الفصل 2

المصفوفات
Matrices

فيما سبق:

درستُ حل نظام من المعادلات .

والآن:

- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات.
- أحسب المحددات.
- أجد النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2.
- أستعمل المصفوفات لحل نظام من المعادلات.

لماذا؟

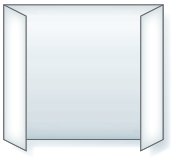
تنظيم البيانات: غالبًا ما تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات، فمثلًا إذا نُظّم الطلاب المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلاب المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

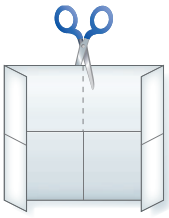
المطويات

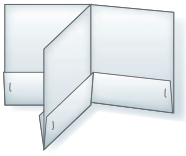
منظم أفكار

المصفوفات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المصفوفات، مبتدئًا بورقة A4.

1. **اثنِ** حافة الورقة بعرض 2cm بموازاة الضلعين القصيرين.
2. **اطوِ** الورقة الناتجة إلى أرباع، ثم قصّ كما في الشكل.
3. **أعد** الطي، ثم ثبّت الجيوب مستعملًا الدبّاسة.
4. **اكتب** على كلِّ جيب عنوانًا لدرس من دروس الفصل، واكتب عنوان الفصل.







التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل الأول

اجب عن الاختبار الاتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يأتي: (يُستعمل مع الدروس 2-2 إلى 2-5)

1) 4
2) -15
3) 0.2
4) -1.35
5) $-\frac{3}{4}$
6) $2\frac{1}{3}$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (يُستعمل مع الدروس 2-1 إلى 2-5)

7) $6(x+2y)$
8) $4(x+5)-3$
9) $-4(3x)-(7x-6)$
10) $5(2x-5)-\frac{1}{3}(4x+1)$
11) $6(2x-1)-3(y-x)+0.5(4x-6)$

حل نظام المعادلتين في كلٍّ مما يأتي جبريًّا: (يُستعمل مع الدرس 2-5)

12) $2x-y=-1$ ، $y=x+3$
13) $2x-5y=-18$ ، $3x+4y=19$
14) $4y+6x=-6$ ، $5y-x=35$
15) $4x+2y=4$ ، $x=y-8$
16) **جوائز:** توزع مدرسة جوائز (حقائب وأقلام) كل عام على المتفوقين، بلغ إجمالي ثمنها هذا العام 534 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 30 ريالًا، وسعر القلم 9 ريالات، أمّا في العام السابق فبلغ إجمالي ثمن الجوائز 448 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 25 ريالًا، وسعر القلم 8 ريالات. اكتب نظامًا من معادلتين، ثم حله لتجد عدد الحقائب والأقلام المشتراة في كل عام، علمًا بأن الحقائب والأقلام لها العدد نفسه في العامين.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي للعدد -5

النظير الجمعي للعدد -5 هو العدد x، بحيث إن $-5+x=0$؛ لذا فإن $x=5$.

النظير الضربي للعدد -5 هو العدد y، حيث إن $-5y=1$؛ لذا فإن $y=-\frac{1}{5}$.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$=\frac{3}{4}(8x)-\frac{3}{4}(4)+3x$ — خاصية التوزيع

$=6x-3+3x$ — بسّط

$=9x-3$ — اجمع الحدود المتشابهة

مثال 3

حل نظام المعادلتين الآتي جبريًّا:

$3y=x-9$

$4x+5y=2$

بما أن معامل x في المعادلة الأولى هو 1، فاستعمل طريقة التعويض. أولًا: حل المعادلة بالنسبة للمتغير x.

$3y=x-9 \rightarrow x=3y+9$

$4(3y+9)+5y=2$ — عوّض $3y+9$ بدلًا من x

$12y+36+5y=2$ — خاصية التوزيع

$17y=-34$ — اجمع الحدود المتشابهة

$y=-2$ — بقسمة الطرفين على 17

ولإيجاد قيمة x، استعمل المساواة $y=-2$ في المعادلة الأولى.

$3(-2)=x-9$ — عوّض عن y بـ -2

$-6=x-9$ — بالضرب

$3=x$ — اجمع 9 للطرفين

فيكون الحل $(3,-2)$.

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

2-1 مقدمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

فيما سبق:
درستُ حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول. (مهارة سابقة)

والآن:
- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على عناصر صفوف أو أعمدة مصفوفة لتحليل البيانات.

المفردات:
المصفوفة matrix
العنصر element
الرتبة order
مصفوفة الصف row matrix
مصفوفة العمود column matrix
المصفوفة المربعة square matrix
المصفوفة الصفرية zero matrix
المصفوفات المتساوية equal matrices

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

	النوع	سعة الذاكرة	السعر
العرض الأول	a	512	600
العرض الثاني	b	512	500
العرض الثالث	c	256	420
العرض الرابع	d	128	390

تنظيم البيانات: **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال حرف كبير تحته خط مثل $\underline{A}$ و $\underline{B}$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف — 4 أعمدة

العنصر 1− موجود في الصف 2 ، والعمود 1 ، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8− موجود في الصف 3، والعمود 2 ، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.

يمكنك تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًّا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة $\underline{A}$ في الأعلى هي مصفوفة من النوع 4×3 أو من الرتبة 4×3؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف ، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{A}$ ، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{B}$.

مثال 1 رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلٍّ ممّا يأتي:

a) حدد رتبة المصفوفة $\underline{A}$.

$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ ← 2 صفوف، 3 أعمدة

الرتبة 2×3

b) ما قيمة العنصر a_{21} ؟

$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ \rightarrow 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ ← الصف 2

$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ ↑ العمود 1

$a_{21} = 9$

تحقق من فهمك

$\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

1A) ما رتبة $\underline{B}$ ؟

1B) ما قيمة b_{32}؟

قراءة الرياضيات
يدل الرمز a_{ij} على العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفة $\underline{A}$.

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

مصفوفة صف
تحوي صفًا واحدًا.

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عمود
تحوي عمودًا واحدًا.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة
عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية
جميع عناصرها أصفار.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة
يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان.

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.

مثال 2 من واقع الحياة **تنظيم البيانات في مصفوفة**

كرة قدم: رصد مدرب أحد فرق كرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات الموسم الحالي فكانت على النحو الآتي:

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 قطع تمريرات، 4 أهداف.	ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 قطع تمريرات، 11 هدفاً.	ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 قطع تمريرات، 4 أهداف.

a) نظّم البيانات في مصفوفة A ، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًّا حسب عدد التسديدات.

b) حدد رتبة المصفوفة. وما قيمة a_{23}؟

(a

(b

تحقق من فهمك

2) بيتزا: يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من البيتزا بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

أسعار البيتزا (بالريال)

	كبيرة	وسط	صغيرة
ثمار البحر	35	24	13
الخضار	34	23	12
الدجاج	36	25	14
اللحم	37	27	15

A) نظّم هذه البيانات في مصفوفة A ، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًّا.

B) حدد رتبة المصفوفة.

C) ما قيمة العنصر a_{21}؟

تحليل البيانات: عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحيانًا معلومات ذات معنى. وفي أحيان أخرى لا تعطي أي معلومات ذات معنىً.

إرشادات للدراسة

عرض البيانات

يكون من الممكن أحيانًا تبديل عناصر الصفوف وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تمثل معلومات من واقع الحياة.

مثال 3 تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم، (في مثال 2) استعمال المصفوفة للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة:

	الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
	11	40	170	43	18
	4	30	20	31	20
	4	15	113	24	12

a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3 ، وفسر النتائج.

b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2 ويقسم المجموع على 3 ، فما الناتج؟

c) هل كانت طريقة المدرب في حساب معدل تسديد اللّاعب في المباراة الواحدة صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى ؟ فسِّر إجابتك.

تحقق من فهمك

3) محافظات: يبين الجدول المجاور عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق مختلفة في المملكة		
المنطقة	محافظة فئة أ	محافظة فئة ب
الرياض	12	8
مكة المكرمة	9	7
المدينة المنورة	4	4
القصيم	5	7

المصدر: المملكة العربية السعودية، حقائق وأرقام، هيئة المساحة الجيولوجية السعودية، 1433 هـ

A) نظّم البيانات في مصفوفة .

