسنان أن فهدًا يأتي في مواعيد المحدد، إذن سوف يأتي فهد في الموعد المحدد للزيارة القادمة.
- (12) إذا قرّر سعد الذهاب إلى الحفل، فلن يحضر تدريب كرة القدم هذه الليلة. ذهب سعد إلى الحفل. ولذلك لم يحضر سعد تدريب كرة القدم.
- (13) لاحظت علياء أنه عندما تأخذ دروس تقوية، فإن درجاتها تتحسن. أخذت علياء درس تقوية، ولذلك افترضت أن درجاتها سوف تتحسن.

المثال 2

حدّد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا في كلّ ممّا يأتي اعتمادًا على المعطيات. وفّر تبريرك.

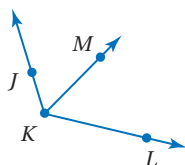
(14) المعطيات: الزوايا القائمة متطابقة، $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان.

الاستنتاج: $\angle 1 \cong \angle 2$.

(15) المعطيات: إذا كان الشكل مربعًا فإن له أربع زوايا قائمة.

الشكل $ABCD$ له أربع زوايا قائمة.

الاستنتاج: الشكل $ABCD$ مربع.



(16) المعطيات: منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين.

$\overline{KM}$ منصف $\angle JKL$.

الاستنتاج: $\angle JKM \cong \angle MKL$.

(17) المعطيات: إذا بيعت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء، فسيقام في قاعة المدينة.

بيعت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء.

الاستنتاج: سيقام الحفل في قاعة المدينة.

المثال 3

حدّد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. وفّر تبريرك باستعمال أشكال فن.

(18) المعطيات: إذا انخفضت درجة الحرارة إلى أقل من الصفر السيليزية، فمن المحتمل أن يسقط الثلج.

لم تنخفض درجة الحرارة عن الصفر السيليزية في يوم الإثنين.

الاستنتاج: لم يسقط الثلج يوم الإثنين.

(19) المعطيات: إذا كان الشخص يسكن مدينة الرياض، فإنه لا يسكن بجوار الشاطئ.

لا يسكن حمود بجوار الشاطئ.

الاستنتاج: يسكن حمود في مدينة الرياض.

(20) المعطيات: يرتدي بعض الممرضين زيًا موحدًا أزرق اللون. يعمل أحمد ممرضًا.

الاستنتاج: يرتدي أحمد الزي الموحد الأزرق اللون.



(21) **الألعاب الأولمبية:** حقق العداء السعودي هادي صوعان إنجازاً سعودياً كبيراً في دورة الألعاب الأولمبية في سيدني عام 2000م في سباق 400م حواجز، حيث أنهى السباق في زمن قدره 47.53 ثانية.

(1) إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرة فسيحل في المركز الثاني.

(2) إذا حلّ العداء في المركز الثاني، فسيحصل على الميدالية الفضية.

استعمل العبارتين (1)، (2) للحصول على نتيجة صائبة.

استعمل قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية. وإذا تعذر ذلك، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك.

(22) إذا حصلت شيماء على معدل 98 فأكثر، فإن اسمها سوف يُكتب في لوحة الشرف هذا العام.

إذا كُتب اسم شيماء في لوحة الشرف هذا العام فإنه سيتم تكريمها.

(23) إذا تعامد مستقيمان في مستوى، فإنهما سيتقاطعان ويكونان زوايا قائمة.

المستقيمان r و s في نفس المستوى ويكونان زوايا قائمة.

(24) إذا لم يكن المستقيمان في المستوى متوازيين، فإنهما يتقاطعان.

إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة"، وفسر تبريرك.

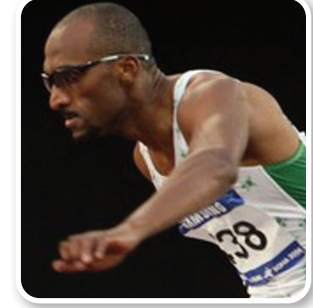
(25) **المعطيات:** إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي 90°
 $\angle 1$ و $\angle 2$ متتامتان.

(26) **المعطيات:** المثقفون يحبون المطالعة.

إذا كنت تحب المطالعة، فأنت من زوار المكتبة العامة.

(27) **المعطيات:** إذا كنت رياضياً، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.

إذا كنت تحب المنافسة، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.



الربط مع الحياة

يعتبر هادي صوعان أول رياضي سعودي يحرز ميدالية أولمبية.

مسائل مهارات التفكير العليا

(28) **اكتب:** فسر لماذا لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي لاستنتاج نتيجة من العبارتين الشرطيتين الآتيتين:

إذا ارتديت قفازات الشتاء، فإنك ستشعر بدفء في يديك.

إذا لم تكن يداك دافئتين، فإن قفازاتك رقيقة.

(29) **تحديد:** استعمل الرمز $\rightarrow$ ، $\wedge$ لتمثيل كل من قانون الفصل المنطقي وقانون القياس المنطقي بالرموز. لتكن p هي الفرض، q هي النتيجة.

(30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين يمكن تطبيق قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صائبة منهما، موضحة تلك النتيجة.

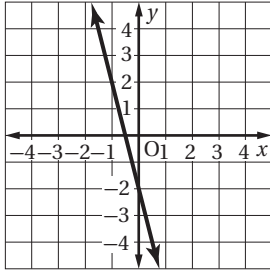
(31) **تحديد:** افترض أن كل المثلثات التي تحقق الخاصية B تحقق نظرية فيثاغورس، فهل العبارة الآتية صائبة أم خاطئة؟ علّل إجابتك.



إذا لم يكن المثلث قائم الزاوية، فإنه لا يحقق الخاصية B .

(32) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين قانون القياس المنطقي وخاصية التعدي للمساواة.

تدريب على اختبار



34 ما ميل المستقيم الممثل بيانياً؟

- A $\frac{1}{4}$
- B $-\frac{1}{4}$
- C 4
- D -4

33 بين أيًا من العبارات الآتية تنتج منطقياً عن العبارتين التاليتين.
إذا اشترت وجبتين، فإنك ستحصل على علبة عصير مجاناً.
اشترى خليل وجبتين.

- A اشترى خليل وجبة واحدة فقط.
- B سيحصل خليل على وجبة مجانية.
- C سيحصل خليل على علبتين عصير مجاناً.
- D حصل خليل على علبة عصير مجاناً.

مراجعة تراكمية

تسويق: استعمل المعلومات الآتية في حل السؤالين 35, 36. (الدرس 1-3)

يستعمل مديرو التسويق عبارات مكتوبة على صورة (إذا... فإن...) لترويج سلعتهم وخدماتهم. يوجد إعلان في إحدى محلات صيانة الحواسيب جاء فيه: "إذا كنت تبحث عن السرعة والأمان في حاسوبك، فعليك بمحل النجوم لصيانة الحواسيب".

35 اكتب عكس العبارة الشرطية.

36 ما الرسالة التي يريد الإعلان إيصالها إلى الناس حول محل النجوم؟

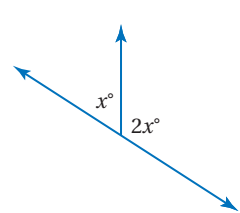
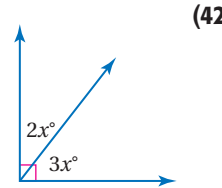
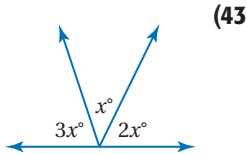
أنشئ جدول صواب لكل من العبارات المركبة الآتية: (الدرس 1-2)

39 $\sim y$ أو z

38 $\sim p$ أو q

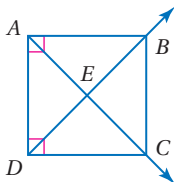
37 a و b

جبر: أوجد قيمة x في كل من الأشكال الآتية: (مهارة سابقة)



استعد للدرس اللاحق

هل يمكن افتراض صواب أي من العبارات الآتية اعتماداً على الشكل المجاور؟ فسر إجابتك:



44 $\angle DAB$ زاوية قائمة.

45 $\angle AEB \cong \angle DEC$

46 $\angle DAE \cong \angle ADE$

47 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$



المسلمات والبراهين الحرة

Postulates and Paragraph Proofs

1-5

لماذا؟

التجربة في الصورة المجاورة تُظهر سقوط الريشة والتفاحة بالسرعة نفسها في حجرة مفرغة من الهواء، وتوضح هذه التجربة قوانين نيوتن في الجاذبية الأرضية والقصور الذاتي، والتي تُقبل على أنها حقائق أساسية في الفيزياء. وفي الهندسة أيضًا توجد قوانين تُقبل على أنها صحيحة دون برهان.

فيما سبق:

درست استعمال التبدير
الاستنتاجي بتطبيق قانون
الفصل المنطقي وقانون
القياس المنطقي.

(الدرس 1-4)

والآن:

■ أتعرف المسلمات
الأساسية حول
النقاط والمستقيمات
والمستويات وأستعملها.
■ أكتب برهانًا حرًا.

المفردات:

المسلمة

axiom or postulate

البرهان

proof

النظرية

theorem

البرهان الحر

paragraph proof



النقاط والمستقيمات والمستويات: المسلمة أو البديهية عبارة تعطي وصفًا لعلاقة أساسية بين المفاهيم الهندسية الأولية وتُقبل على أنها صحيحة دون برهان. درست مبادئ أساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات، ويمكن اعتبار هذه المبادئ الأساسية مسلمات.

أضف إلى مطوبتك	مسلمات	التعبير اللفظي	مثال
		1.1 أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.	
		1.2 أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.	
		1.3 كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.	
		1.4 كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.	
		1.5 إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.	

تتعلق المسلمات الآتية بتقاطع المستقيمات والمستويات.

أضف إلى مطوبتك	مسلمات	التعبير اللفظي	مثال
		1.6 إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.	
		1.7 إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.	

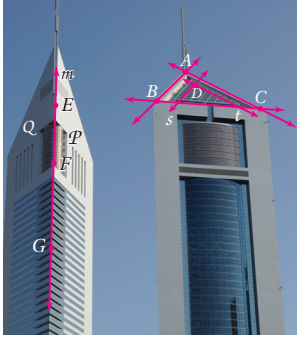
قراءة الرياضيات

يرمز للمستقيم بحرف صغير مائل مثل: $n, m, l, \dots$ أو بأي نقطتين واقعتين عليه مثل: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \dots$
يرمز للمستوى بحرف كبير مائل مثل: $\mathcal{K}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \dots$ أو بأي ثلاث نقاط فيه ليست على استقامة واحدة XYZ

تُعد المسلمات أساسًا للبراهين والتبريرات المتعلقة بالنقاط والمستقيمات والمستويات.

تحديد المسلمات

مثال 1 من واقع الحياة



هندسة معمارية: اذكر المسلمة التي تبرر صحة كل عبارة مما يأتي:

(a) يحتوي المستقيم m على النقطتين F و G ، ويمكن أن تقع النقطة E أيضًا على المستقيم m .

(b) يتقاطع المستقيمان s و t في النقطة D .

تحقق من فهمك

(1A) النقاط A, B, C تحدد مستوى. (1B) يتقاطع المستويان P و Q في المستقيم m .

يمكنك استعمال المسلمات لتفسير تبريرك في أثناء تحليل بعض العبارات.

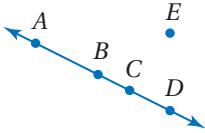
تحليل العبارات باستعمال المسلمات

مثال 2

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صائبة دائمًا أو صائبة أحيانًا أو غير صائبة أبدًا. فسّر تبريرك.

(a) إذا تقاطع مستقيمان واقعان في مستوى واحد، فإن نقطة تقاطعهما تقع أيضًا في المستوى الذي يحويهما.

(b) أي أربع نقاط لا تقع على استقامة واحدة.



تحقق من فهمك

(2A) المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى. (2B) تتقاطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين.

إرشادات للدراسة

نظام المسلمات

هو مجموعة من المسلمات التي يمكن استعمال بعضها أو كلها لاستنتاج النظريات عن طريق المنطق.

البرهان الحر: عند إثباتك نتيجة تخمين ما، فإنك تستعمل التبرير الاستنتاجي للانتقال من الفرض إلى النتيجة

التي تريد إثبات صحتها بكتابة **برهان**، وهو دليل منطقي فيه كل عبارة تكتبها تكون مبررة بعبارة سبق إثباتها أو قبول صحتها.

في حال إثبات صحة عبارة (أو تخمين) فإنها تُسمى **نظرية**، ويمكن بعد ذلك استعمالها في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى .

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

خطوات كتابة البرهان

المعطيات (الفرض)

↓

العبارات والمبررات

↓

المطلوب (النتيجة)

الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلاً يوضحها إن أمكن.

الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.

الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.

الخطوة 4: برّر كل عبارة مستعملًا تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.

الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

البرهان الحر هو أحد أنواع البراهين، وفيه تُكتب فقرة تُفسر أسباب صحة التخمين في موقف مُعطى.

أضف إلى
مطوبتك

مثال 3

كتابة البرهان الحر

المعطيات: M نقطة منتصف XY ، اكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

تحقق من فهمك ✓

(3) إذا علمت أن C تقع على $\overline{AB}$ ، حيث $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ، فاكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

إرشادات حل المسألة

العمل عكسياً

إحدى استراتيجيات كتابة البرهان هي العمل عكسياً، وذلك بأن تبدأ من المطلوب وتعمل عكسياً خطوة بخطوة حتى تصل إلى المعطيات.