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف يعطي بيانات ذات معنى؟

تأكد

مثال 1 حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

4) a_{32} **5)** a_{11} **6)** a_{33} **7)** a_{24}

المثالان 3 , 2

8) زراعة: يبين الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

a) نظّم البيانات في مصفوفة.

b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟

c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسِّر إجابتك.

d) اجمع عناصر كل عمود، وفسِّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

9) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$ **10)** $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ **11)** $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ **13)** $\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix} 115 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

15) a_{21} **16)** b_{22} **17)** b_{13} **18)** a_{12}

مثال 2

19) يبين الجدول أدناه النقاط التي حصل عليها ثلاثة طلاب في مسابقة علمية تقدم على 3 جولات، نظّم هذه البيانات في مصفوفة:

الاسم	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
سعود	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
مروان	187	189	211	587

مثال 3

20) تخزين: ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه 2000kg خلاص و 1200kg برحي و 500kg سكري، والثاني فيه 3000kg خلاص و 1175kg برحي و 2250kg سكري، والثالث فيه 2750kg خلاص و 1500kg برحي و 1700kg سكري.

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، وماذا يمثل هذا المجموع؟

c) أوجد مجموع عناصر كل صف، وماذا يمثل هذا المجموع؟

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

21) a_{32} **22)** b_{21} **23)** b_{12} **24)** a_{21}

25) حديد التسليح: يبين الجدول المجاور أسعار حديد التسليح حسب تقرير وزارة التجارة في منطقتي الرياض وجدة يوم الثلاثاء 16 مارس 2010 م.

أسعار حديد التسليح (بالريال)		
المقاس	الرياض	جدة
8mm	2410	2455
14mm	2210	2255
16mm	2200	2245

a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة.

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة في الفرع a؟

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} x^2+4 & y+6 \\ x-y & 2-y \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

26) a_{11} **27)** a_{22} **28)** b_{31} **29)** b_{23}

الربط مع الحياة

بعد إعادة تعريف كلمة "كوكب" عام 2006 من قبل الاتحاد الفلكي الدولي، تبين أن بلوتو لم يعد يصنف كوكبًا؛ وذلك بسبب حجمه الصغير.

المصدر: www.iau.org

30) فلك: استعمل الجدول المجاور الذي يبين بُعد بعض الكواكب عن الأرض والشمس.

الكوكب	البُعد عن الشمس (مليون ميل)	البُعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	744
أورانس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

المصدر: fact Monster

a) نظّم المسافات في مصفوفة $\underline{A}$.

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

c) ما قيمة العنصر a_{42}.

31) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال تأثير قلب الصفوف والأعمدة في المصفوفة. يبين الجدول المجاور عدد كلٍّ من التمريرات الحاسمة وعدد الأهداف لأربعة لاعبين في مباراة لكرة اليد.

الاسم	عدد التمريرات الحاسمة	عدد الأهداف
محمود	8	3
معاذ	6	5
صالح	1	8
عبدالله	4	2

a) جدوليًّا: نظّم البيانات في مصفوفة على أن يمثل عدد الأهداف وعدد التمريرات عمودها.

b) جبريًّا: أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

c) جدوليًّا: بدّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف.

d) جبريًّا: أوجد مجاميع عناصر كل صف.

e) تحليليًّا: هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وفسِّر إجابتك:

32) المصفوفة C مربعة ولها أربعة أعمدة، وتحوي العنصر c_{53}.

33) اكتشف الخطأ: حددت كل من ياسمين وسارة العنصر b_{32} في المصفوفة $\underline{B} = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$، فهل توصلت إحداهما للحل الصحيح؟ فسِّر إجابتك.

ياسمين	سارة
قيمة العنصر b_{32} هي 5.	العنصر b_{32} غير موجود في المصفوفة B ، لأن B مصفوفة من النوع 3×2.

34) تحدٍّ: جد قيمة كلٍّ من المتغيرات x , y , z التي تحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 3x + 4z \\ 7x - 8z & 5y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z - 5x + 1 & 5y - 2x \\ 3y - 4z & 12x + 2y \end{bmatrix}$$

35) مسألة مفتوحة: أنشئ مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى.

36) اكتب: اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

تدريب على اختبار

37) مسح: نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

	ضد	مؤيد
المرشح الأول	771	1553
المرشح الثاني	1633	689
المرشح الثالث	229	2088

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي **ليس** صحيحًا؟

A هناك 771 صوتًا ضد المرشح الأول.

B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

مراجعة تراكمية

38) مجلس الإدارة: ترشح مسفر لمنصب رئيس مجلس الإدارة في إحدى الشركات الكبرى، وكان المُقترع يكتب ثلاثة أسماء بالترتيب على ورقة الاقتراع ، فيحصل المتنافس على 3 نقاط لكل مركز أول، ونقطتين لكل مركز ثان، ونقطة واحدة لكل مركز ثالث. وقد ورد اسم مسفر في 490 ورقة اقتراع للمراكز الثلاثة، وكان مجموع نقاطه 878 نقطة. فإذا علمت أن عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثاني أكثر بأربع أصوات من ضعف عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثالث، فكم عدد الأصوات التي حصل عليها من كل مركز؟ (مهارة سابقة)

39) ثقافة مالية: يبين الجدول المجاور تكلفة إنتاج كلٍّ من كعكة الشوكولاته وكعكة الفواكه وسعر بيعها لدى مخبز. إذا علمت أن المخبز يبيع كعكة الشوكولاتة وكعكة الفواكه معًا في صناديق تحوي من 6 إلى 12 كعكة من كلا النوعين، بحيث يحوي كل صندوق ثلاث كعكات على الأقل من كل نوع. فما عدد كعكات كل صندوق من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 5-1)

النوع	كعكة الشوكولاتة	كعكة الفواكه
التكلفة	19 ريالًا	13 ريالًا
سعر البيع	44 ريالًا	39 ريالًا

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي إذا كان $w = 3 , x = -2 , y = 4 , z = 0.5$: (مهارة سابقة)

40) $4x - 6y + 2z$ **41)** $5w + 2(x - z) + 2y$ **42)** $4[3(2z + y) - 2(w + x)]$

الهدف
أستعمل الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها.

تُستعمل **الجداول الإلكترونية**، لتنظيم البيانات وعرضها، حيث يتم إدخالها في برنامج الجداول الإلكترونية في صفوف وأعمدة كما هو الحال في المصفوفات. وبعد ذلك يمكن استعمالها لعمل الرسوم أو إجراء الحسابات.

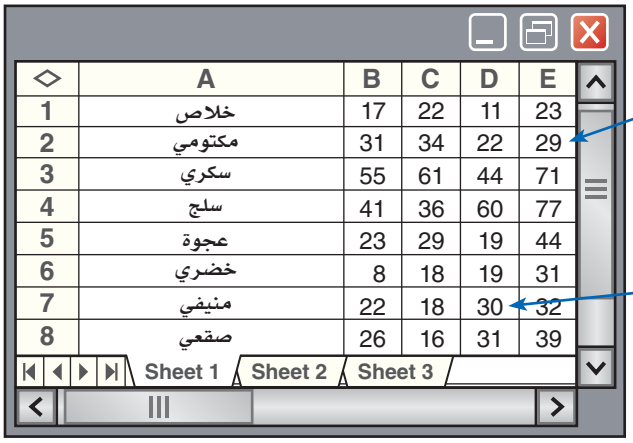
مثال

جمع محل لبيع التمور بيانات عن مبيعاته في أربعة أسابيع متتالية، ونظمها في الجدول المجاور. أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية .

مبيعات محل تمور خلال 4 أسابيع متتالية بالكيلوجرامات

نوع التمر	1	2	3	4
خلاص	17	22	11	23
مكتومي	31	34	22	29
سكري	55	61	44	71
سلج	41	36	60	77
عجوة	23	29	19	44
خضري	8	18	19	31
منيفي	22	18	30	32
صقعي	26	16	31	39

استعمل العمود A للنوع، والعمود **B** لمبيعات الأسبوع الأول ، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثاني، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث، والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.



تمارين:

1) أدخل البيانات الواردة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس في برنامج الجداول الإلكترونية.

2) قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية وتنظيمها في المصفوفة.

3) يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف والأعمدة في الجداول الإلكترونية باستعمال الأمر (SUM) .

a) يمكنك إيجاد مجموع مدخلات العمود B باستعمال الصيغة =SUM(B1:B8) . أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا B9, C9, D9, E9 لتجد مجاميع مدخلات الأعمدة الأخرى. ماذا تمثل مجاميع مدخلات هذه الأعمدة؟

b) أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا F1 حتى F8 لإيجاد مجاميع مدخلات الصفوف 1 إلى 8. ماذا تمثل هذه المجاميع في هذه الحالة؟

c) أوجد مجموع مدخلات الصف 9، ومجموع مدخلات العمود F. ماذا تلاحظ؟ فسّر إجابتك.

2-2

العمليات على المصفوفات
Operations with Matrices

فيما سبق:
درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات. (الدرس 1-2)

والآن:
- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد ثابت.

المفردات:
جمع مصفوفتين
adding matrices
طرح مصفوفتين
subtracting matrices
ضرب المصفوفة في عدد ثابت
scalar multiplication

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
لدى مؤسسة تجارية للمعدات الثقيلة فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض. وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	جدة		الشرقية		الرياض	
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	109500	1050	122000	1700	145000	1900
المعرض (2)	135000	1800	145500	1800	225000	2400
المعرض (3)	150500	1800	160000	1800	290000	2700

جمع المصفوفات وطرحها: يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

مفهوم أساسي
جمع المصفوفات وطرحها

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $\underline{A}, \underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $\underline{A} + \underline{B}$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في $\underline{A}$ و $\underline{B}$، وكذلك $\underline{A} - \underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز: لتكن: $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

فإن: $\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

مثال: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة
إذا كان $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$
فإن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

مثال 1
جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

a) $\underline{A} + \underline{B}$

b) $\underline{B} - \underline{C}$

تحقق من فهمك

1A) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

1B) $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

الضرب في عدد ثابت: يمكنك ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **ضرب المصفوفة في عدد ثابت**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الضرب في عدد ثابت

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة $k\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $\underline{A}$ مضروبًا في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وَ k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot \underline{A} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

إذا كان $k\underline{A} = \underline{B}$

فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

مثال 2

ضرب مصفوفة في عدد ثابت

إذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$ ، فجد $5\underline{R}$.

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4\underline{T}$

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص جمع المصفوفات

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k:

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$

خاصية التوزيع للضرب في عدد $k(\underline{A} + \underline{B}) = k\underline{A} + k\underline{B}$

يمكنك إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

مثال 3 العمليات على المصفوفات

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4\underline{B} - 3\underline{A}$.

تحقق من فهمك

3) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-6\underline{B} + 7\underline{A}$

الربط مع الحياة

المخطط المالي

يستعمل المخطّط المالي المصفوفات لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

يمكنك استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية.

مثال 4 استعمال العمليات على المصفوفات

أعمال: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، وعبر عن معدل المبيعات والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.

تحقق من فهمك

4) أعمال: استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات الشهري لجميع المعارض على فرض أن الشهر 30 يومًا.

تأكد

مثال 1 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مثال 3 إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $\underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج كلٍّ مما يلي:

7) $4\underline{B} - 2\underline{A}$

8) $-8\underline{C} + 3\underline{A}$

مثال 4

9) درجات حرارة: تبين المصفوفة $\underline{L}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينةٍ ما. وتبين المصفوفة $\underline{H}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى في تلك المدينة .

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix} \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة التي تمثل الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا.

10) $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

الأمثلة 2, 3, 4

12) مشروبات: يبين الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم، إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 50%.

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	3	4	5
شاي	2	3	4
قهوة	2	3	4
عصير	4	5	6

a) اكتب المصفوفة $\underline{C}$ التي تمثّل الأسعار الحالية .

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة $\underline{C}$ فيه لإيجاد المصفوفة $\underline{N}$ التي تمثّل الأسعار الجديدة؟

c) جد المصفوفة $\underline{N}$.

d) جد المصفوفة $\underline{C} - \underline{N}$. ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

13) $\begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & 76 & -13 \end{bmatrix}$

16) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix}$

17) $\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

18) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

19) كتب: تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، و5000 كتاب تاريخي و5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000 كتاب علمي، و10000 كتاب تاريخي و2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، و700 كتاب تاريخي، و800 كتاب أدبي.

a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وارمز إليها بالرموز $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$.

b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وعبِّر عن ذلك بمصفوفة.

c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C؟

d) أوجد المصفوفة $\underline{A} + \underline{B}$. هل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة ؟ فسِّر إجابتك.

الربط مع الحياة

وصل عدد مقتنيات مكتبات جامعة الملك سعود 874971 عنوانًا تقع في 2065863 مجلدًا ومادة من مختلف أوعية المعلومات، وبلغت المساحة الإجمالية للمكتبات $62634m^2$، مجهزة بكل تقنيات المكتبات الحديثة وتدير خدماتها آليًا.

المصدر: ويكيبيديا: جامعة الملك سعود
http://ar.wikipedia.org/wiki

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

20) $-3\begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix}$

21) $-4\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix}$

22) $-5\left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\right)$

23) $-6\left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix}\right)$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

24) $-2\begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix}$

25) $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا

26) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تبديلية .

27) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تجميعية .

28) تحد: إذا كانت:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, 3\underline{A} - 4\underline{B} + 6\underline{C} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد عناصر المصفوفة $\underline{C}$.

29) تبرير: حدِّد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين $\underline{B}$, $\underline{A}$ ، ثم فسِّر إجابتك.

a) إذا كانت $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة ، فإن $\underline{A} - \underline{B}$ معرّفة.

b) إذا كان k عددًا حقيقيًّا ، فإن $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرّفتان.

c) إذا كانت $\underline{A} - \underline{B}$ غير معرّفة ، فإن $\underline{B} - \underline{A}$ غير معرّفة.

d) إذا كانت $\underline{A}$ وَ $\underline{B}$ لهما عدد العناصر نفسه ، فإن $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة.

e) إذا كانت $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرفتين، فإن $k\underline{A} + k\underline{B}$ معرّفة.

30) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا على مصفوفتين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ ، على أن تكون $4\underline{B} - 3\underline{A} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

31) اكتب: اشرح كيف تجد $4\underline{D} - 3\underline{C}$ لأي مصفوفتين $\underline{C}$, $\underline{D}$ لهما الرتبة نفسها.

تدريب على اختبار

32) حل النظام الآتي:

$$0.06p + 4q = 0.88$$
$$p - q = -2.25$$

A $(-0.912, -1.338)$ **C** $(-2, 0.25)$

B $(0.912, -3.162)$ **D** $(-2, -4.25)$

33) رتبة المصفوفة: إذا كانت $\underline{A}$, $\underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة 3×5 ، فإن رتبة المصفوفة $\underline{A} - \underline{B}$ هي:

A 3×5 **C** 3×2

B 5×3 **D** 3×3

مراجعة تراكمية

إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & x \\ -2 & 9 & y \end{bmatrix}$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -5 & x \\ 8 & 4y \end{bmatrix}$ ، فحدِّد كل عنصر مما يأتي: (الدرس 2-1)

34) a_{32} **35)** c_{13} **36)** b_{32}

حل بيانيًّا النظام أدناه: (الدرس 5-1)

37) $4x + 2y > 8$
$4y - 3x \leq 12$

38) سكان: في إحصائية عام 1435هـ لأكبر 20 مدينة سعودية من حيث عدد السكان، بلغ عدد سكان مدينة الدمام 903597 نسمة، بما يزيد 333800 على عدد سكان مدينة تبوك. اكتب معادلة لإيجاد عدد سكان مدينة تبوك، ثم حلّها. (مهارة سابقة)

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-1)

39) $4(2x - 3y) + 2(5x - 6y)$

40) $-3(2a - 5b) - 4(4b + a)$

41) $-7(x - y) + 5(y - x)$

2-3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

فيما سبق:
درستُ ضرب المصفوفات في عدد ثابت. (الدرس 2-2)

والآن:
- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام B، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة P.

مصفوفة عدد الأقلام B **مصفوفة الأسعار P**

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{قلم الرصاص} & \text{الحبر السائل} & \text{الحبر الجاف} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$، فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$m \times r$ ، $r \times t$ ، $m \times t$

متساويان

رتبة AB

مثال 1 رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $\underline{B} \cdot \underline{A}$ في كلٍّ مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

a) $\underline{A}_{3 \times 4} \cdot \underline{B}_{4 \times 2}$

b) $\underline{A}_{5 \times 3} \cdot \underline{B}_{5 \times 4}$

إرشادات للدراسة

رمز المصفوفة
أحيانًا تكتب $\underline{A}_{m \times n}$ لتعبر عن مصفوفة $\underline{A}$ رتبتها $m \times n$.

تحقق من فهمك

1A) $\underline{A}_{4 \times 6} \cdot \underline{B}_{6 \times 2}$

1B) $\underline{A}_{3 \times 2} \cdot \underline{B}_{3 \times 2}$

يمكنك إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب المصفوفات

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة $\underline{AB}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة $\underline{A}$، بعناصر العمود r من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

الرموز:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times7 & 2\times6+3\times8 \\ 1\times5+4\times7 & 1\times6+4\times8 \end{bmatrix}$$

تنبيه!

المحافظة على التركيز

من السهل أن تفقد التركيز عند ضرب المصفوفات، وربما تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا تقوم بضربها عند إيجاد عناصر مصفوفة الضرب.

مثال 2

ضرب المصفوفات المربعة

أوجد XY إذا كانت $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$، $\underline{X} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$، $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد $\underline{UV}$.

يمكنك استعمال ضرب المصفوفات في عدة مواقف حياتية.