يعرف التخمين في مثال 3 بنظرية نقطة المنتصف.

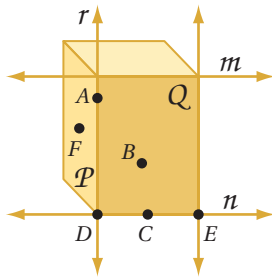
أضف إلى
مطوبتك

نظرية 1.1

نظرية نقطة المنتصف

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.





اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

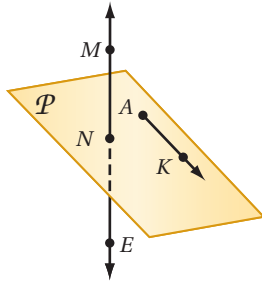
المثال 1

- (1) المستويان P و Q يتقاطعان في المستقيم r .
- (2) المستقيمان r و n يتقاطعان في النقطة D .
- (3) المستقيم n يحوي النقاط C, D, E .
- (4) المستوى P يحوي النقاط A, F, D .
- (5) المستقيم n يقع في المستوى Q .
- (6) المستقيم r هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطتين A و D .

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. وفّر تبريرك.

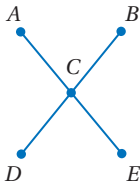
المثال 2

- (7) تتقاطع ثلاثة مستويات في مستقيم.
- (8) المستقيم r يحوي النقطة P فقط.
- (9) يمر مستقيم واحد فقط بنقطتين معلومتين.



في الشكل المجاور: يقع $\overrightarrow{AK}$ في المستوى P وتقع النقطة M على $\overleftrightarrow{NE}$.
اذكر المسلّمة التي تثبت صحة كلّ من العبارات الآتية:

- (10) تقع M, K, N في مستوى واحد.
- (11) $\overleftrightarrow{NE}$ يحوي النقطتين M, N .
- (12) النقاط N, K, A تقع في المستوى نفسه.
- (13) **برهان:** في الشكل المجاور $\overline{AE} \cong \overline{DB}$ والنقطة C نقطة منتصف كلّ من $\overline{DB}$ و $\overline{AE}$.
اكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن $AC = CB$.

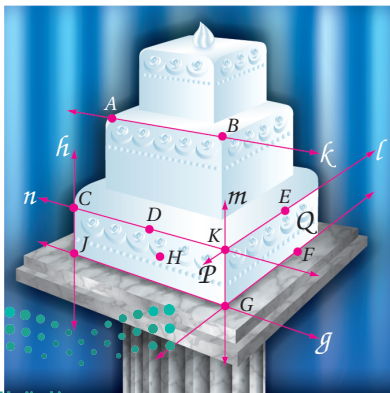


تأليف: د. وائل المملوك

اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

المثال 1

- (14) المستقيمان n و l يتقاطعان في النقطة K .
- (15) المستويان P, Q يتقاطعان في المستقيم m .
- (16) النقاط D, K, H تحدّد مستوى.
- (17) النقطة D تقع على المستقيم n المار بالنقطتين C, K .
- (18) النقاط E, F, G تقع في المستوى نفسه.
- (19) $\overleftrightarrow{EF}$ يقع في المستوى Q .
- (20) المستقيمان g, h يتقاطعان في النقطة J .



وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

المثال 2

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. فسّر تبريرك.

(21) يوجد مستوى واحد فقط يحوي النقاط الثلاث A, B, C التي لا تقع على استقامة واحدة.

(22) ثلاثة مستقيمات على الأقل تمر بالنقطتين J و K .

(23) إذا وقعت النقاط M, N, P في المستوى X ، فإنها تقع على استقامة واحدة.

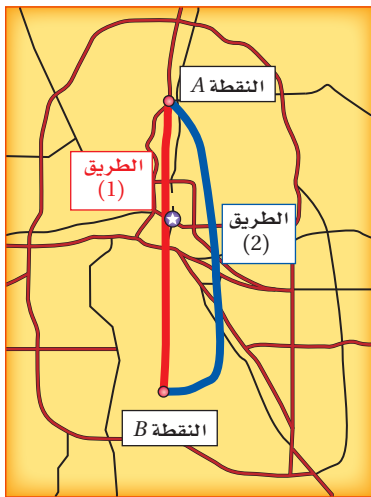
(24) تقع النقطتان X و Y في المستوى Z . وأي نقطة على استقامة واحدة مع X و Y تقع أيضاً في المستوى Z .

(25) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

المثال 3

(26) **برهان:** إذا علمت أن Y هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ، وأن Z هي نقطة منتصف $\overline{YW}$ ، فأثبت أن $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$.

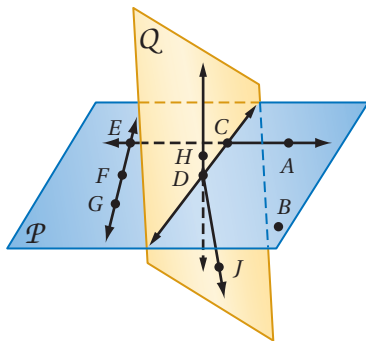
(27) **برهان:** النقطة L هي نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، ويتقاطع $\overline{JK}$ مع $\overline{MK}$ في النقطة K . إذا كان $\overline{MK} \cong \overline{JL}$ ، فأثبت أن $\overline{LK} \cong \overline{MK}$.



(28) **خرائط:** أمام خالد طريقان للانتقال من الموقع A إلى الموقع B كما يظهر في الخريطة المجاورة. إذا كان الحد الأعلى للسرعة المسموح بها على الطريق (1) هو 90 km/h ، وعلى الطريق (2) هو 110 km/h

(a) أي الطريقين يبدو أقصر طولاً؟ فسّر تبريرك.

(b) إذا كانت المسافة من A إلى B عبر الطريق (1) تساوي 16.8 km ، والمسافة بينهما عبر الطريق (2) تساوي 17.6 km ، فأَي الطريقين أسرع وصولاً، إذا قاد خالد سيارته بالحد الأعلى للسرعة المسموح بها؟



في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CE}$ واقعان في المستوى P ،

$\overleftrightarrow{DH}$ و $\overleftrightarrow{DJ}$ واقعان في المستوى Q . اذكر المسلّمة التي يمكن

استعمالها لإثبات صحة كل عبارة فيما يأتي :

(29) النقطتان C و B على استقامة واحدة.

(30) $\overleftrightarrow{EG}$ يحوي النقاط E, F, G .

(31) النقطتان D و F تقعان على استقامة واحدة.

(32) النقاط C, D, B تقع في المستوى نفسه.

(33) المستوى Q يحوي النقاط C, H, D, J .

(34) المستوى P يتقاطع مع المستوى Q في $\overleftrightarrow{CD}$.



وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

(35) هندسة عمارة: يُحسب ميل السطح عادة بقسمة الارتفاع مقيسًا بالبوصة على المسافة الأفقية مقيسة بالقدم. استعمل العبارات أدناه لتكتب برهانًا حرًا للعبارة الآتية: ميل السطح في تصميم أحمد غير كافٍ.



الربط مع الحياة

تُصمَّم أسطح المنازل بطرائق هندسية مختلفة لمنع تسرب الماء. من هذه الطرائق استعمال مواد عازلة لا تسمح بنفاذ الماء، أو أن تُبنى مائلة؛ لتسهيل انحدار الماء عنها بتأثير الجاذبية الأرضية.

• عند استعمال مواد عازلة للماء، يجب أن يكون الميل $\frac{1}{4}$ بوصة لكل قدم على الأقل.

• حتى ينحدر الماء بتأثير الجاذبية الأرضية، يجب أن يكون ميل السطح 4 بوصات لكل قدم.

• صمَّم أحمد سطح منزله بحيث يكون مائلًا.

• الميل في تصميم أحمد يساوي 2 بوصة لكل قدم.

(36) رياضة: أُقيمت بطولة شاركت فيها ثماني فرق كرة قدم للناشئين.

(a) ما عدد المباريات التي ستُجرى في الدور الأول؟

(b) ارسم شكلاً يوضح عدد مباريات الدور الأول. أيُّ معلومة يمكنك استعمالها لتبرير هذا الشكل؟

(c) أوجد طريقة حسابية لإيجاد عدد المباريات التي ستُجرى في الدور الأول، بغض النظر عن عدد الفرق المشاركة في البطولة؟



مسائل مهارات التفكير العليا

(37) مسألة مفتوحة: ارسم شكلاً يحقق خمسًا من المسلمات السبع التي تعلمتها في هذا الدرس. اشرح كيف تحققت كلٌّ منها في الشكل.

(38) اكتشاف الخطأ: قام كلٌّ من عمر وسعيد بكتابة برهان لإثبات أنه إذا كانت $\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$ ، وكانت A, B, D على استقامة واحدة، فإن B نقطة منتصف $\overline{AD}$. وقد بدأ كلٌّ منهما برهانه بطريقة مختلفة. أيُّهما بدأ برهانه بطريقة صحيحة؟ فسر إجابتك.

للسعيد

$\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$ ، والنقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة.

عمر

إذا كانت B نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن B تقسم $\overline{AD}$ إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

تبرير: حدّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك أو أعط مثالًا مضادًا:



(39) أيُّ ثلاث نقاط يمر بها مستوى واحد فقط.

(40) اكتب: بين أوجه الشبه والاختلاف بين المسلمات والنظريات.

تدريب على اختبار

(41) أيُّ العبارات الآتية ليست صائبة؟

- A** أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تحدد مستوى واحدًا فقط.
B يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط.
C يوجد على الأقل مستقيمان يحويان النقطتين نفسيهما.
D تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين.

(42) ما أكبر عدد من المناطق التي تتشكل عندما تقطع ثلاثة مستقيمات مختلفة دائرة؟

- A** 4
B 5
C 6
D 7

مراجعة تراكمية

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة من العبارات الآتية إن أمكن، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك. (الدرس 1-4)

(43) (1) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما لا تكونان متجاورتين على مستقيم.

(2) إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم فهما غير متطابقتين.

(44) (1) إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من 90°

(2) $\angle EFG$ حادة.

اكتب العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا ... فإن ...). (الدرس 1-3)

(45) يُكتب اسم الطالب المتفوق في لوحة الشرف.
(46) يخشى البطل أن يخسر.

استعد للدرس اللاحق

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

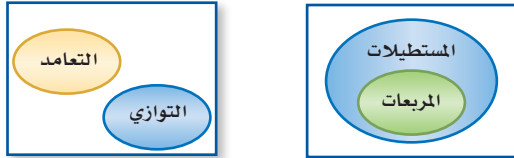
(49) $5(x^2 + 2) = 30$

(48) $\frac{1}{3}x + 6 = 14$

(47) $4x - 3 = 19$



استعمل أشكال فن أدناه لتحديد قيمة الصواب لكل من العبارات الشرطية الآتية. وفسر تبريرك. (الدرس 1-3)



(14) إذا كان المضلع مربعاً، فإنه يكون مستطيلاً.

(15) إذا كان المستقيمان متعامدين، فإنهما لا يمكن أن يكونا متوازيين.

(16) **كرة قدم:** تقابل فريقا الفرسان والفهود في المباراة النهائية. معتمداً على المعطيات، حدّد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا في كلّ مما يأتي. وفسر تبريرك. (الدرس 1-4)

المعطيات: الفريق الفائز بالكأس هو الفريق الذي يحرز أهدافاً أكثر في نهاية المباراة.

أحرز فريق الفرسان 3 أهداف، بينما أحرز فريق الفهود هدفين.

النتيجة: فاز فريق الفرسان بالكأس.

(17) **اختيار من متعدد:** أي العبارات الآتية تنتج منطقياً عن

العبارتين (1) و (2)؟ (الدرس 1-4)

(1) إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك 16 سنة على الأقل.

(2) إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإن عمرك يؤهّلك لقيادة السيارة.

A إذا كان عمرك يؤهّلك لقيادة السيارة، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

B إذا كان عمرك لا يؤهّلك لقيادة السيارة، فأنت في المرحلة المتوسطة.

C إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك يؤهّلك لقيادة السيارة.

D إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. وفسر تبريرك. (الدرس 1-5)



(18) النقاط J, K, L, N ليست على استقامة واحدة، وتقع جميعها في المستوى M .

(19) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطتين R, S .

(20) المستقيم a يحتوي على النقطة Q فقط.

اكتب تخميناً يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلّ منها. (الدرس 1-1)

(1) $5, 5, 10, 15, 25, \dots$ (2) $\square, \square, \square, \square, \dots$

أعط مثلاً مضاداً يبين أن كلّاً من التخمينين الآتين خاطئ: (الدرس 1-1)

(3) إذا كان $AB = BC$ ، فإن B نقطة منتصف $\overline{AC}$.

(4) إذا كان n عدداً حقيقياً، فإن $n^3 > n$.

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسر تبريرك. (الدرس 1-2)

p : في الأسبوع الواحد 7 أيام.

q : في اليوم الواحد 24 ساعة.

r : صَفَر هو الشهر الذي يأتي قبل شهر المحرم.

(5) $p \wedge r$

(6) $q \vee p$

(7) $p \wedge \sim r$

(8) أكمل الجدول الآتي. (الدرس 1-2)

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	F		
F	T		
F	F		
T	T		

حدد الفرض والنتيجة في كلّ من العبارات الشرطية الآتية: (الدرس 1-3)

(9) إذا كان للمضلع خمسة أضلاع، فإنه خماسي.