مثال 3 من واقع الحياة — ضرب المصفوفات

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لمن يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

الربط مع الحياة

تدل البحوث الصحية والرياضية أن ممارسة السباحة نصف ساعة يوميًا تخفض ضغط الدم وتقوي القلب وتقلل معدل الكولسترول في الدم وتزيد كفاءة الدورة الدموية، وتحرق 500 : 250 سعرة حرارية؛ لذا تعدّ من أفضل الرياضات لتخفيض الوزن.

المصدر: ويكيبيديا: سباحة
http://ar.wikipedia.org/wiki

تحقق من فهمك

3) مبيعات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

خصائص ضرب المصفوفات: تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.

مثال 4 — اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $\underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{G}\underline{H}$

b) $\underline{H}\,\underline{G}$

تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$ ؟

اتضح في المثال 4 أن الخاصية الإبدالية لا تتحقق في ضرب المصفوفات. لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

إرشادات للدراسة

البرهان والأمثلة المضادة

لإثبات صحة خاصية في جميع الحالات، يجب إثبات صحتها في الحالة العامة. ولبيان أن خاصية ما ليست صحيحة يكفي إعطاء مثال مضاد لها.

مثال 5 اختبار خاصية التوزيع

إذا كانت $\underline{L} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{J} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{J}\,(\underline{K} + \underline{L})$

b) $\underline{J}\,\underline{K} + \underline{J}\,\underline{L}$

تحقق من فهمك

5) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ ، $\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فحدِّد ما إذا كانت المعادلة $(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \underline{S}\,\underline{R} + \underline{T}\,\underline{R}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا.

في المثال السابق كانت خاصية توزيع الضرب على الجمع صحيحة، ويمكنك إثبات أن هذه الخاصية صحيحة دائمًا إذا كانت عمليتا الضرب والجمع معرفتين.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C، ولأي عدد k، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٍّ منها معرفتين:

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات	$(AB)C = A(BC)$
الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$C(A + B) = CA + CB$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(A + B)C = AC + BC$

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $A_{2\times 4} \cdot B_{4\times 3}$ **2)** $C_{5\times 4} \cdot D_{5\times 4}$ **3)** $E_{8\times 6} \cdot F_{6\times 10}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 3

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية		
الاشتراك	المستوى الأول	المستوى الثاني
الأسبوعي	35	28
الشهري	32	17
السنوي	18	12

12) لياقة بدنية: يبين الجدول المجاور عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية في المستويين الأول والثاني لدى أحد مراكز اللياقة البدنية في مدينة الرياض.

إذا كانت رسوم الاشتراك الأسبوعي 110 ريالات، ورسوم الاشتراك الشهري 165 ريالًا، ورسوم الاشتراك السنوي 439 ريالًا.

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة تمثل رسوم الاشتراك فيها.

b) ما المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني.

المثالان 4 , 5 إذا كانت $Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$، فحدِّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

13) $XY = YX$ **14)** $X(YZ) = (XY)Z$

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

15) $P_{2\times 3}\cdot Q_{3\times 4}$ **16)** $A_{5\times 5}\cdot B_{5\times 5}$ **17)** $M_{3\times 1}\cdot N_{2\times 3}$

18) $X_{2\times 6}\cdot Y_{6\times 3}$ **19)** $J_{2\times 1}\cdot K_{2\times 1}$ **20)** $S_{5\times 2}\cdot T_{2\times 4}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-10\\6\end{bmatrix}$ **22)** $\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -7\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-3 & -7\\-2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\9 & -3\end{bmatrix}$ **24)** $\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -3\\7 & -2\end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\-4 & -10 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & -9\end{bmatrix}$ **26)** $\begin{bmatrix}-6 & 4 & -9\\2 & 8 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\2\\4\end{bmatrix}$

27) $\begin{bmatrix}2 & 9 & -3\\4 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\-6 & 7\\-2 & 1\end{bmatrix}$ **28)** $\begin{bmatrix}-4\\8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$

مثال 3

29) أجنحة فندقية: لدى مؤسسة للأجنحة الفندقية 3 مبانٍ للإيجار، ويبين الجدول المجاور عدد الغرف في كل مبنى. فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا 220 ريالًا، وللغرفة التي تحوي سريرين 250 ريالًا، وللغرفة التي تحوي ثلاثة أسرَّة 360 ريالًا.

عدد الغرف			
المبنى	غرفة بسرير واحد	غرفة بسريرين	غرفة بثلاث أسرة
1	3	2	2
2	2	3	1
3	4	3	0

a) اكتب مصفوفة تمثّل عدد الغرف، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

b) اكتب مصفوفة تمثّل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

c) ما مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

المثالان 4 ، 5 إذا كانت $k=2$ ، $R=\begin{bmatrix}4 & 6\\-6 & 4\end{bmatrix}$ ، $Q=\begin{bmatrix}6 & 4\\-2 & -5\end{bmatrix}$ ، $P=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$ ، فحدِّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

30) $k(PQ)=P(kQ)$ **31)** $PQR=RQP$

32) $PR+QR=(P+Q)R$ **33)** $R(P+Q)=PR+QR$

الربط مع الحياة

الزنبق يضم حوالي 110 أنواع أهمها الزنبق الأبيض. وتنمو الأزهار من بصيلات محرشفة، وتأخذ شكل الأبواق ولها ست بتلات.

المصدر: ويكيبيديا: زنبق
http://ar.wikipedia.org/wiki

34) تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 زهرة جوري، و 150 زهرة نرجس، و 100 زهرة زنبق، وسعر شراء الزهرة من كل نوع مبين في الجدول المجاور، وكذلك سعر بيع الزهرة بعد تغليفها وتنسيقها في طاقة.

الزهور	سعر الشراء	سعر البيع
جوري	0.50 ريال	3.00 ريالات
نرجس	1.5 ريال	6 ريالات
زنبق	2 ريال	7 ريالات

a) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور.

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور .

c) أوجد مقدار ربح المحل من بيع الزهور.

استعمل المصفوفات $\underline{Z}=\begin{bmatrix}-3\\x+y\end{bmatrix}$ ، $\underline{Y}=\begin{bmatrix}-5 & -1.5\\x+2 & y\\13 & 1.2\end{bmatrix}$ ، $\underline{X}=\begin{bmatrix}2 & -6\\3y & -4.5\end{bmatrix}$ ، لإيجاد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

35) $\underline{X}\underline{Y}$ **36)** $\underline{Y}\underline{X}$ **37)** $\underline{Z}\underline{Y}$ **38)** $\underline{Y}\underline{Z}$

39) $(\underline{Y}\underline{X})\underline{Z}$ **40)** $(\underline{X}\underline{Z})\underline{X}$ **41)** $\underline{X}(\underline{Z}\underline{Z})$ **42)** $(\underline{X}\underline{X})\underline{Z}$

مسائل مهارات التفكير العليا

43) تبرير: إذا كانت رتبة المصفوفة $\underline{A}\underline{B}$ هي 5×8 ، ورتبة المصفوفة $\underline{A}$ هي 5×6 ، فما رتبة المصفوفة $\underline{B}$؟

44) برهان: بين أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من النوع 2×2 .

a) خاصية التوزيع للضرب في عدد.

b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع.

c) الخاصية التجميعية للضرب.

d) الخاصية التجميعية للضرب في عدد.

45) مسألة مفتوحة: اكتب مصفوفتين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ على أن تكون $\underline{A}\underline{B}=\underline{B}\underline{A}$.

46) تحدٍّ: جد قيم a, b, c, d التي تجعل العبارة $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 11\\20 & 29\end{bmatrix}$ صحيحة.

47) اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات المبيعات للمكتبة.

تدريب على اختبار

48) في مشغل ثلاث آلات حياكة، فإذا كان إنتاج كل آلة في 3 أشهر كما في الجدول أدناه ، وسعر بيع القطعة الواحدة من إنتاج كل آلة معطى أيضًا، فما المبلغ الذي سيحصل عليه المشغل من مبيعات الأشهر الثلاثة؟

	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	سعر بيع القطعة
الآلة 1	26	19	36	28
الآلة 2	48	27	16	19
الآلة 3	36	11	18	31

A 6012 ريالًا **B** 5400 ريال

C 1221 ريالًا **D** 2320 ريالًا

49) رتبة المصفوفة: ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\\j & k & l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\4\\6\end{bmatrix}$$

A 1×4

B 3×3

C 4×1

D 4×3

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-2)

50) $4\begin{bmatrix}8 & -1\\-3 & -4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & 4\\6 & 3\end{bmatrix}$ **51)** $5\left(2\begin{bmatrix}-2 & -5\\-1 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & -2\\6 & 4\end{bmatrix}\right)$ **52)** $-4\left(\begin{bmatrix}8 & 9\\-5 & 5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-6 & -1\\6 & 3\end{bmatrix}\right)$

اختبار منتصف الفصل

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$، فحدد:

3) a_{21}

4) b_{22}

5) مبيعات: يبين الجدول الآتي مبيعات محلَّي ألبسة أطفال في أسبوعين مختلفين:

المحل	الأسبوع	الملابس المبيعة			
		قميص	بلوزة	قبعة	بنطال
A	1	25	14	18	5
	2	32	26	15	4
B	1	44	10	13	8
	2	18	38	17	2

a) اكتب مصفوفة تمثل مبيعات كل أسبوع.

b) جد مجموع مبيعات الأسبوعين باستعمال جمع المصفوفات.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

6) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

7) $-3\begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

8) $2\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

9) اختيار من متعدد: أوجد ناتج: $2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

A $\begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

10) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

13) اختيار من متعدد: إذا كانت المصفوفة $\underline{XY}$ من النوع 2×3، والمصفوفة $\underline{X}$ من النوع 3×4، فما رتبة المصفوفة $\underline{Y}$؟

A 2×3 **B** 3×2 **C** 3×4 **D** 4×2

14) مبيعات: يبين الجدول الآتي موجودات محل ألبسة رياضية من القمصان والبناطيل بالدستة، وقد قرر صاحب المحل مضاعفة عدد القمصان والبناطيل قبيل فصل الصيف.