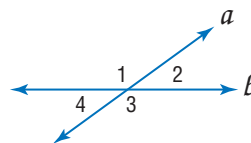
(10) إذا كان $4x - 6 = 10$ ، فإن $x = 4$.

(11) الزاوية التي قياسها أقل من 90° تكون حادة.

حدد قيمة الصواب لكل من العبارتين الشرطيتين الآتيتين. وإذا كانت العبارة صائبة، فبرر إجابتك. (الدرس 1-3)

(12) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

(13) $\angle 1$ و $\angle 4$ متطابقتان.



البرهان الجبري

Algebraic Proof

1-6

لماذا؟

تحتوي بعض السيارات على شاشة لعرض درجة الحرارة الخارجية بالمقياس الفهرنهايتي أو المقياس السيليزي. والمقياس الفهرنهايتي يحدد درجة تجمد الماء عند 32° ، ودرجة غليانه عند 212° ، أما المقياس السيليزي فيحدد درجة تجمد الماء عند 0° ، وغليانه عند 100° .

يمكنك استعمال البرهان الجبري؛ لإثبات أنه إذا كانت العلاقة التي تربط هذين المقياسين معطاة بالصيغة.

$$C = \frac{5}{9} (F - 32) \text{ ، فإنها تعطى أيضًا بالصيغة } F = \frac{9}{5} C + 32$$

البرهان الجبري: الجبر نظام مكوّن من مجموعات من الأعداد، وعمليات عليها وخصائص تمكّنك من إجراء هذه العمليات. والجدول الآتي يلخص عدة خصائص للأعداد الحقيقية التي ستستعملها في الجبر.

أضف إلى مطوبتك	مفهوم أساسي	خصائص الأعداد الحقيقية
		الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c
	خاصية الجمع للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإن $a + c = b + c$
	خاصية الطرح للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإن $a - c = b - c$
	خاصية الضرب للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإن $a \cdot c = b \cdot c$
	خاصية القسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
	خاصية الانعكاس للمساواة	$a = a$
	خاصية التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإن $b = a$
	خاصية التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ و $b = c$ ، فإن $a = c$
	خاصية التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإنه يمكننا أن نضع b مكان a في أي معادلة أو عبارة جبرية تحتوي على a
	خاصية التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

البرهان الجبري هو برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية، وتبرر خصائص المساواة أعلاه كثيرًا من العبارات المُستعملة في البراهين الجبرية.

فيما سبق:

درستُ المسلمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات.
(الدرس 1-5)

والآن:

- أستعمل الجبر لكتابة برهان ذي عمودين.
- أستعمل خصائص المساواة لكتابة برهان هندسي.

المفردات:

البرهان الجبري

algebraic proof

البرهان ذو العمودين

two-column proof

مثال 1

تبرير كل خطوة عند حل المعادلة

أثبت أنه إذا كان $-5(x + 4) = 70$ ، فإن $x = -18$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.



وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

تحقق من فهمك

اذكر الخاصية التي تبرر كلاً من العبارتين الآتيتين:

(1A) إذا كان $4 + (-5) = -1$ ، فإن $x - 1 = x + 4 + (-5)$

(1B) إذا كانت $y = 5$ ، فإن $y = 5$

(1C) أثبت أنه إذا كان $2x - 13 = -5$ ، فإن $x = 4$. اكتب تبريراً لكل خطوة.

يوضح المثال 1 برهان العبارة الشرطية "إذا كان $5(x + 4) = 70$ ، فإن $x = -18$ ". لاحظ في هذا البرهان أن العمود الأيمن يحتوي على تفصيل الطريقة التي تقود إلى الحل خطوة بخطوة، أما العمود الأيسر فيحتوي على تبرير كل خطوة.

وتكتب براهين النظريات والتخمينات الهندسية عادةً على هذا النحو فيما يسمى **البرهان ذو العمودين**، حيث العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود موازٍ.

إرشادات للدراسة

الخوارزميات

الخوارزمية هي سلسلة من الخطوات المتتالية لإجراء عملية أو حل مسألة ما. ويمكن اعتبار البرهان من أنواع الخوارزميات؛ لأنه يتم خطوة بخطوة.

مثال 2 من واقع الحياة كتابة البرهان الجبري



علوم: إذا كانت الصيغة التي تحول درجات الحرارة من فهرنهايت إلى سيليزية هي $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ، فإن الصيغة التي تحول درجات الحرارة من سيليزية إلى فهرنهايت هي $F = \frac{9}{5}C + 32$. اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين. اكتب المعطيات والمطلوب وإثباته أولاً.

المعطيات: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

المطلوب: $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)
(6)	(6)

إرشادات للدراسة

رياضيات ذهنية

إذا سمح معلمك، يمكنك حذف بعض الخطوات، وذلك لأن بعض الحسابات يمكن إجراؤها ذهنياً؛ ففي المثال 2 يمكن حذف العبارتين 2 و 4؛ ليصبح مبرر العبارة 3 "خاصية الضرب للمساواة"، والعبارة 5 "خاصية الجمع للمساواة".

تحقق من فهمك

اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتين:

(2A) إذا كان $\frac{5x+1}{2} - 8 = 0$ ، فإن $x = 3$.

(2B) **فيزياء:** إذا كانت المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بسرعة ابتدائية u وسرعة نهائية v في زمن t تعطى بالعلاقة $d = t \cdot \frac{u+v}{2}$ ، فإن $u = \frac{2d}{t} - v$.



البرهان الهندسي: بما أن في الهندسة أيضًا متغيرات، وأعدادًا وعمليات، فإن معظم خصائص المساواة المُستعملة في الجبر صحيحة أيضًا في الهندسة. فأطوال القطع المستقيمة وقياس الزوايا هي أعداد حقيقية؛ لذا يمكن استعمال خصائص الجبر في إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة والزوايا.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$ ، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ ، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدي	إذا كانت $AB = CD$ ، و $CD = EF$ ، فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ ، و $m\angle 2 = m\angle 3$ ، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

يمكن استعمال هذه الخصائص لكتابة براهين هندسية .

إرشادات للدراسة

خاصية الإبدال والتجميع

الخصائص الآتية صحيحة لأي أعداد حقيقية a, b, c :

خاصية الإبدال للجمع

$$a + b = b + a$$

خاصية الإبدال للضرب

$$a \cdot b = b \cdot a$$

خاصية التجميع للجمع

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

خاصية التجميع للضرب

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

مثال 3

كتابة البرهان الهندسي

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كانت:

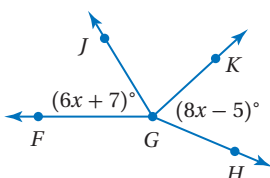
$$\angle FGJ \cong \angle JGK, \angle JGK \cong \angle KGH, \text{ فإن } x = 6.$$

المعطيات: $\angle FGJ \cong \angle JGK, \angle JGK \cong \angle KGH$ ،

$$m\angle FGJ = (6x + 7)^\circ, m\angle KGH = (8x - 5)^\circ$$

المطلوب: $x = 6$

البرهان:



المبررات	المبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)
(6)	(6)
(7)	(7)
(8)	(8)
(9)	(9)
(10)	(10)
(11)	(11)

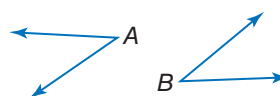
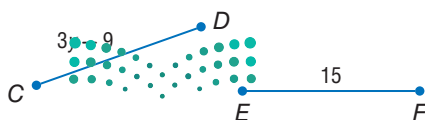
تحقق من فهمك

اكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

(3A) إذا كان $\angle A \cong \angle B, m\angle A = 37^\circ$ ،

فإن $m\angle B = 37^\circ$

(3B) إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $y = 8$.



المثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر العبارة:

- (1) إذا كان $x = 5$ ، فإن $x = 5$
- (2) أثبت أنه إذا كان $2(x + 5) = 11$ ، فإن $x = \frac{1}{2}$ اكتب تبريراً لكل خطوة.

المثال 2 أكمل البرهان الآتي:

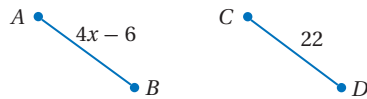
المعطيات: $\frac{y+2}{3} = 3$

المطلوب: $y = 7$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a) معطيات	(a) ؟
(b) ؟	(b) $3\left(\frac{y+2}{3}\right) = 3(3)$
(c) ؟	(c) ؟
(d) خاصية الطرح للمساواة	(d) $y = 7$

المثالان 2, 3 برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتيين:



(4) إذا كان $-4(x - 3) + 5x = 24$ ، فإن $x = 12$.

(5) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، فإن $x = 7$.

(6) **صحة:** يراقب بدر معدل نبضات قلبه في الدقيقة الواحدة مستعملاً جهاز قياس النبض؛ ليتحقق من أنه يقع ضمن المدى الطبيعي. ويمكن تقدير هذا المعدل باستعمال الصيغة: $T = 0.75(220 - a)$ ، حيث T معدل نبضات القلب، و a عمر الشخص.

(a) أثبت أنه إذا علمت معدل نبضات قلب شخص، فإنه يمكنك حساب عمره مستعملاً الصيغة:

$$a = 220 - \frac{T}{0.75}$$

(b) إذا كان معدل نبضات قلب بدر يساوي 153، فكم يكون عمره؟ ما الخاصية التي تؤكد صحة حساباتك؟

تدرب وحل المسائل

المثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

(7) إذا كان $a + 10 = 20$ ، فإن $a = 10$.

(8) إذا كان $\frac{x}{3} = -15$ ، فإن $x = -45$.

(9) إذا كان $5(x + 7) = -3$ ، فإن $5x + 35 = -3$.

(10) إذا كان $3\left(x - \frac{2}{3}\right) = 4$ ، فإن $3x - 2 = 4$.

(11) أثبت أنه إذا كان $4(x - 5) = x + 2$ ، فإن $x = \frac{22}{3}$ مبرراً كل خطوة.



اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

(12) إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$, $m\angle 2 = m\angle 3$, فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

(13) $XY = XY$

(14) إذا كان $\frac{1}{5} BC = \frac{1}{5} DE$, فإن $BC = DE$.

(15) إذا كان $m\angle 1 = 25^\circ$, $m\angle 2 = 25^\circ$, فإن $m\angle 1 = m\angle 2$.

(16) إذا كان $AB = BC$, $BC = CD$, فإن $AB = CD$.

أكمل البرهانين الآتيين:

(17) المعطيات: $\frac{8-3x}{4} = 32$

المطلوب: $x = -40$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a) معطيات	(a) $\frac{8-3x}{4} = 32$
(b) ؟	(b) $4\left(\frac{8-3x}{4}\right) = 4(32)$
(c) ؟	(c) $8-3x = 128$
(d) خاصية الطرح للمساواة	(d) ؟
(e) ؟	(e) $x = -40$

المثال 2

(18) **علوم:** تعطى المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بالقدم بالصيغة: $d = vt + \frac{1}{2} at^2$, حيث v سرعة

الجسم بالقدم لكل ثانية، و t الزمن بالثانية، و a التسارع بالقدم لكل ثانية تربيع.

اكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن التسارع يمكن أن يُحسب بالصيغة $a = \frac{2d-2vt}{t^2}$

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتيين:

(19) إذا كان $\frac{1}{3} n = 12$, فإن $n = -36$. (20) إذا كان $-3r + \frac{1}{2} = 4$, فإن $r = -\frac{7}{6}$.

(21) **علوم:** يُعطى قانون الغاز المثالي بالصيغة $PV = nRT$, حيث P : الضغط بوحدة الضغط الجوي (atm) ,

V : الحجم باللترات ، و n : عدد مولات الغاز ، و R : ثابت الغاز المثالي، حيث $R = 0.0821$, T : درجة الحرارة بالكلفن.

(a) أثبت أنه إذا كان ضغط الغاز وحجمه وعدد مولاته جميعها معلومة، فإنه يمكن حساب درجة حرارته

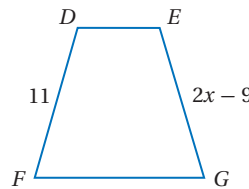
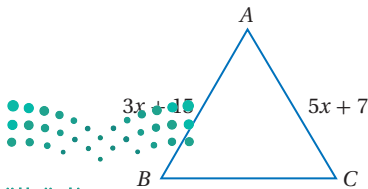
باستعمال الصيغة $T = \frac{PV}{nR}$.

(b) ما درجة حرارة 1 مول من الأكسجين موجود في إناء سعته 25 L ، وتحت ضغط مقداره 1 atm ؟

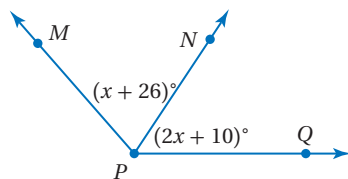
ما الخاصية التي تبرّر حساباتك؟

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينات الآتية:

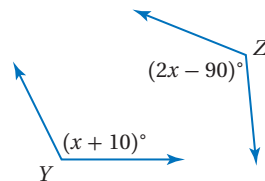
(22) إذا كانت $\overline{DF} \cong \overline{EG}$, فإن $x = 10$. (23) إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, فإن $x = 4$.



(25) إذا كانت $\angle MPN \cong \angle QPN$ ، فإن $x = 16$.



(24) إذا كانت $\angle Y \cong \angle Z$ ، فإن $x = 100$.