النوع	صغير	وسط	كبير
قميص	10	10	15
بنطال	25	35	45

a) اكتب مصفوفة $\underline{A}$ تمثّل عدد القمصان والبناطيل في المحل قبل مضاعفة العدد.

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة $\underline{A}$ لإيجاد المصفوفة $\underline{M}$ التي تمثل عدد القمصان والبناطيل بعد مضاعفته؟ جد $\underline{M}$.

c) ماذا تمثل المصفوفة $\underline{M} - \underline{A}$ في هذه الحالة؟

15) اختيار من متعدد: ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ يساوي:

A $\begin{bmatrix} 8 & -12 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ **D** عملية الضرب غير معرّفة

2-4

المحدِّدات وقاعدة كرامر
Determinants and Cramer's Rule

فيما سبق:
درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحسب المحدِّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:
المحدِّدة
determinant
محدِّدة الدرجة الثانية
second-order determinant
محدِّدة الدرجة الثالثة
third-order determinant
قاعدة الأقطار
diagonal rule
مصفوفة المعاملات
coefficient matrix
قاعدة كرامر
Cramer's Rule

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدِّد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدِّدات لمعرفة مساحتها.

المحدِّدات: كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدِّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

مفهوم أساسي — محدِّدة الدرجة الثانية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ (القطر الرئيس)

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

مثال 1 — محدِّدة الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

تحقق من فهمك

1A) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

1B) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

قراءة الرياضيات

المحدِّدات:
يرمز لمحدِّدة المصفوفة A بالرمز |A|

تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3×3.

مفهوم أساسي

حساب محدِّدة المصفوفة 3×3

أضف إلى مطويتك

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة **3** من ناتج الخطوة **2** .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال 2

حساب محدِّدة المصفوفة 3×3

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

تحقق من فهمك

(2A $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(2B $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

تستعمل المحدِّدات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

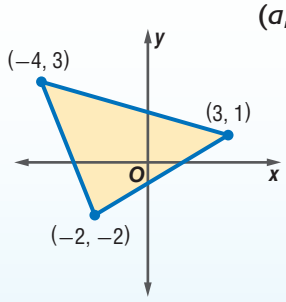
مفهوم أساسي

مساحة المثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

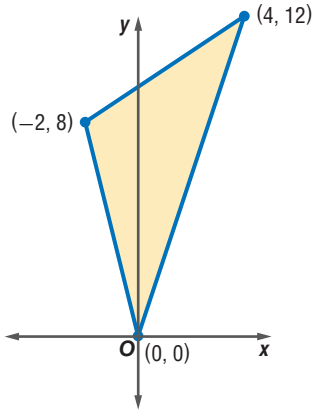
صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

مثال 3 من واقع الحياة

حساب مساحة المثلث باستعمال المحدِّدات

عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحدِّدات لإيجاد مساحة الإقليم.



الربط مع الحياة

يعيش النمر في أقاليم قد تصل مساحتها إلى $100\,km^2$، ويحرس النمر إقليمه الذي يعيش فيه ويعرفه بتتبع أثره وأماكن روثه.

المصدر: National Geographic

إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

تحقق من فهمك

3) خرائط: يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: (11, 9), (6, 4), (3, 15)، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة 0.5km. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

إرشادات للدراسة

المحدِّدات

تستعمل المحدِّدات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحدِّدات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحدِّدة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحدِّدة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي

قاعدة كرامر

أضف إلى مطويتك

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدِّدة مصفوفة المعاملات $\underline{C}$ صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.

مثال 4

حل نظام من معادلتين

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$\begin{matrix} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = -29 \end{matrix}$$

تحقق من فهمك

(4A $7x + 3y = 37$
$-5x - 7y = -41$

(4B $8x - 5y = 70$
$9x + 7y = 3$

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي — **استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات**

أضف إلى مطويتك

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + \ell z &= p \end{aligned}$ ، حيث $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

مثال 5 — **حل نظام من ثلاث معادلات**

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $4x + 5y - 6z = -14$
$3x - 2y + 7z = 47$
$7x - 6y - 8z = 15$

وعليه يكون حل النظام هو $(5, -2, 4)$

تحقق :

$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14$

$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -14$

$-14 = -14$ ✓

$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$

$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$

$15 = 15$ ✓

$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$

$15 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$

$47 = 47$ ✓

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.

تحقق من فهمك

(5A) $3x + 5y + 2z = -7$
$-4x + 3y - 5z = -19$
$5x + 4y - 7z = -15$

(5B) $6x + 5y + 2z = -1$
$-x + 3y + 7z = 12$
$5x - 7y - 3z = -52$

تأكد

المثالان 1, 2

أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

(1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$

الربط مع الحياة

مثلث برمودا منطقة جغرافية في المحيط الأطلسي على شكل مثلث متساوي الأضلاع (كل ضلع نحو 1500 km)، ومساحته حوالي $1000000\ km^2$. وهي منطقة شهيرة بسبب مزاعم عن مخاطر وحوادث وقعت فيها ولم يُحَلّ اللغز حتى الآن.

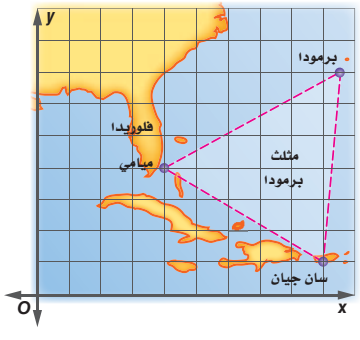
المصدر: ويكيبيديا: مثلث برمودا
http://ar.wikipedia.org/wiki

مثال 3

(11) جغرافيا: استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:

a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.



مثال 4

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

(12) $4x - 5y = 39$
$3x + 8y = -6$

(13) $10c - 7d = -59$
$6c + 5d = -63$

مثال 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

14) $4x - 2y + 7z = 26$
$5x + 3y - 5z = -50$
$-7x - 8y - 3z = 49$

15) $6x - 5y + 2z = -49$
$-5x - 3y - 8z = -22$
$-3x + 8y - 5z = 55$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$

18) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

21) $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix}$

مثال 3

22) علم الآثار: وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات (5, 9), (4, 7), (0, 3) على الخريطة. فإذا كانت الإحداثيات بالأمتار . فجد مساحة المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط .

المثالان 4, 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

23) $6x - 5y = 73$
$-7x + 3y = -71$

24) $10a - 3b = -34$
$3a + 8b = -28$

الربط مع الحياة

عثر الباحثون أثناء التنقيب في أحد الكهوف على بقايا بشرية، وقدّروا أنها ترجع إلى ما قبل 200000 سنة.

المصدر: كتاب العلوم المقرر للصف الثاني المتوسط/الفصل الدراسي الأول/1435 هـ

25) $5x - 4y + 6z = 58$
$-4x + 6y + 3z = -13$
$6x + 3y + 7z = 53$

26) $8x - 4y + 7z = 34$
$5x + 6y + 3z = -21$
$3x + 7y - 8z = -85$

27) رحلة مدرسية: نظمت مدرسة ثانوية رحلة إلى المدينة المنورة التي تبعد 615 km عن المدرسة. فإذا كان معدل سرعة الحافلة على الطريق السريع 105 km /h ، ومعدل سرعتها داخل المدن 45 mi /h، وكان زمن سير الحافلة 7 ساعات. فاستعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد ساعات سيرها على الطريق السريع، وعدد ساعات سيرها داخل المدن.

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

28) $3a - 5b - 9c = 17$
$4a - 3c = 31$
$-5a - 4b - 2c = -42$

29) $7x + 8y + 9z = -149$
$-6x + 7y - 5z = 54$
$4x + 5y - 2z = -44$

30) صناعة: ينتج مصنع 3 أحجام من علب الطلاء الفارغة، حجم صغير بتكلفة 1.15 ريال للعلبة، وحجم متوسط بتكلفة 1.75 ريال للعلبة، وحجم كبير بتكلفة 2.25 ريال للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الأحجام، بتكلفة إجمالية قدرها 2238.75 ريالًا.

a) استعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

b) إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح 1.25 ريال بعد زيادة قليلة في الحجم، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

31) بستنة: أراد حمد إنشاء حديقة مثلثية الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططًا على المستوى الإحداثي، فكانت إحداثيات رؤوس الحديقة على المستوى $(-1, 7), (2, 6), (4, -3)$. جد المساحة الحقيقية للحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل مترًا على الأرض.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) تحدٍّ: أوجد قيمة محدِّدة مصفوفة من النوع 3×3، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mn}=\begin{cases}0 & \text{إذا كان } m+n \text{ زوجيًّا}\\ m+n & \text{إذا كان } m+n \text{ فرديًّا}\end{cases}$$

33) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

a) المحدِّدة تساوي صفرًا.

b) المحدِّدة تساوي 25

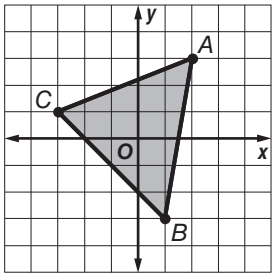
c) جميع العناصر أعداد سالبة والمحدِّدة تساوي -32

34) اكتب: صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين إذا كانت محدِّدة مصفوفة المعاملات تساوي صفرًا.

تدريب على اختبار

35) إجابة قصيرة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2، بحيث تكون جميع عناصرها أعدادًا سالبةً ومحدِّدتها تساوي 20.

36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدِّد إذا كانت مصفوفة الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة: (الدرس 3-2)

37) $A_{4\times2}\cdot B_{2\times6}$ **38)** $C_{5\times4}\cdot D_{5\times3}$ **39)** $E_{2\times7}\cdot F_{7\times1}$

حل كل نظام مما يأتي: (مهارة سابقة)

40) $2x-5y=-26$, $5x+3y=-34$

41) $4y+6x=10$, $2x-7y=22$

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية
Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

فيما سبق:
درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2 × 2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها .

المفردات :
مصفوفة الوحدة
identity matrix
النظير الضربي للمصفوفة
inverse matrix
المعادلة المصفوفية
matrix equation
مصفوفة المتغيرات
variable matrix
مصفوفة الثوابت
constant matrix
مصفوفة المعاملات
coefficient matrix

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 2 × 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3 × 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي — **المصفوفة المحايدة لعملية الضرب**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}, \underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$ ، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

مثال 1 التحقق من النظير الضربي

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

b) $\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

تحقق من فهمك

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب A^{-1} .

يمكنك استعمال المحدِّدات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

مفهوم أساسي النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدِّدة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

مثال 2 إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(a $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b $\underline{Q} = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

تحقق من فهمك

(2A $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2B $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة 2×2.

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا نجده كما في الخطوات 2 — 4.

2) بادل بين موضعي عنصري القطر الرئيس.

3) غيِّر إشارتي عنصري القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 2, 3 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات | مصفوفة المتغيرات: المتغيرات في النظام فقط | مصفوفة الثوابت: الثوابت في النظام فقط

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

ثم حل المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تحل بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

	المعادلة	
$ax = b$		$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	اضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد	$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$
$1x = \frac{b}{a}$	$\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}\,,\ \left(\frac{1}{a}\right)a = 1$	$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$
$x = \frac{b}{a}$	$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{X}\,,\ 1x = x$	$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

مثال 3 من واقع الحياة
حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

سفر: زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زود به سيارته من البنزين 104 لترات، بسعر إجمالي 49 ريالًا. فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟

الربط مع الحياة
هناك 90% من محطات الوقود العاملة في المملكة يديرها أفراد يمتلكون هذه المحطات، بينما 10% فقط من هذه المحطات تديرها شركات متخصصة في مجال تشغيل وإدارة محطات الوقود.

المصدر: الاقتصادية الإلكترونية / العدد 6872 / السبت 16 رمضان 1433هـ/4 أغسطس 2012م

http://www.aleqt.com/2012/08/04/article_680103.html

تحقق من فهمك
3) كتب: أنفقت عائشة في معرض للكتب 190 ريالًا لشراء 3 نسخ من كتاب علمي، و4 نسخ من كتاب ثقافي. في حين أنفقت فاطمة 340 ريالًا لشراء 3 نسخ من الكتاب العلمي نفسه و 10 نسخ من الكتاب الثقافي نفسه، فإذا كان سعر النسخة من الكتاب العلمي هو (x)، ومن الكتاب الثقافي هو (y)، فما سعر الكتاب العلمي؟

تأكد

مثال 1 حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

2) $\underline{F}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \underline{G}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

3) $\begin{bmatrix}6 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

مثال 3

5) نقود: مع أحمد 25 قطعة نقدية من فئة أرباع وأنصاف الريالات، بحيث تبلغ قيمة ما معه 8.5 ريالات. فما عدد الأرباع والأنصاف التي معه؟

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

6) $-2x+y=9$, $x+y=3$

7) $4x-2y=22$, $6x+9y=-3$

8) $-2x+y=-4$, $3x+y=1$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

9) $\underline{K}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}, \underline{L}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

10) $\underline{M}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}, \underline{N}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

11) $\underline{R}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \underline{S}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

12) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -6 & -1\end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

مثال 3

16) مشتريات: دفع سعد 225 ريالًا لشراء 5 أقلام حبر جافة وَ 6 أقلام حبر سائلة، بينما دفع ماجد 120 ريالًا لشراء 3 أقلام جافة من النوع نفسه وَ3 أقلام سائلة من النوع نفسه. فإذا كان سعر القلم الجاف x. وسعر القلم السائل y، فاستعمل معادلة مصفوفية؛ لإيجاد سعر القلم الجاف.

17) سكان: يبين الشكل الآتي نسبة الهجرة السنوية بين إحدى المدن وضواحيها.

اكتب مصفوفة تبين نسبة المهاجرين والباقين في كلٍّ من المدينة والضواحي.

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام إن أمكن فيما يأتي:

18) $-x+y=4$, $-x+y=-4$

19) $-x+y=3$, $-2x+y=6$

20) $x+y=4$, $-4x+y=9$

21) $3x+y=3$, $5x+3y=6$

22) $y-x=5$, $2y-2x=8$

23) $4x+2y=6$, $6x-3y=9$

24) $1.6y-0.2x=1$, $0.4y-0.1x=0.5$

25) $4y-x=-2$, $3y-x=6$

26) $2y-4x=3$, $4x-3y=-6$

الربط مع الحياة

تسعى حكومتنا الرشيدة إلى إقامة العديد من المشاريع في الضواحي بهدف وضع بنية تحتية فاعلة، مما يشجع على الهجرة العكسية أو هجرة السكان من المدن إلى الضواحي.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ: أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

28) تحدٍّ: صِفِ المعادلة المصفوفية لنظام معادلتين خطيتين بمتغيرين ذات العدد اللانهائي من الحلول.

29) تبرير: حدِّد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسِّر إجابتك.
"المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

30) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل.

31) اكتب: اشرح كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل أنظمة معادلات، ومتى يكون استعماله أكثر فاعلية.

تدريب على اختبار

32) إجابة قصيرة: تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 2 ريال، وحجم متوسط بسعر 3 ريالاتٍ، وحجم كبير بسعر 4 ريالاتٍ، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 150 ريالًا. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟

A 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

مراجعة تراكمية

جد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي: (الدرس 4-2)

33) $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$

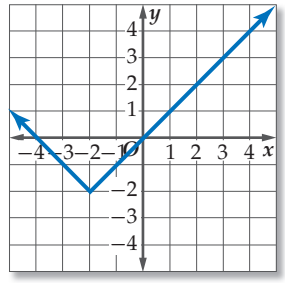
34) $\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$

35) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

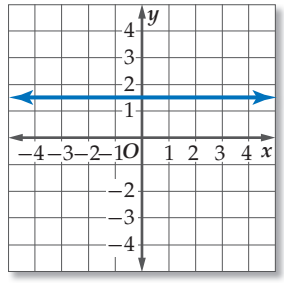
36) حليب: تنتج مزرعة أبقار 200 جالون على الأكثر من الحليب الطازج والحليب المبستر يوميًّا. فإذا كان كل زبون من زبائن المزرعة يحتاج إلى 15 جالونًا على الأقل من الحليب المبستر، و21 جالونًا على الأقل من الحليب الطازج يوميًّا، وكان ربح المزرعة في الجالون الواحد من الحليب المبستر 8.2 ريالات، ومن الحليب الطازج 7.5 ريالات. فكم عدد الجالونات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 6-1)

حدِّد نوع الدالة الممثلة بيانيًّا في كلّ مما يأتي: (الدرس 3-1)

37)



38)



الهدف

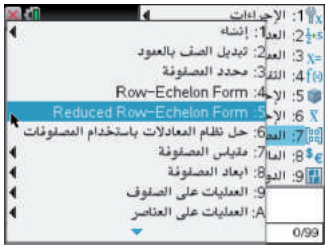
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire والمصفوفة الموسعة لحل نظام معادلات خطية.