(26) **كهرباء:** يمكن حساب فرق الجهد V للدائرة الكهربائية باستعمال القانون $V = \frac{P}{I}$ ، حيث P القدرة

الكهربائية، و I شدة التيار الكهربائي المار في الدائرة.

(a) اكتب برهاناً لإثبات أنه عندما تكون القدرة الكهربائية ثابتة، فإن فرق الجهد يصبح نصف ما كان عليه عندما تتضاعف شدة التيار الكهربائي.

(b) اكتب برهاناً لإثبات أنه عندما تكون شدة التيار الكهربائي ثابتة، فإن فرق الجهد يتضاعف عندما تتضاعف القدرة الكهربائية.



الرابط مع الحياة

يحدث البرق عند تفريغ

الشحنات بين السحب

المشحونة كهربائياً.

وتستمر هذه العملية لمدة

تقل عن ثانية واحدة، وينتج

عنها من 100 مليون إلى

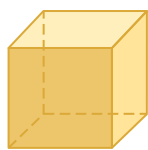
1 بليون فولت. قارن هذه

الكمية مع فرق الجهد

في المنازل، والذي يبلغ

120 فولت أو 220 فولت

فقط.



وحدة S

(27) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مكعباً طول ضلعه s وحدة.

(a) **حسياً:** ارسم أو اعمل نماذج لمكعبات أطوال أضلاعها 2, 4, 8, 16 وحدة.

(b) **جدولياً:** أوجد حجم كل مكعب.

نظم نتائجك في جدول مثل المجاور.

(c) **لفظياً:** استعمل الجدول لعمل تخمين حول تغير حجم المكعب عندما يتضاعف طول ضلعه. عبّر عن تخمينك لفظياً.

(d) **جبرياً:** اكتب تخمينك على صورة معادلة جبرية.

(e) **منطقياً:** اكتب برهاناً لتخمينك. تأكد من كتابة المعطيات والمطلوب في بداية البرهان.

الحجم (V)	طول الضلع (s)
	2
	4
	8
	16

مسائل مهارات التفكير العليا

(28) **تحّد:** تقع النقطة P على $\overline{AB}$. إذا علمت أن طول $\overline{AP}$ يساوي $2x + 3$ ، وطول $\overline{PB}$ يساوي $\frac{3x + 1}{2}$ ، وطول $\overline{AB}$ يساوي 10.5 وحدات، فارسم شكلاً يوضح المسألة، وأثبت أن طول $\overline{AP}$ يساوي ثلثي طول $\overline{AB}$.

تبرير: صنّف الجمل الآتية إلى صحيحة أحياناً أو صحيحة دائماً أو غير صحيحة أبداً. فسر تبريرك.

(29) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a + b = 0$ ، فإن $a = -b$.

(30) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a^2 = b$ ، فإن $a = \sqrt{b}$.

(31) **تحّد:** وضعت آمنة تخميناً ينصّ على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

(a) أعط أمثلة تؤيد هذا التخمين، ثم فسر لماذا لا تُثبت هذه الأمثلة صحة التخمين.

(b) يمكن كتابة العدد الفردي على الصورة $2n - 1$. أعط أمثلة تؤيد ذلك.

(c) ما العدد الذي تكون الأعداد الزوجية جميعها مضاعفات له؟ فسر لفظياً كيف يمكن استعمال إجابتك عن الفرعين a , b لإثبات صحة التخمين.

(d) اكتب برهاناً جبرياً لإثبات أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.



(32) اكتب: ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين البرهان الحر والبرهان ذي العمودين. أي البرهانين تجده أسهل للكتابة؟ برر إجابتك.

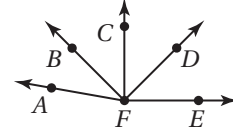
تدريب على اختبار

(34) مراجعة: أي علاقة يمكن أن تستعمل لإيجاد قيم $s(n)$ في الجدول التالي؟

n	-8	-4	-1	0	1
$s(n)$	1	2	2.75	3	3.25

$s(n) = \frac{1}{2}n + 5$ **C** $s(n) = -n + 7$ **A**
 $s(n) = \frac{1}{4}n + 3$ **D** $s(n) = -2n + 3$ **B**

(33) في الشكل أدناه: $m\angle CFE = 90^\circ$ و $\angle AFB \cong \angle CFD$.



أي مما يأتي ليس صحيحًا بالضرورة؟

$m\angle CFD = m\angle AFB$ **C** $m\angle BFD = m\angle BFD$ **A**
 $\overrightarrow{FC}$ محور تناظر للشكل **B** $\angle CFE$ قائمة **D**

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر إجابتك. (الدرس 1-5)

(35) أي أربع نقاط تقع في المستوى نفسه.

(36) الزاويتان المنفرجتان متكاملتان.

(37) المستويان P و Q يتقاطعان في المستقيم m . والمستقيم m يقع في كلا المستويين P و Q .

حدد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا في كلّ مما يأتي؛ اعتمادًا على العبارة التالية والمعطيات مبررًا إجابتك.

"يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان يقبل القسمة على 6". (الدرس 1-4)

(38) المعطيات: 24 يقبل القسمة على 6. النتيجة: 24 يقبل القسمة على 3.

(39) المعطيات: 27 يقبل القسمة على 3. النتيجة: 27 يقبل القسمة على 6.

(40) المعطيات: 85 لا يقبل القسمة على 3. النتيجة: 85 لا يقبل القسمة على 6.

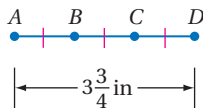
(41) مبان: توجد أربع بنايات في مدرسة، لا يوجد ثلاث منها على استقامة واحدة.

ما عدد ممرات المشاة اللازمة لربط كل بنائين بممر مشاة واحد؟ (الدرس 1-5)

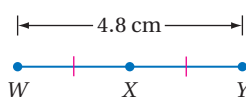
استعد للدرس اللاحق

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي مستعينًا بالشكل.

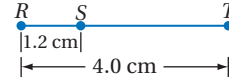
(44) $\overline{BC}$



(43) $\overline{WX}$



(42) $\overline{ST}$



إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

Proving Segments Relationships

1-7



لماذا؟

يعمل عبدالله في محل لببيع الأقمشة، وقيس القماش بوضع حافته عند حافة تدريج المسطرة التي طولها متر واحد. ولكي يقيس أطوالاً مثل 125 cm، يقيس مترًا من القماش ويضع علامة عليه، ثم يقيس من تلك العلامة 25 cm أخرى. فيصبح الطول: $100 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 125 \text{ cm}$

فيما سبق:

درستُ كتابة البرهان الجبري والبرهان ذي العمودين.

(الدرس 1-6)

والآن:

- أكتب براهين تتضمن جمع أطوال القطع المستقيمة.
- أكتب براهين تتضمن تطابق قطع مستقيمة.

مسألة أطوال القطع المستقيمة: علمت كيف تقيس القطع المستقيمة باستعمال المسطرة، وذلك بوضع صفر المسطرة على أحد طرفي القطعة المستقيمة وقراءة التدريج المقابل للطرف الآخر من القطعة المستقيمة، فيمثل هذا التدريج طول القطعة المستقيمة. وهذا يوضح مسألة المسطرة.

أضف إلى مطوبتك

مسألة 1.8 أطوال القطع المستقيمة

التعبير اللفظي: النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية.

مثال: إذا أعطيت نقطتين A و B على مستقيم، وكانت A تقابل الصفر، فإن B تقابل عددًا موجبًا.

يمكن التعبير عن معنى وقوع نقطة بين نقطتين أخريين بمسألة جمع أطوال القطع المستقيمة.

أضف إلى مطوبتك

مسألة 1.9 جمع أطوال القطع المستقيمة

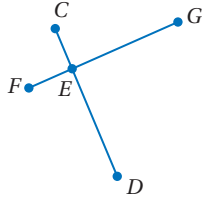
التعبير اللفظي: إذا علمت أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة، فإن النقطة B تقع بين A و C إذا كان $AB + BC = AC$ والعكس.

النموذج:

ومسألة جمع أطوال القطع المستقيمة تستعمل تبريرًا في العديد من البراهين الهندسية.

مثال 1

استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة



أثبت أنه إذا كان $\overline{CE} \cong \overline{FE}$ ، $\overline{ED} \cong \overline{EG}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{FG}$.

المعطيات: $\overline{CE} \cong \overline{FE}$ ، $\overline{ED} \cong \overline{EG}$

المطلوب: $\overline{CD} \cong \overline{FG}$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)
(6)	(6)
(7)	(7)

قراءة الرياضيات

اختصارات:

رغبة في الاختصار عند
 كتابة البراهين نكتب:
 "بالتعويض" بدلاً من
 "خاصية التعويض
 للمساواة" ونكتب
 "بالطرح" بدلاً من
 "خاصية الطرح
 للمساواة" وهكذا.

تحقق من فهمك

(1) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{KM}$

المطلوب: $\overline{JK} \cong \overline{LM}$

البرهان:



المبررات	العبارات
(a) معطيات	(a) $\overline{JL} \cong \overline{KM}$
(b) ؟	(b) $JL = KM$
(c) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة	(c) $JK + KL = \text{؟}$ ، $KL + LM = \text{؟}$
(d) ؟	(d) $JK + KL = KL + LM$
(e) بالطرح	(e) $JK + KL - \text{KL} = KL + LM - \text{KL}$
(f) بالتبسيط	(f) ؟
(g) تعريف تطابق القطع المستقيمة	(g) $\overline{JK} \cong \overline{LM}$

تطابق القطع المستقيمة: درست سابقاً أن تساوي أطوال القطع المستقيمة تحقق خاصية الانعكاس والتمائل والتعدي. وبما أن القطع المستقيمة المتساوية الطول متطابقة، فإن تطابق القطع المستقيمة يحقق أيضاً خصائص الانعكاس والتمائل والتعدي.

نظرية 1.2

خصائص تطابق القطع المستقيمة

أضف إلى
مطوياتك

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$	خاصية الانعكاس للتطابق
إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$	خاصية التماثل للتطابق
إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$	خاصية التعدي للتطابق

وزارة التعليم

Ministry of Education

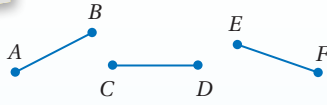
سوف تبرهن خاصيتي الانعكاس والتمائل في السؤالين 5 و 6

2021 - 1443

أضف إلى
مطوياتك

خاصية التعدي للتطابق

برهان



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

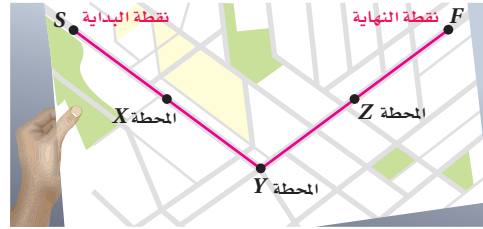
برهان حر:

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $AB = CD$, $CD = EF$ ، وذلك من تعريف تطابق القطع المستقيمة. وباستعمال خاصية التعدي للمساواة ينتج أن $AB = EF$ ؛ لذا $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ من تعريف التطابق.

البرهان باستعمال تطابق القطع المستقيمة

مثال 2 من واقع الحياة

ماراثون: تبين الخريطة أدناه المسار الذي سيسلكه المشاركون في سباق ماراتون. تقع المحطتان X و Z عند نقطتي المنتصف بين نقطة البداية والمحطة Y ونقطة النهاية والمحطة Y على التوالي. إذا كان بُعدا المحطة Y عن النقطتين X و Z متساويين، فأثبت أن الطريق من المحطة Z إلى نقطة النهاية يتطابق مع الطريق من المحطة X إلى نقطة البداية.

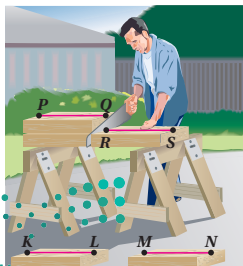


المعطيات: X نقطة منتصف $\overline{SY}$ ، و Z نقطة منتصف $\overline{YF}$ ، $XY = YZ$

المطلوب: $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$

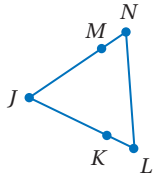
البرهان:

المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)
(6)	(6)



تحقق من فهمك

(2) **نجارة:** قص نجار قطعة خشبية $\overline{RS}$ طولها 22 in . ثم استعمالها نموذجاً ليقص قطعة أخرى $\overline{PQ}$ مطابقة لها. وهكذا استعمال $\overline{PQ}$ ليقص قطعة ثالثة $\overline{MN}$. ثم استعمال القطعة الثالثة $\overline{MN}$ ليقص قطعة رابعة $\overline{KL}$. أثبت أن $RS = KL$.



المثال 1

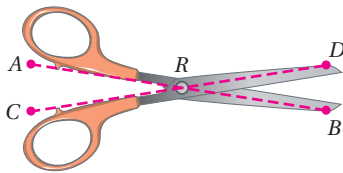
(1) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$

المطلوب: $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$

البرهان:

المبررات	العبارة
(a) $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$	(a) $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$
(b) تعريف تطابق القطع المستقيمة	(b) $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$
(c) $\overline{LK} + \overline{KJ} = \overline{NM} + \overline{KJ}$	(c) $\overline{LK} + \overline{KJ} = \overline{NM} + \overline{KJ}$
(d) $\overline{LK} + \overline{KJ} = \overline{NM} + \overline{MJ}$	(d) $\overline{LK} + \overline{KJ} = \overline{NM} + \overline{MJ}$
(e) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة	(e) $\overline{LK} + \overline{KJ} = \overline{NM} + \overline{MJ}$
(f) $\overline{LJ} = \overline{NJ}$	(f) $\overline{LJ} = \overline{NJ}$
(g) $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$	(g) $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$



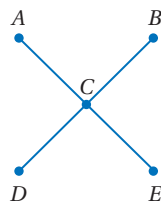
المثال 2

(2) مقص: في الشكل المجاور،

$\overline{AR} \cong \overline{CR}$, $\overline{DR} \cong \overline{BR}$ أثبت أن:

$\overline{AR} + \overline{DR} = \overline{CR} + \overline{BR}$

تدرب وحل المسائل



المثال 1

(3) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: C نقطة منتصف $\overline{AE}$.

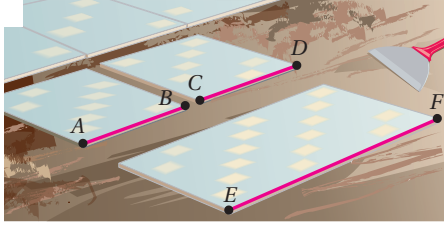
C نقطة منتصف $\overline{BD}$.

$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

البرهان:

المبررات	المبارات
(a) معطيات	(a) $\overline{AE} \cong \overline{BD}$
(b) $\overline{AC} = \overline{CE}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$	(b) $\overline{AC} = \overline{CE}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$
(c) $\overline{AE} = \overline{BD}$	(c) $\overline{AE} = \overline{BD}$
(d) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة	(d) $\overline{AC} + \overline{CE} = \overline{BC} + \overline{CD}$
(e) $\overline{AC} + \overline{CE} = \overline{BC} + \overline{CD}$	(e) $\overline{AC} + \overline{CE} = \overline{BC} + \overline{CD}$
(f) $\overline{AC} + \overline{AC} = \overline{CD} + \overline{CD}$	(f) $\overline{AC} + \overline{AC} = \overline{CD} + \overline{CD}$
(g) بالتبسيط	(g) $\overline{AC} \cong \overline{CD}$
(h) بالقسمة	(h) $\overline{AC} \cong \overline{CD}$
(i) $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	(i) $\overline{AC} \cong \overline{CD}$



المثال 2



الربط مع الحياة

المبطل: هو الشخص الذي يقوم بتركيب بلاط الأرضيات أو الجدران. ويستعمل في أثناء عمله أدوات قياس الطول والميل؛ من أجل وضع البلاط بشكل دقيق وترتيبه بأنماط جميلة. وعادة يلتحق المبطل بمركز تدريب مهني ليتلقى تدريباً خاصاً.

(4) **تبليط:** قص مبطل قطعة بلاط بطول معين، ثم استعملها نموذجاً ليقص بلاطة ثانية تطابق الأولى، ثم استعمل هاتين البلاطتين لقص بلاطة ثالثة طولها يساوي مجموع طوكي البلاطتين. أثبت أن طول البلاطة الثالثة يساوي مثلي طول البلاطة الأولى.

أثبت الخاصيتين الآتيتين في النظرية (1.2).

(5) خاصية التماثل للتطابق.

(6) خاصية الانعكاس للتطابق.

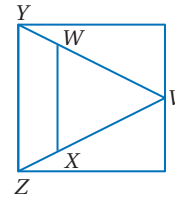
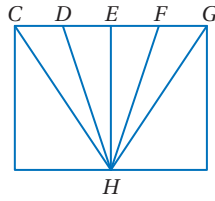
برهان: أثبت كلا مما يأتي:

(8) إذا كانت E نقطة منتصف $\overline{DF}$ ،

(7) إذا كان $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$ ، $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ ،

فإن $\overline{CE} \cong \overline{EG}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{FG}$.

فإن $\overline{VW} \cong \overline{VX}$.



(9) إذا كان $\overline{FE} \cong \overline{LK}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{GI}$ ،

$AC + CF + FE = GI + IL + LK$.

(a) فأثبت أن $\overline{CF} \cong \overline{IL}$.

(b) برّر برهانك بقياس أطوال القطع المستقيمة. فسّر إجابتك.

(10) **تمثيلات متعددة:** A نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ، و B نقطة

منتصف $\overline{PA}$ ، و C نقطة منتصف $\overline{PB}$.

(a) هندسياً: ارسم شكلاً يوضح هذه المعطيات.

(b) جبرياً: ضع تخميناً للعلاقة الجبرية بين PQ و PC .

(c) حسياً: استعمل مسطرة لرسم قطعة مستقيمة تطابق $\overline{PQ}$ ، ولتعيين النقطتين B و C على $\overline{PQ}$ ،

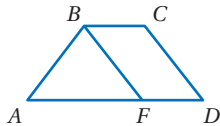
استعمل هذا الرسم لتؤيد التخمين الذي وضعته.

(d) منطقياً: أثبت صحة تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا

(11) **اكتشف الخطأ:** في الشكل المجاور: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، اختبر النتائج

التي حصل عليها أحمد وسعد، وهل وصل أيٌّ منهما إلى نتيجة صحيحة؟



سعد

بها أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ،
إذن $\overline{AB} \cong \overline{BF}$ وذلك بتطبيق
خاصية الانعكاس للتطابق.

أحمد

بها أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ،
إذن $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ وذلك بتطبيق
خاصية التعدي للتطابق.



(12) **تحديد:** $ABCD$ مربع. أثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

(13) **اكتب:** هل توجد خاصية في التطابق تشبه خاصية الجمع في المساواة؟ فسر إجابتك.

(14) **تبرير:** صنف العبارة الآتية إلى صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فأعط مثلاً مضاداً.

إذا كانت النقاط A, B, C, D, E تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع B بين A و C ، وتقع C بين B و D ، وتقع D بين C و E ، وكان $AC = BD = CE$ ، فإن $AB = BC = DE$.

(15) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلاً يمثل تعميماً للمسألة جمع أطوال القطع المستقيمة، (جمع 3 قطع مستقيمة) واكتب النتيجة.

تدريب على اختبار

(17) أي العبارات الآتية يعطي وصفاً أفضل للمسألة؟

- A تخمين ينشأ عن أمثلة.
- B تخمين ينشأ عن حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص.
- C عبارة تقبل على أنها صحيحة.
- D عبارة تم إثبات صحتها.

(16) النقاط A, B, C, D تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع النقطة B بين A و C والنقطة C بين B و D . أي عبارة مما يلي ليست بالضرورة صحيحة؟

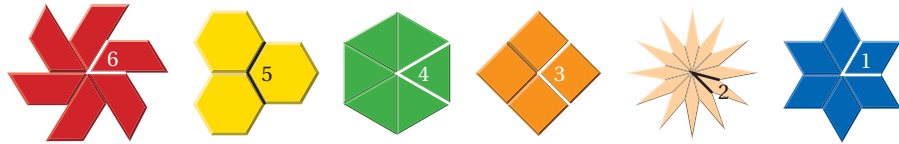
- A $AB + BD = AD$
- B $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
- C $\overline{BC} \cong \overline{BC}$
- D $BC + CD = BD$

مراجعة تراكمية

(18) **برهان:** أثبت أنه إذا كان $-3(2x+1) = 57$ ، فإن $x = -10$ ، واكتب تبريراً لكل خطوة. (الدرس 6-1)

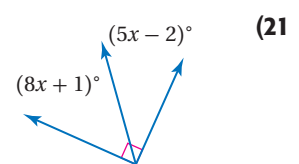
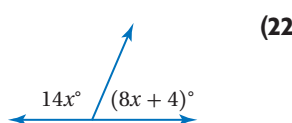
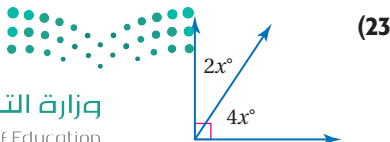
(19) **نماذج:** استعمل حاتم ستة مربعات من الورق المقوى لعمل منشور رباعي. ما الجزء من الفراغ الذي يمثل كل وجه من المنشور، وكم مستقيماً ينتج عن تقاطعها؟ (الدرس 5-1)

(20) **أنماط:** يمكن ترتيب مجموعة من قطع النماذج لتكوين نمط دوراني دون ترك فراغات بين هذه القطع، وكما تعلم أن قياس الدورة الكاملة يساوي 360° ، أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ من الأشكال الآتية بالدرجات. (الدرس 1-1)



استعد للدرس اللاحق

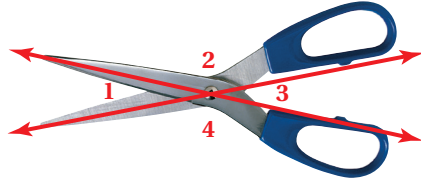
جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:



إثبات علاقات بين الزوايا

Proving Angles Relationships

1-8



لماذا؟
تلاحظ أن $\angle 1$ بين شفرتي المقص، و $\angle 2$ بين الشفرة ومقبض المقص تشكلان زوجاً من الزوايا المتجاورة على مستقيم. وبالمثل فإن $\angle 2$ و $\angle 3$ بين مقبضي المقص تشكلان أيضاً زوجاً من الزوايا المتجاورة على مستقيم.

الزوايا المتتامة والمتكاملة: توضّح مسّمة المنقلة العلاقة بين قياس الزوايا والأعداد الحقيقية.

فيما سبق:

درست تعيين أزواج خاصة من الزوايا واستعملتها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أكتب براهين تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.
- أكتب براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.

مسّمة 1.10 **مسّمة المنقلة**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تستعمل المنقلة للربط بين قياس زاوية وعدد حقيقي يقع بين 0° و 180° .

مثال: في $\angle ABC$ ، إذا انطبق صفر المنقلة على $\overrightarrow{BA}$ ، فإن العدد الذي ينطبق على $\overrightarrow{BC}$ يمثل قياس $\angle ABC$.

درست سابقاً مسّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، وتوجد علاقة مشابهة لها بين قياسات الزوايا.

مسّمة 1.11 **مسّمة جمع قياسات الزوايا**

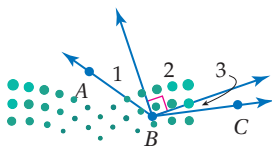
أضف إلى مطويتك

تقع النقطة D داخل $\angle ABC$ إذا وفقط إذا كان

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

مثال 1 استعمال مسّمة جمع قياسات الزوايا

إذا كان $m\angle JKL = 145^\circ$ ، $m\angle 2 = 56^\circ$ فأوجد $m\angle 1$. برّر خطوات حلّك.



تحقق من فهمك

(1) إذا كان $m\angle 1 = 23^\circ$ ، $m\angle ABC = 131^\circ$ فأوجد $m\angle 3$. برّر خطوات حلّك.

يمكن استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا مع علاقات أخرى على الزوايا؛ لإثبات نظريات تتعلق بالزوايا.

مراجعة المفردات

الزوايا المتكاملتان

هما زاويتان مجموع قياسيهما يساوي 180°

الزوايا المتتامتان

هما زاويتان مجموع قياسيهما يساوي 90°

الزوايا المتجاورتان

على مستقيم هما زاويتان متجاورتان، بحيث يكون ضلعاها غير المشتركين نصفَي مستقيم متعاكسين.

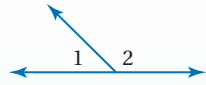
أضف إلى

مطوبتك

نظريتان

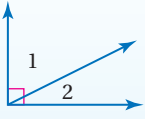
1.3 نظرية الزاويتين المتكاملتين: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإنهما متكاملتان.

مثال: $\angle 1, \angle 2$ متجاورتان على مستقيم، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$



1.4 نظرية الزاويتين المتتامتين: إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإن الزاويتين تكونان متتامتين.

مثال: ضلعا الزاويتين المتجاورتين $\angle 1, \angle 2$ غير المشتركين يشكلان زاوية قائمة، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$



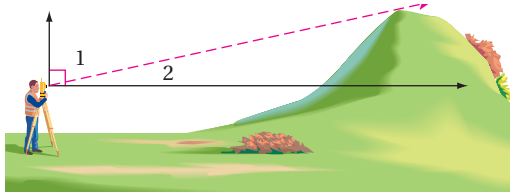
سوف تبرهن النظريتين 1.3 و 1.4 في السؤالين 14 و 15

استعمال خصائص الزوايا المتكاملة أو المتتامّة

مثال 2 من واقع الحياة

مَسَّحُ الْأَرْضِي: قام مَسَّح بقياس الزاوية بين خط نظره إلى قمة تلة، والمستقيم الرأسّي فكانت 73° تقريبًا. ما قياس الزاوية بين خط نظره والخط الأفقي؟ برّر خطوات الحل.

افهم:



خطط:

حل:

تحقق:

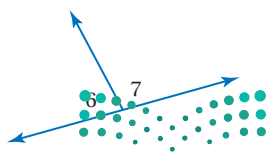
تحقق من فهمك



(2) في الشكل المجاور، $\angle 6$ و $\angle 7$ متجاورتان على مستقيم. إذا كان:

$$m\angle 6 = (3x + 32)^\circ \text{ و } m\angle 7 = (5x + 12)^\circ,$$

فأوجد قيمة $m\angle 6$ ، $m\angle 7$. برّر خطوات الحل.