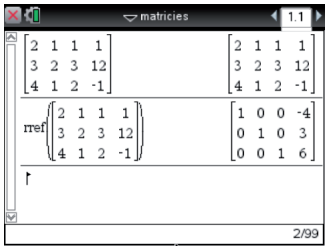
يمكنك حل نظام معادلات خطية باستعمال الحاسبة البيانية TI – nspire. إذ تحتوي **المصفوفة الموسعة** على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي إلى اليمين يحوي الثوابت. وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل تحديد حل نظام من المعادلات.

مثال

اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتي، ثم حل هذا النظام باستعمال الحاسبة البيانية:

$$2x + y + z = 1$$
$$3x + 2y + 3z = 12$$
$$4x + y + 2z = -1$$





الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on).
- من الشاشة الظاهرة اختر A العمليات الحسابية ومنها اختر 1 مستند جديد
- اختر 1: إضافة تطبيق الحاسبة.
- اضغط على مفتاح (menu) ثم اختر 7: المصفوفات و المتجهات ومنها اختر 1: إنشاء ومنها 1: المصفوفة تظهر شاشة نحدد من خلالها عدد الصفوف وعدد الأعمدة.
- أدخل عدد الصفوف ثم اضغط (tab) وأدخل عدد الأعمدة ثم اضغط (enter).
- أدخل معاملات المتغيرات والثوابت مستعملًا (tab) للتنقل، ثم اضغط (enter).
- اضغط (doc) واختر منها 1: ملف ثم 5: حفظ باسم... ثم سمّ الملف واضغط حفظ.
- اضغط (menu)، ثم اختر 7: المصفوفات و المتجهات ومنها اختر 5: Reduced Row-Echelon Form.
- استعمل السهم لأعلى ▲ لتظلل المصفوفة الموسعة التي كتبتها ثم اضغط (enter) ثم (enter) مرة أخرى فيظهر الحل.

ادرس الشكل المختزل للمصفوفة، ولاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى تشكّل مصفوفة محايدة من الرتبة 3×3، وتستنتج من الصف الأول أن $x = -4$، ومن الصف الثاني أن $y = 3$، ومن الصف الثالث أن $z = 6$ وعليه، يكون الحل $(-4, 3, 6)$.

تمارين:

اكتب مصفوفة موسّعة لكل نظام معادلات فيما يأتي، ثم حُلَّه باستعمال الحاسبة البيانية:

1) $3x + 2y = -4$
$4x + 7y = 13$

2) $4x + 6y = 0$
$8x - 2y = 7$

3) $6x - 4y + 2z = -4$
$2x - 2y + 6z = 10$
$2x + 2y + 2z = -2$

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المصفوفات (الدرس 1-2)

- المصفوفة: هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين.
- المصفوفات المتساوية لها الرتبة نفسها، وعناصرها المتناظرة متساوية.

العمليات على المصفوفات (الدرسان 2-2 و 2-3)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لهما الرتبة نفسها. وذلك بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها.
- لضرب مصفوفة في عدد ثابت k ، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.
- يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة، الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

المحددات وقاعدة كرامر (الدرس 2-4)

- قيمة محددة المصفوفة المربعة من الرتبة 2×2 تساوي حاصل ضرب عنصري القُطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القُطر الآخر.
- تستعمل المحددات في حل أنظمة المعادلات الخطية، وفي إيجاد مساحة مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه.

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الدرس 2-5)

- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار.
- تكون كل من المصفوفتين نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي مصفوفة الوحدة.
- لحل معادلة مصفوفية من الشكل $\underline{A}\underline{X} = \underline{B}$، أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم اضرب طرفي المعادلة فيه.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات

المصفوفة (62)
العنصر (62)
الرتبة (62)
مصفوفة الصف (63)
مصفوفة العمود (63)
المصفوفة المربعة (63)
المصفوفة الصفرية (63)
المصفوفات المتساوية (63)
جمع مصفوفتين (69)
طرح مصفوفتين (69)
ضرب المصفوفة في عدد ثابت (70)
المحددة (83)
محددة الدرجة الثانية (83)
محددة الدرجة الثالثة (84)
قاعدة الأقطار (84)
مصفوفة المعاملات (86)
قاعدة كرامر (86)
مصفوفة الوحدة (91)
النظير الضربي للمصفوفة (91)
المعادلة المصفوفية (93)
مصفوفة الثوابت (93)
مصفوفة المتغيرات (93)
مصفوفة المعاملات (93)

اختبر مفرداتك

اختر الكلمة المناسبة من المفردات أعلاه لتكمل كل جملة فيما يأتي:

1) الترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين يسمى _____ .

2) عملية ضرب جميع عناصر المصفوفة في عدد تسمى _____ .

3) تُسمى المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات _____ .

4) كل قيمة في المصفوفة تُسمى _____ .

5) يُسمى عدد الصفوف × عدد الأعمدة في المصفوفة _____ المصفوفة.

6) المصفوفة المربعة التي عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار هي _____ .

7) المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار هي _____ .

8) قيمة _____ المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ تساوي -1.

9) إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين هو مصفوفة الوحدة، فإن كلتا المصفوفتين تكون _____ للأخرى.

2-1 مقدمة في المصفوفات (الصفحات: 62-67)

10) نادٍ رياضي: يبين الجدول الآتي عدد المشتركين شهريًّا وسنويًّا في نادٍ رياضي في 3 رياضات مختلفة:

	اللياقة البدنية	السباحة	تخفيض الوزن
اشتراك شهري	31	108	64
اشتراك سنوي	68	9	42

a) نظّم بيانات الجدول في المصفوفة $\underline{A}$.

b) ما رتبة المصفوفة $\underline{A}$؟

c) ما قيمة العنصر a_{23}؟

d) ما قيمة العنصر a_{11}؟

e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول والثاني، وفسِّر النتائج.

مثال 1

متحف: يبين الجدول الآتي عدد زوار متحف في الفترة الصباحية والفترة المسائية خلال 3 أيام:

	اليوم الأول	اليوم الثاني	اليوم الثالث
الفترة الصباحية	37	19	26
الفترة المسائية	69	58	75

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الزوار. $\begin{bmatrix} 37 & 19 & 26 \\ 69 & 58 & 75 \end{bmatrix}$

b) ما رتبة المصفوفة؟ 2×3

c) اجمع عناصر كلٍّ من الصفين 1 و 2، وفسِّر النتائج.
مجموع عناصر الصف 1 هو 82، ويمثل عدد الزوار في الفترة الصباحية للأيام الثلاثة. ومجموع عناصر الصف 2 هو 202، ويمثل عدد الزوار في الفترة المسائية للأيام الثلاثة.

2-2 العمليات على المصفوفات (الصفحات: 69-74)

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

12) $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right)$

مثال 2

أوجد ناتج $2\underline{B} + 3\underline{A}$ إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$$3\underline{A} = 3\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, 2\underline{B} = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$2\underline{B} + 3\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

2-3 ضرب المصفوفات (الصفحات: 75-81)

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

13) $\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

15) مشتريات اشترى راشد 4 علب حليب، و 2 kg تفاحًا، و 3 kg بطاطس، وكيسًا واحدًا من الأرز، وتبين المصفوفة أدناه سعر علبة الحليب، والكيلوجرام الواحد من التفاح، والكيلوجرام الواحد من البطاطس، وكذلك سعر كيس الأرز.

أرز	بطاطس	تفاح	حليب
[25	3	10	15]

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد.

مثال 3

أوجد $\underline{XY}$ إذا كانت $\underline{X} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\underline{XY} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اضرب الصفوف في الأعمدة
$$= \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix}$$

بسّط
$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix}$$

2-4 المحددات وقاعدة كرامر (الصفحات: 90-83)

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات فيما يأتي:

18) $3x - y = 0$
$5x + 2y = 22$

19) $5x + 2y = 4$
$3x + 4y + 2z = 6$
$7x + 3y + 4z = 29$

20) حرف يدوية: صنعت شيماء 3 أساور، وعقدين بتكلفة مقدارها 85 ريالًا، وصنعت ليلى سوارين و 4 عقود بتكلفة مقدارها 110 ريالات. فإذا كان للعقود التي صنعتها كلٌّ منهما التكلفة نفسها، وكذلك الأساور. فجد تكلفة كلٍّ من العقد، والسوار.