وزارة التعليم

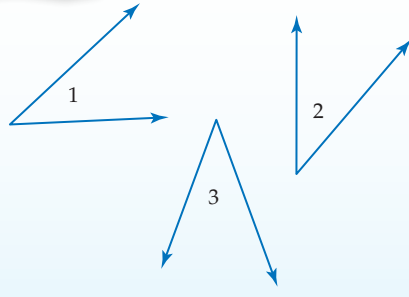
Ministry of Education

2021 - 1443

تطابق الزوايا: إن الخصائص الجبرية التي تنطبق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها، تنطبق أيضًا على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

نظرية 1.5 **خصائص تطابق الزوايا**

أضف إلى مطويتك



خاصية الانعكاس للتطابق
 $\angle 1 \cong \angle 1$

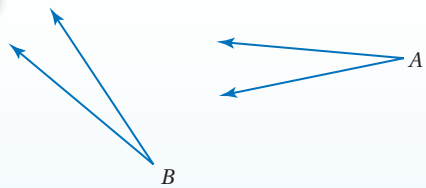
خاصية التماثل للتطابق
إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

خاصية التعدي للتطابق
إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، وكانت $\angle 2 \cong \angle 3$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$.

سُبرهن خاصيتي الانعكاس والتعدي للتطابق في السؤالين 16 و 17

برهان **خاصية التماثل للتطابق**

أضف إلى مطويتك



المعطيات: $\angle A \cong \angle B$
المطلوب: $\angle B \cong \angle A$

برهان حر:

تعلم من المعطيات أن $\angle A \cong \angle B$. ومن تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle A = m\angle B$ ، وباستعمال خاصية التماثل للمساواة يكون $m\angle B = m\angle A$ ، وعليه فإن $\angle B \cong \angle A$ من تعريف تطابق الزوايا.

يمكنك تطبيق الخصائص الجبرية لإثبات نظريات على تطابق الزوايا تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.

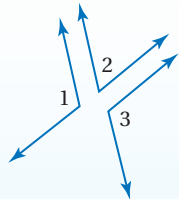
نظريتان

أضف إلى مطويتك

1.6 نظرية تطابق المكملات:

الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

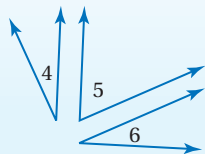
مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$ وكان $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$.



1.7 نظرية تطابق المتممات:

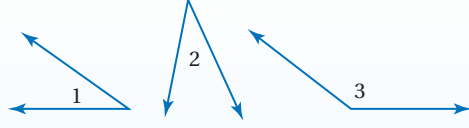
الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90^\circ$ ، فإن $\angle 4 \cong \angle 6$ و $m\angle 5 + m\angle 6 = 90^\circ$.



برهان

إحدى حالات نظرية تطابق المكمالات



المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان.

$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.

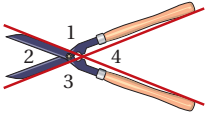
المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	(1) $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان.
(2) تعريف الزاويتين المتكاملتين	(2) $m\angle 1 + m\angle 3 = 180^\circ, m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$
(3) بالتعويض	(3) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$
(4) خاصية الطرح للمساواة	(4) $m\angle 1 = m\angle 2$
(5) تعريف تطابق الزوايا	(5) $\angle 1 \cong \angle 2$

مثال 3

براهين تستعمل فيها نظريتا تطابق المكمالات أو المتممات



أثبت أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس 2 و 4 في الشكل المجاور متطابقتان.

المعطيات: $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 4$

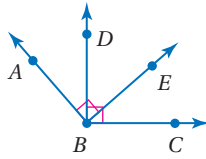
البرهان:

المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)

مراجعة المفردات

الزاويتان المتقابلتان بالرأس

هما زاويتان غير متجاورتين تتكونان من تقاطع مستقيمين.



تحقق من فهمك

(3) في الشكل المجاور $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان.

أثبت أن $\angle ABD \cong \angle EBC$.

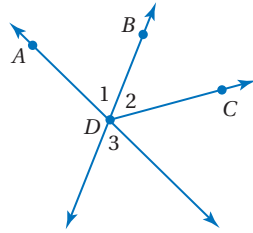
في المثال 3، لاحظ أن $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس. ونتيجة هذا المثال تُثبت نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس الآتية:

نظرية 1.8

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

مثال: $\angle 1 \cong \angle 3$
 $\angle 2 \cong \angle 4$



مثال 4 استعمال الزوايا المتقابلة بالرأس

أثبت أنه إذا كان $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$ ، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$

المعطيات: $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 3$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)
(6)	(6)

تحقق من فهمك

(4) إذا كانت $\angle 3$ و $\angle 4$ متقابلتين بالرأس، وكان $m\angle 3 = (6x + 2)^\circ$ و $m\angle 4 = (8x - 14)^\circ$ فأوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$. برّر خطوات حلّك.

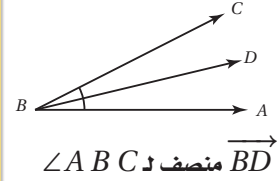
يمكن استعمال النظريات الواردة في هذا الدرس لإثبات نظريات الزاوية القائمة الآتية:

نظريات	نظريات الزاوية القائمة	أضف إلى مطبعتك
1.9	يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونان أربع زوايا قائمة. مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$ ، فإن $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة	
1.10	جميع الزوايا القائمة متطابقة. مثال: إذا كانت $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة، فإن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$.	
1.11	المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة. مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 2 \cong \angle 4, \angle 4 \cong \angle 3, \angle 3 \cong \angle 1$	
1.12	إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان. مثال: إذا كانت $\angle 5 \cong \angle 6$ ، وكانت $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتين، فإن $\angle 5$ و $\angle 6$ قائمتان.	
1.13	إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، وكانتا متطابقتين، فإنهما قائمتان. مثال: إذا كانت $\angle 7$ و $\angle 8$ متجاورتين على مستقيم، وكانت $\angle 7 \cong \angle 8$ فإن $\angle 7$ و $\angle 8$ قائمتان.	

إرشادات للدراسة

منصف الزاوية

هو نصف مستقيم يقع داخل الزاوية ويقسم الزاوية قسمين متطابقين، وتكون بدايته عند رأس الزاوية.



قراءة الرياضيات

رمز التعامد

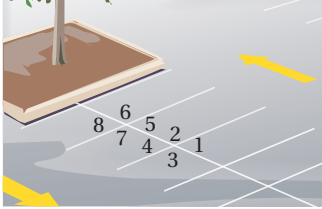
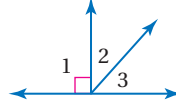
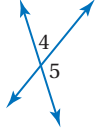
تذكر أن الرمز $\perp$ يقرأ يعامد.

المثال 1

أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

$$m\angle 4 = (3(x-1))^\circ, m\angle 5 = (x+7)^\circ \quad (2)$$

$$m\angle 2 = x^\circ, m\angle 3 = (x-16)^\circ \quad (1)$$



المثال 2

(3) موقف: استعمل مخطط موقف السيارات المجاور.

إذا علمت أن $\angle 2 \cong \angle 6$ ، فأثبت أن $\angle 4 \cong \angle 8$

المثال 3

(4) برهان: فيما يأتي أكمل برهان إحدى حالات نظرية تطابق المثلثات.

المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان.

$\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.

المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

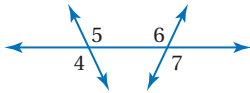
المبررات	العبارات
(a) ؟	(a) $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان.
(b) ؟	$\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.
(c) ؟	(b) $m\angle 1 + m\angle 3 = 90^\circ$
(d) ؟	$m\angle 2 + m\angle 3 = 90^\circ$
(e) ؟	(c) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$
	(d) $m\angle 1 = m\angle 2$
	(e) $\angle 1 \cong \angle 2$

المثال 4

(5) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين فيما يأتي:

المعطيات: $\angle 4 \cong \angle 7$

المطلوب: $\angle 5 \cong \angle 6$



تدرب وحل المسائل

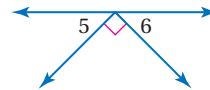
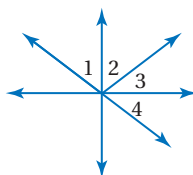
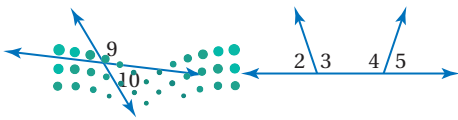
الأمثلة 1-3

أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

$$m\angle 9 = (3x + 12)^\circ \quad (9) \quad m\angle 5 = m\angle 6 \quad (6) \quad m\angle 2 = 28^\circ$$

(8) $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان، $\angle 4$ و $\angle 5$ متكاملتان، $\angle 1 \cong \angle 4$

$$m\angle 10 = (x - 24)^\circ \quad m\angle 4 = 105^\circ$$



المثال 4

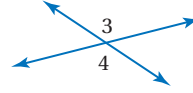
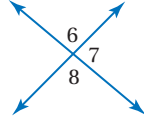
أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

$$m\angle 6 = (2x - 21)^\circ \quad (11)$$

$$m\angle 3 = (2x + 23)^\circ \quad (10)$$

$$m\angle 7 = (3x - 34)^\circ$$

$$m\angle 4 = (5x - 112)^\circ$$



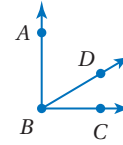
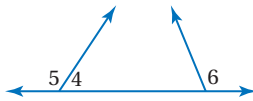
برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين في كلٍّ مما يأتي:

(13) المعطيات: $\angle 5 \cong \angle 6$

(12) المعطيات: $\angle ABC$ زاوية قائمة.

المطلوب: $\angle 4, \angle 6$ متكاملتان.

المطلوب: $\angle ABD, \angle CBD$ متتامتان.



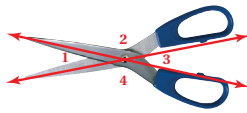
اكتب برهاناً لكلٍّ من النظريات الآتية:

(15) نظرية الزاويتين المتتامتين.

(14) نظرية الزاويتين المتكاملتين.

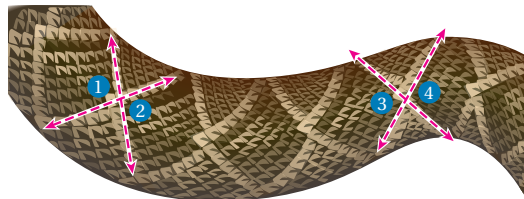
(17) خاصية التعدي للتطابق.

(16) خاصية الانعكاس للتطابق.



(18) **برهان:** أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الأربع الناتجة عند فتح المقص يساوي 360°

(19) **طبيعة:** الأفعى المجلجلة أفعى سامّة، ويوجد على جلدها زركشة تأخذ أشكالاً نمطية. انظر إلى الشكل أدناه، والذي يمثّل صورة مكبرة لجلد الأفعى المبيّنة جهة اليمين. إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 4$ ، فأثبت أن $\angle 2 \cong \angle 3$.



الربط مع الحياة

يصل طول أنياب الأفعى المجلجلة إلى 6 in ، ويمكنها طي أنيابها داخل فمها لتكون موازية لسقف الفم عندما يكون مغلقاً.

برهان: استعمل الشكل المجاور لكتابة برهان لكلٍّ من النظريات الآتية.

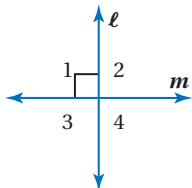
(22) نظرية 1.11

(21) نظرية 1.10

(20) نظرية 1.9

(24) نظرية 1.13

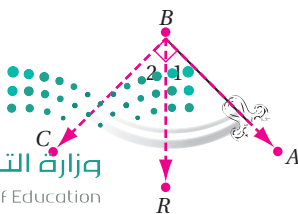
(23) نظرية 1.12



(25) **بندول:** يظهر في الشكل المجاور وضع بندول ساعة تقليدية.

إذا علمت أن $\angle ABC$ قائمة. وأن $m\angle 1 = 45^\circ$ ،

فاكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن $\overrightarrow{BR}$ ينصف $\angle ABC$.



(26) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستكشف علاقات الزوايا.

- (a) هندسيًا: استعمل المنقلة لرسم زاوية قائمة ABC ، وحدد نقطة داخلها، وسمّها D . ارسم $\overrightarrow{BD}$.
ثم ارسم $\overrightarrow{KL}$ ، وارسم $\angle JKL$ التي تطابق $\angle ABD$.
(b) لفظيًا: ضع تخمينًا حول العلاقة بين $\angle JKL$ و $\angle DBC$.
(c) منطقيًا: أثبت صحة التخمين الذي وضعته.

مسائل مهارات التفكير العليا

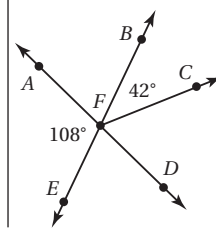
- (27) **تحّد:** لقد تم إثبات حالة واحدة من نظرية تطابق المكملات، وفي السؤال 4 برهنت الحالة المشابهة من نظرية تطابق المتممات. فسّر لماذا توجد حالتان لكل من هاتين النظريتين، واكتب برهانًا للحالة الثانية لكل منهما.
(28) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.
إذا كانت إحدى الزوايا المتكونة من مستقيمين متقاطعين حادة، فإن الزوايا الثلاث الأخرى المتكونة من هذا التقاطع حادة أيضًا.

(29) **اكتب:** فسّر كيف يمكن استعمال المنقلة لإيجاد قياس الزاوية المتممة لزاوية أخرى بطريقة سريعة.

تدريب على اختبار

(31) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين هي 4:1 فما قياس الزاوية الصغرى؟

15° A	24° C
18° B	36° D



(30) في الشكل المجاور إذا كانت النقاط F, E, B تقع على استقامة واحدة، وكذلك النقاط A, F, D، فأوجد قياس $\angle CFD$

66° A	108° C
72° B	138° D

مراجعة تراكمية

(32) **خرائط:** يُظهر الشكل المجاور مقياس رسم خريطة تدريجين أحدهما بالكيلومترات، والآخر بالأميال. إذا كانت $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ قطعتين مستقيمتين على الخريطة،

حيث $AB = 100$ km و $CD = 62$ mi،

فهل $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ؟ فسّر إجابتك. (الدرس 1-7)

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-6)

(34) إذا كان $MN = PQ$ ، فإن $PQ = MN$

(33) إذا كان $y + 7 = 5$ ، فإن $y = -2$

(36) إذا كان $x(y + z) = 4$ ، فإن $xy + xz = 4$

(35) إذا كان $a - b = x$ و $b = 3$ ، فإن $a - 3 = x$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الشكل المجاور للإجابة عما يأتي:

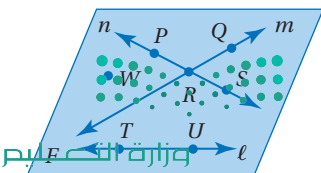
(38) سمّ تقاطع المستقيمين m و n .

(37) سمّ مستقيماً يحوي النقطة P .

(40) اذكر اسمًا آخر للمستقيم n .

(39) سمّ نقطة لا تقع على أيٍّ من المستقيمات l, m, n .

(41) هل يتقاطع المستقيم l مع المستقيم m أو المستقيم n ؟ فسّر إجابتك.



Ministry of Education

2021 - 1443

المفردات الأساسية

- التخمين (ص. 12) العكس (ص. 29)
- التبرير الاستقرائي (ص. 12) المعكوس (ص. 29)
- المثال المضاد (ص. 15) العبارات الشرطية
- قيمة الصواب (ص. 19) المرتبطة (ص. 29)
- العبارة المركبة (ص. 19) التكافؤ المنطقي (ص. 29)
- نفي العبارة (ص. 19) التبرير الاستنتاجي (ص. 37)
- العبارة (ص. 19) قانون الفصل المنطقي (ص. 37)
- عبارة الوصل (ص. 19) قانون القياس المنطقي (ص. 39)
- عبارة الفصل (ص. 20) المسلمة (ص. 45)
- جدول الصواب (ص. 21) البرهان (ص. 46)
- النتيجة (ص. 26) البرهان الحر (ص. 47)
- العبارة الشرطية (ص. 26) النظرية (ص. 47)
- الفرض (ص. 26) البرهان الجبري (ص. 53)
- المعاكس الإيجابي (ص. 29) البرهان ذو العمودين (ص. 54)

اختبار المفردات

بين ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

- المسلمة هي العبارة التي تحتاج إلى برهان .
- الجزء الأول في العبارة الشرطية يسمى تخميناً.
- يستعمل التبرير الاستنتاجي قوانين ونظريات للوصول إلى نتائج منطقية من العبارات المعطاة.
- ينتج المعاكس الإيجابي عن نفي الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.
- تتكون عبارة الوصل المنطقي من ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).
- النظرية يُسلم بصحتها دائماً.
- ينتج العكس بتبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.
- لإثبات أن التخمين خاطئ، يجب أن يُعطي برهان.
- يمكن أن يكتب معكوس العبارة p ، على صورة ليس p .
- في البرهان ذي العمودين الخصائص التي تبرر كل خطوة تسمى المبررات.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

- التبرير الاستقرائي والمنطق (الدرس 1-1 و 1-2)
- التبرير الاستقرائي: تبرير تُستعمل فيه أمثلة وأنماط محددة للوصول إلى نتيجة.
 - المثال المضاد: هو المثال الذي يُثبت عدم صحة التخمين.
 - نفي العبارة p : ليس p أو $\sim p$
 - عبارة الوصل: عبارة مركبة تحوي (و)
 - عبارة الفصل: عبارة مركبة تحوي (أو)

العبارات الشرطية (الدرس 1-3)

- يمكن كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا... فإن...)
- أو على الصورة إذا كان p ، فإن q ، حيث p الفرض، و q النتيجة.

$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية
$q \rightarrow p$	العكس
$\sim p \rightarrow \sim q$	المعكوس
$\sim q \rightarrow \sim p$	المعاكس الإيجابي

التبرير الاستنتاجي (الدرس 1-4)

- قانون الفصل المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صائبة، وكانت p صائبة أيضاً، فإن q صائبة.
- قانون القياس المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صائبة، وكانت $q \rightarrow r$ صائبة، فإن $p \rightarrow r$ صائبة أيضاً.

البرهان (الدروس من 1-5 إلى 1-8)

- الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلاً يوضحها إن أمكن.
- الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.
- الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.
- الخطوة 4: برّر كل عبارة مستعملاً تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.
- الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المطويات

منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطوبتك.



مراجعة الدروس

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين (ص 12-18)

مثال 1

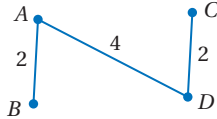
حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًا.

(a) إذا $c = d, d = c$ هو مثال على خاصية من خصائص الأعداد الحقيقية.

$c = d, d = c$ هو مثال على خاصية التماثل للمساواة في الأعداد الحقيقية. وهذا التخمين صحيح.

(b) إذا كان $AB + CD = AD$ ، فإن B و C تقعان بين A و D هذا التخمين خاطئ. في الشكل أدناه

$AB + CD = AD$ ، ولكن B و C لا تقعان بين A و D



حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان التخمين خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًا.

(11) إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتين، فإنهما متجاورتان على مستقيم.

(12) إذا أعطيت النقاط $W(-3, 2), X(-3, 7), Y(6, 7), Z(6, 2)$ ، فإن الشكل الرباعي $WXYZ$ مستطيل.

(13) **منازل:** معظم أسطح المنازل في البلدان القريبة من القطب الشمالي تكون مائلة، بينما تكون مستوية في المناطق الحارة. أعط تخمينًا عن سبب اختلاف الأسطح.

1-2 المنطق (ص 19-25)

مثال 2

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسر تبريرك.

$p: x^2$ عدد غير سالب.

q : الزوايا المتجاورة لها ضلع مشترك.

r : العدد السالب ليس عددًا حقيقيًا.

(a) $\sim q \wedge r$

$\sim q \wedge r$: الزوايا المتجاورة ليس لها ضلع مشترك، والعدد السالب ليس عددًا حقيقيًا.

بما أن كلا من $\sim q$ و r خاطئتان، فإن $\sim q \wedge r$ خاطئة أيضًا.

(b) r أو p

r أو $p: x^2$ عدد غير سالب، أو العدد السالب ليس عددًا حقيقيًا.

p أو r صائبة؛ لأن p صائبة، وليس لكون r خاطئة تأثير.

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسر تبريرك.

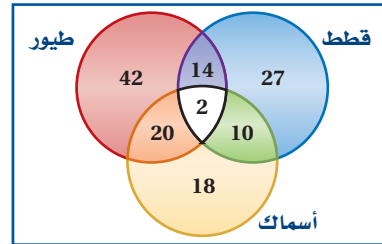
p : يحوي المستوى ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

q : الياصلة المربعة تكافئ ثلاث أقدام مربعة.

r : مجموع قياس الزاويتين المتتامتين يساوي 180° .

(14) $\sim q \vee r$ (15) $p \wedge \sim r$ (16) $\sim p \vee q$

(17) **حيوانات أليفة:** شكل فن الآتي يُظهر عدد الأشخاص الذين لديهم حيوانات أليفة في منازلهم.



(a) ما عدد الأشخاص الذين لديهم أسماك فقط؟

(b) ما عدد الأشخاص الذين لديهم قطط وطيور فقط؟

(c) ما عدد الأشخاص الذين لديهم طيور وأسماك؟

1-3

العبارات الشرطية (ص 26-35)

مثال 3

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصائبة الآتية:

إذا كان الشكل مربعاً فإنه متوازي أضلاع.

العكس: إذا كان الشكل متوازي أضلاع، فإنه مربع.

المعكوس: إذا لم يكن الشكل مربعاً، فإنه ليس متوازي أضلاع.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الشكل متوازي أضلاع، فإنه ليس مربعاً.

حدّد قيمة الصواب للعبارتين الشرطيتين الآتيتين، وإذا كانت العبارة صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعطِ مثالاً مضاداً.

(18) إذا ربّعت العدد الصحيح، فإن الناتج يكون عدداً صحيحاً موجباً.

(19) إذا كان للشكل السداسي ثمانية أضلاع، فإن جميع زواياه تكون منفرجة.

(20) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصائبة الآتية. ثم حدّد ما إذا كانت أي منها صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالاً مضاداً. إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإن لهما القياس نفسه.

1-4

التبرير الاستنتاجي (ص 37-44)

مثال 4

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة فاكذب "لا نتيجة صائبة". فسرّ تبريرك.

(1) إذا كان قياس الزاوية أكبر من 90° ، فإنها منفرجة.

(2) إذا كانت الزاوية منفرجة، فإنها ليست قائمة.

p : قياس الزاوية أكبر من 90°

q : الزاوية منفرجة

r : الزاوية ليست قائمة

العبارة (1): $p \rightarrow q$

العبارة (2): $q \rightarrow r$

بما أن العبارتين الشرطيتين (1)، (2) صائبتان، فإنه يمكن استنتاج أن $p \rightarrow r$ ؛ باستعمال قانون القياس المنطقي؛ أي أنه إذا كان قياس الزاوية أكبر من 90° ، فإنها ليست قائمة.

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكذب "لا نتيجة صائبة". فسرّ تبريرك.

(21) المعطيات: إذا نصّف قطراً الشكل الرباعي كلّ منهما الآخر، فإن الشكل متوازي أضلاع.

ينصف قطراً الشكل الرباعي $PQRS$ كلّ منهما الآخر.

(22) المعطيات: إذا واجهت عائشة صعوبة في مادة العلوم، فإنها ستخصص وقتاً إضافياً لدراسة المادة.

إذا لم تذهب عائشة للسوق، فإنها ستخصص وقتاً إضافياً لدراسة مادة العلوم.

(23) زلازل: حدّد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا فيما يأتي، اعتماداً على المعطيات. فسرّ تبريرك.

المعطيات: إذا كانت قوة الزلزال 7.0 درجات فأكثر على مقياس ريختر، فإنه يُعتبر زلزالاً مدمراً، ويحدث دماراً وخراباً كبيرين.

كانت قوة زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م 8.0 درجات على مقياس ريختر.

نتيجة: كان زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م زلزالاً مدمراً، وأحدث دماراً وخراباً كبيرين.



1-5

المسلّمات والبراهين الحرة (ص 51-45)

مثال 5

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. فسّر تبريرك.

(a) إذا وقعت النقاط X, Y, Z في المستوى $\mathcal{R}$ ، فإن هذه النقاط لا تقع على استقامة واحدة.

صحيحة أحياناً؛ الحقيقة المعطاة هي أن X, Y, Z تقع في المستوى $\mathcal{R}$ لا تضمن وقوعها على استقامة واحدة أو لا.

(b) يمر مستقيم واحد فقط بالنقطتين A و B .

صحيحة دائماً؛ بتطبيق المسلمة 1.1، يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين معلومتين.

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. فسّر تبريرك.

(24) يتقاطع المستويان في نقطة.

(25) تقع ثلاث نقاط في أكثر من مستوى.

(26) إذا وقع المستقيم m في المستوى X ، ومّر المستقيم m بالنقطة Q ، فإن النقطة Q تقع في المستوى X .

(27) إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإنهما تكونان زاوية قائمة.

(28) **عمل:** دُعي ستة أشخاص لحضور اجتماع عمل. إذا صافح كل شخص بقية الأشخاص، فما عدد المصافحات التي تبادلها هؤلاء الأشخاص جميعاً؟ ارسم نموذجاً يؤيد تخمينك.

1-6

البرهان الجبري (ص 59-53)

مثال 6

أكمل البرهان الآتي:

$$\frac{5x-3}{6} = 2x+1 \quad \text{المعطيات؛}$$

$$x = -\frac{9}{7} \quad \text{المطلوب؛}$$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	(1) $\frac{5x-3}{6} = 2x+1$
(2) خاصية الضرب للمساواة	(2) $5x-3 = 6(2x+1)$
(3) خاصية التوزيع	(3) $5x-3 = 12x+6$
(4) خاصية الطرح للمساواة	(4) $-3 = 7x+6$
(5) خاصية الطرح للمساواة	(5) $-9 = 7x$
(6) خاصية القسمة للمساواة	(6) $-\frac{9}{7} = x$
(7) خاصية التماثل للمساواة	(7) $x = -\frac{9}{7}$



وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

(29) إذا كان $7(x-3) = 35$ ، فإن $7(x-3) = 35$

(30) إذا كان $2x+19 = 27$ ، فإن $2x = 8$

(31) $5(3x+1) = 15x+5$

(32) إذا كان $12 = 2x+8$ و $2x+8 = 3y$ ، فإن $12 = 3y$.

(33) أكمل البرهان الآتي:

$$\text{المعطيات؛ } 6(x-4) = 42$$

$$\text{المطلوب؛ } x = 11$$

المبررات	العبارات
(a) ؟	(a) $6(x-4) = 42$
(b) ؟	(b) $6x-24 = 42$
(c) ؟	(c) $6x = 66$
(d) ؟	(d) $x = 11$

(34) اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $PQ = RS$

$$\text{و } PQ = 5x+9, RS = x-31, \text{ فإن } x = -10.$$

(35) **اختبارات:** حصل أحمد على درجة مساوية لدرجة عمر في

اختبار الرياضيات، وحصل عمر على درجة مساوية لدرجة

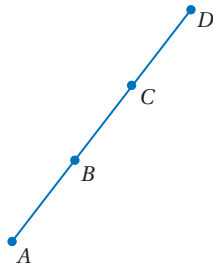
سعد. ما الخاصية التي تثبت أن أحمد وسعداً حصلوا على

الدرجة نفسها؟

1-7

إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة (ص 60-65)

مثال 7



اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: B نقطة منتصف AC

C نقطة منتصف BD

المطلوب: $AB \cong CD$

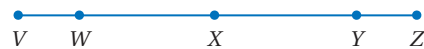
البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	(1) B نقطة منتصف AC
(2) نظرية نقطة المنتصف	(4) $AB \cong BC$
(3) معطيات	(3) C نقطة منتصف BD
(4) نظرية نقطة المنتصف	(4) $BC \cong CD$
(5) خاصية التعدي للتطابق	(5) $AB \cong CD$

اكتب برهاناً ذا عمودين في كلٍّ من المسألتين الآتيتين:

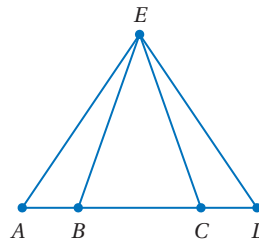
(36) المعطيات: X نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{WY}$ و $\overline{VZ}$

المطلوب: $VW = ZY$



(37) المعطيات: $AB = DC$

المطلوب: $AC = DB$



(38) جغرافيا: أراد طارق السفر من مدينة جدة إلى الطائف،

مروراً بمكة المكرمة لاصطحاب أخيه. ويعلم أن المسافة

من جدة إلى مكة المكرمة تساوي 79 km ، والمسافة

من مكة المكرمة إلى الطائف تساوي 88 km ، استنتج أنه

سيقطع 167 km في هذه الرحلة. فسر كيف استنتج ذلك؟

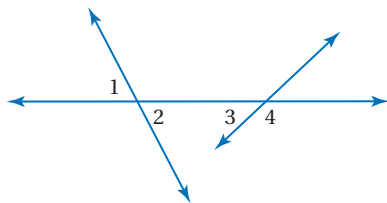
افتراض أن الطريق الذي يربط هذه المدن الثلاث يشكل مستقيماً.

1-8

إثبات علاقات بين الزوايا (ص 66-73)

مثال 8

إذا علمت أن: $m\angle 1 = 72^\circ$ ، $m\angle 3 = 26^\circ$ ، فأوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكل أدناه.



$m\angle 2 = 72^\circ$ ؛ لأن $\angle 1, \angle 2$ متقابلتان بالرأس.

$\angle 3, \angle 4$ متجاورتان على مستقيم؛ إذن فهما متكاملتان.

تعريف الزاويتين المتكاملتين

$$26^\circ + m\angle 4 = 180^\circ$$

$$m\angle 4 = 154^\circ$$

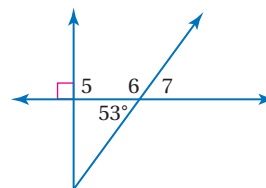
بطرح 26 من كلا الطرفين

أوجد قياس كل زاوية فيما يأتي:

(39) $\angle 5$

(40) $\angle 6$

(41) $\angle 7$

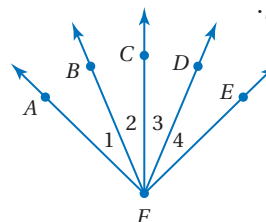


(42) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 4$ ،

$\angle 2 \cong \angle 3$

المطلوب: $\angle AFC \cong \angle EFC$



(8) **برهان:** أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $3(x-4) = 2x + 7$

المطلوب: $x = 19$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a) معطيات	(a) $3(x-4) = 2x + 7$
(b) ؟	(b) $3x - 12 = 2x + 7$
(c) خاصية الطرح للمساواة	(c) ؟
(d) ؟	(d) $x = 19$

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً.

(9) الزاويتان المتكاملتان تكونان متجاورتين على مستقيم.

(10) إذا وقعت B بين A و C، فإن $AC + AB = BC$.

(11) إذا تقاطع مستقيمان وكونا زاويتين متطابقتين متجاورتين، فإنهما متعامدان.

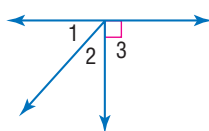
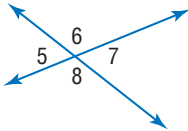
أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة في كل مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

(13) $m\angle 7 = (2x + 15)^\circ$

(12) $m\angle 1 = x^\circ$

$m\angle 8 = (3x)^\circ$

$m\angle 2 = (x - 6)^\circ$



اكتب كلاً من العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا... فإن...).

(14) قياس الزاوية الحادة أقل من 90°

(15) يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونا زوايا قائمة.

(16) **اختيار من متعدد:** أيّ العبارات الآتية هي المعاكس الإيجابي للعبرة الآتية؟

إذا احتوى المثلث على زاوية منفرجة واحدة، فإنه مثلث منفرج الزاوية.

A إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

B إذا لم يكن في المثلث زاوية منفرجة واحدة، فإنه ليس مثلثاً منفرج الزاوية.

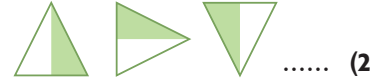
C إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه لا يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

وزارة التعليم

Ministry of Education
2021-1443

اكتب تخميناً يصف النمط في كل من المتابعتين الآتيتين، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منهما.

(1) 15, 30, 45, 60,



(2)

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسر إجابتك.

$5 < -3 : p$

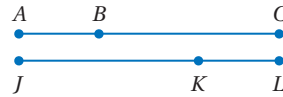
q : جميع الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

r : إذا كان $4x = 36$ ، فإن $x = 9$.

(3) p و q

(4) $(p \vee q) \wedge r$

(5) **برهان:** اكتب برهاناً حرّاً.

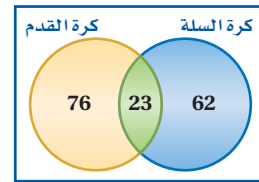


المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{CB}$

$\overline{KL} \cong \overline{AB}$

المطلوب: $\overline{JL} \cong \overline{AC}$

(6) **رياضة:** استعمل شكل فن الآتي الذي يبين نوع الرياضة التي اختارها الطلاب للإجابة عن السؤالين أدناه.



(a) صف اختيار الطلاب الذين هم خارج منطقة التقاطع وداخل دائرة كرة السلة.

(b) ما عدد الطلاب الذين اختاروا كرة السلة وكرة القدم؟

(7) حدّد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا فيما يأتي اعتماداً على المعطيات. فسر تبريرك.

المعطيات: ● إذا اجتاز الطبيب اختبار المجلس الطبي، فإنه يستطيع مزاولة مهنة الطب.

● اجتاز فهد اختبار المجلس الطبي.

النتيجة: يمكن أن يزاول فهد مهنة الطب.

التبرير المنطقي

أحياناً كثيرة يتطلب حل مسائل الهندسة استعمال التبريرات المنطقية؛ لذا يمكنك استعمال أساسيات التبرير المنطقي في حل مسائل الاختبارات.

استراتيجيات استعمال التبرير المنطقي

الخطوة 1

اقرأ المسألة لتحديد المعطيات، وما يجب أن تجده للإجابة عن السؤال.

الخطوة 2

- حدّد هل بإمكانك تطبيق أحد مبادئ التبرير المنطقي في هذه المسألة.
- **المثال المضاد:** المثال المضاد هو المثال الذي يناقض عبارة يُفترض أنها صائبة. حدّد بدائل الإجابة التي تراها مناقضةً لنص المسألة واحذفها.
- **المسلّمات:** المسلّمة هي عبارة تصف علاقة أساسية في الهندسة. حدّد هل بإمكانك تطبيق مسلّمة للتوصل إلى نتيجة منطقية.

الخطوة 3

- إذا لم تصل إلى أي نتيجة من مبادئ الخطوة 2، فحدّد ما إذا كانت الأدوات الآتية تساعدك على الحل أم لا.
- **الأنماط:** ابحث عن نمط لعمل تخمين مناسب.
- **جداول الصواب:** استعمل جدول صواب لتنظيم قيم الصواب للعبارات المعطاة في المسألة.
- **أشكال فن:** استعمل أشكال فن لتمثيل العلاقات بين عناصر المجموعات بوضوح.
- **البراهين:** استعمل التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي للوصول إلى نتيجة على شكل برهان.

الخطوة 4

إذا لم يكن بإمكانك الوصول إلى نتيجة حتى باستعمال مبادئ الخطوة 3، فخمّن بديل الإجابة الأنسب، ثم ضع علامة على السؤال حتى ترجع إليه إذا بقي متسع من الوقت في نهاية الاختبار.



مثال

اقرأ المسألة جيداً، وحدّد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

عدد طلاب مدرسة 292 طالباً، شارك 94 منهم في الألعاب الرياضية، و 122 في النوادي الثقافية، و 31 في كليهما. كم طالباً لم يشارك في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية؟

95 A 122 C

107 B 138 D

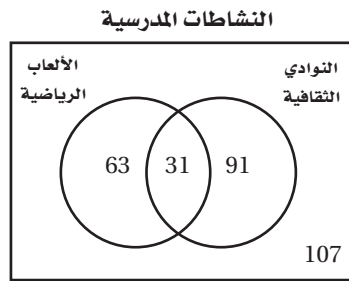
اقرأ المسألة جيداً. من الواضح أنه ليس هناك أمثلة مضادة واضحة، ولا يمكن استعمال المسلمات للوصول إلى نتيجة منطقية؛ إذن علينا استعمال أدوات لتنظيم المعلومات المعطاة؛ لنراها بوضوح. يمكننا رسم شكل فن لنرى التقاطع بين المجموعتين، وتحديد معطيات السؤال على هذا الشكل. حدّد عدد الطلاب الذين شاركوا في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية فقط.

الألعاب الرياضية فقط: $94 - 31 = 63$

النوادي الثقافية فقط: $122 - 31 = 91$

استعمل هذه المعلومات لحساب عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية.

$292 - 63 - 91 - 31 = 107$



إذن عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية يساوي 107 طلاب. وعليه فالإجابة الصحيحة هي B.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.

(1) حدّد قيمة الصواب للعبارة الآتية. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالاً مضاداً.

ناتج ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

A خاطئة؛ $8 \times 4 = 32$

B خاطئة؛ $7 \times 6 = 42$

C خاطئة؛ $3 \times 10 = 30$

D صحيحة

(2) أوجد الحد التالي في النمط أدناه.



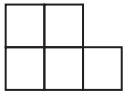
أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبيناً خطوات الحل.

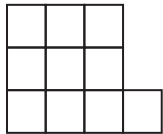
(13) إليك النمط الآتي:



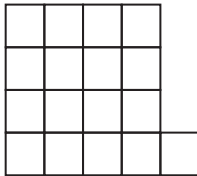
الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)

(a) ضع تخميناً لعدد المربعات في أيٍّ من أشكال النمط.

(b) اكتب عبارة جبرية يمكن استعمالها لإيجاد عدد المربعات في الشكل رقم n من هذا النمط.

(c) ما عدد المربعات في الشكل السادس من هذا النمط؟

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

(7) تقع النقاط A, B, C, D على استقامة واحدة، وتقع النقطة B بين A و C وتقع النقطة C بين B و D . أكمل العبارة الآتية:

$$AB + \underline{\hspace{1cm}} = AD$$

(8) يحتوي المستقيم m على النقاط D, E, F ، إذا كان $DE = 12 \text{ cm}$ ، و $EF = 15 \text{ cm}$ ، والنقطة D بين E و F ، فما طول $\overline{DF}$ ؟

(9) استعمل البرهان الآتي للإجابة عن السؤال أدناه.

المعطيات: $\angle A$ هي متممة $\angle B$ ، $m\angle B = 46^\circ$

المطلوب: $m\angle A = 44^\circ$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	(1) $\angle A$ هي متممة $\angle B$ $m\angle B = 46^\circ$
(2) تعريف الزاويتين المتتامتين	(2) $m\angle A + m\angle B = 90^\circ$
(3) بالتعويض	(3) $m\angle A + 46^\circ = 90^\circ$
(4) $\underline{\hspace{1cm}}$	(4) $m\angle A + 46^\circ - 46^\circ = 90^\circ - 46^\circ$
(5) بالتبسيط.	(5) $m\angle A = 44^\circ$

ما التبرير الذي يفسر الخطوة 4؟

(10) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية:

إذا كان قياس الزاوية أكبر من 90° ، فإنها منفرجة.

(11) النقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، إذا كانت

$$DE = 8x - 3, EF = 3x + 7$$

(12) اكتب عكس العبارة الآتية:
"إذا كنت الرابع، فأنا الخاسر".

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع الإجابة عن ...
1-1	1-3	1-7	1-3	1-8	1-7	1-7	1-5	1-8	1-4	1-1	1-8	1-2	فعد إلى الدرس...