مثال 4

أوجد قيمة: $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 2(-6)$ تعريف محددة الدرجة الثانية

$= 20 + 12 = 32$ بسّط

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام:
$2a + 6b = -1$, $a + 8b = 2$

$a = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر

$= \dfrac{-8 - 12}{16 - 6}$ احسب المحددات

$= \dfrac{-20}{10} = -2$ بسّط

$b = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر

$= \dfrac{4 + 1}{16 - 6}$ احسب المحددات

$= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ بسّط

الحل هو $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الصفحات: 96-91)

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

21) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

22) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

24) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

26) مشتريات: اشترى سعود 2 kg مكسرات و 2 kg قهوة بمبلغ 140 ريالًا. واشترى ناصر 3 kg مكسرات وكيلوجرامًا قهوة بمبلغ 170 ريالًا. فما سعر الكيلوجرام الواحد من كلا النوعين؟

مثال 6

حل المعادلة المصفوفية: $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$.

الخطوة 1: جد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$A^{-1} = \frac{1}{-12 - (-15)} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: حل المعادلة المصفوفية باستعمال $X = A^{-1} B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 90 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

إذن الحل هو (30, 9).

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، فحدد قيمة كلِّ عنصر مما يأتي:

1) a_{22} **2)** a_{31}

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $-3\begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) مبيعات: تبيع مكتبة 3 مجموعات من كتب الأطفال. ويبين الجدول الآتي تكلفة كل مجموعة وسعر بيعها. فإذا باعت المكتبة 20 مجموعة من الكتب التربوية، و 32 مجموعة من الكتب العلمية، و14 مجموعة من القصص.

المجموعة	التكلفة	سعر البيع (ريال)
تربوية	100	120
علمية	90	110
قصص	130	150

a) نظّم البيانات في مصفوفات، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية.

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة.

8) إذا كان $\underline{A}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \underline{C}=\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج $\underline{A}\underline{B} - \underline{A}\underline{C}$

9) استعمل المحددات لإيجاد مساحة $\triangle xyz$ الذي رؤوسه $x(1, 2), y(3, 6), z(-1, 4)$.

10) اختيار من متعدد: أوجد قيمة محددة المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A -44 **C** $\frac{1}{44}$

B 44 **D** $-\frac{1}{44}$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

11) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **12)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

استعمل معادلة مصفوفية لحل نظام المعادلتين الآتي:

15) $2x - y = -9$

$x + 2y = 8$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات فيما يأتي:

16) $x - y + 2z = 0$

$3x + z = 11$

$-x + 2y = 0$

17) $6x + 2y + 4z = 2$

$3x + 4y - 8z = -3$

$-3x - 6y + 12z = 5$

أسئلة الإجابات الشبكية

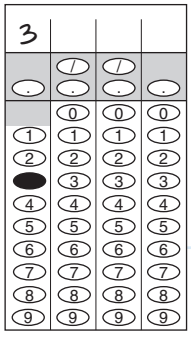
من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بالإضافة إلى أسئلة الاختيار من متعدد، وأسئلة الإجابات القصيرة، وأسئلة الإجابات المطولة، أسئلة الإجابات الشبكية. ويتطلب هذا النوع من الأسئلة كتابة الإجابة في نموذج خاص، وذلك بتظليل الدوائر التي تمثل الإجابات الصحيحة.

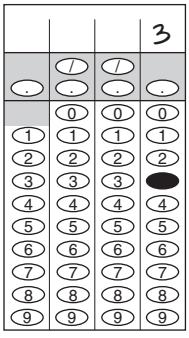
استراتيجيات حل أسئلة الإجابات الشبكية

الخطوة 1

اقرأ المسألة بإمعان، ثم حلّها.

- تأكد من أن إجابتك لها معنًى.
- إذا كان الوقت كافيًا، فتحقق من إجابتك.

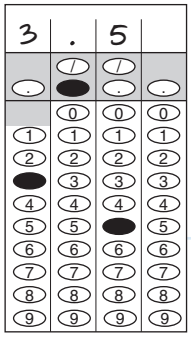


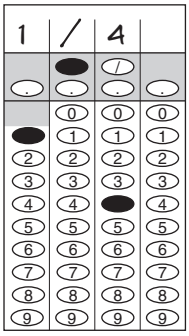


الخطوة 2

اكتب إجابتك في مربع الإجابة.

- اكتب عددًا واحدًا فقط أو رمزًا في كل مربع إجابة على نموذج الإجابة الشبكية.
- لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.
- يمكن أن تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كلية، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.





الخطوة 3

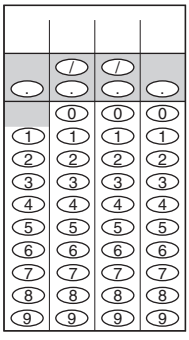
دوّن الإجابة في نموذج الإجابة الشبكية.

- ظلّل دائرة واحدة فقط لكل مربع إجابة، وتأكد من أنك ظللت قيمة مناظرة للتي في المربع.
- ظلّل بصورة واضحة وكاملة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

زوّد محمد سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من مكة المكرمة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زوّد به سيارته من البنزين 100 لتر بسعر إجمالي 47.25 ريالًا. فكم لتر بنزين زود به سيارته من كل محطة؟



اقرأ المسألة جيدًا، إذ يمكن حلُّها باستعمال نظامٍ من معادلتين.

لتكن x تمثل عدد اللترات من المحطة الأولى، وَ y تمثل عدد اللترات من المحطة الثانية،

لذا يكتب نظام المعادلتبن الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 100$$

$$0.50x + 0.45y = 47.25$$

من الممكن حل هذا النظام جبريًّا، ولكن يمكن حلُّه بشكل أسرع وبطريقة

أسهل باستعمال المصفوفات والحاسبة البيانية.

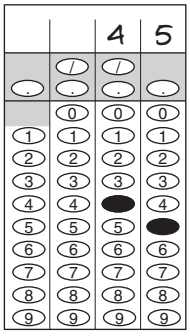
حل المسألة

أدخل كلًّا من مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت إلى الحاسبة البيانية، ثم أوجد الحل

باستعمال النظير الضربي.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 47.25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

إذن زوّد محمد سيارته بـ 45 لترًا من المحطة الأولى، و 55 لترًا من المحطة الثانية.



تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلِّها. انسخ نموذج الإجابة، واستعمله في الإجابة.

1) أوجد محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$.

2) أوجد محددة المصفوفة:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

فما قيمة $2\underline{A} + 3\underline{B}$ ؟

A $\begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} -5 & 15 & 30 \\ 15 & 25 & 15 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 15 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

2) أوجد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [\,1 \quad 3\,]$ ، إذا كان ذلك ممكنًا.

A $[\,-3\,]$ **C** $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

B $[\,11\,]$ **D** الضرب غير معرف

3) في أيٍّ من الدوال الآتية يكون $f\left(\frac{-1}{3}\right) \neq 0$ ؟

A $f(x) = -|3x| + 1$

B $f(x) = [3x + 1]$

C $f(x) = |3x| + 1$

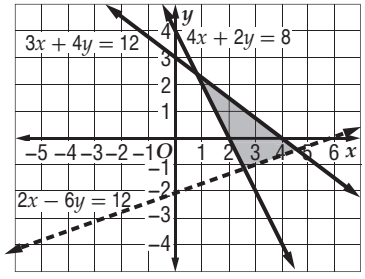
D $f(x) = [3x] + 1$

4) النقاط $D(-6, 2), E(3, 5), F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$، احسب مساحة هذا المثلث:

A 54.5 وحدة مربعة. **C** 60 وحدة مربعة.

B 58 وحدة مربعة. **D** 61.5 وحدة مربعة.

5) ما النظام الذي تمثل حله المنطقة المظللة في الشكل أدناه؟



A $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$

B $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

C $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$

D $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

6) ما رتبة المصفوفة: $D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ؟

A 4×2 **C** 4×8

B 2×4 **D** 8×4

7) أيٌّ من الدوال الآتية يكون مداها: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$ ؟

A $f(x) = [x]$

B $f(x) = |-x + 1|$

C $f(x) = -|x|$

D $f(x) = -[x] + 1$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

8) هل يوجد للمصفوفة B نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

9) احسب قيمة محددة المصفوفة:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

10) يستعمل حمد شبكة إحداثيات ليصمم أرضية جديدة في فناء منزله. فإذا كانت الأرضية تمثل حل نظام المتباينات $y \le 20, x \le 16, y \ge 0, x \ge 0\ ,\ y \le -x + 32$، وكانت كل وحدة على شبكة الإحداثيات تمثل قدمًا واحدة على الأرض، فما مساحة الأرضية بالقدم المربعة؟

11) مع عمر 14 قطعة نقدية من فئة الريال، ونصف الريال. فإذا كانت القيمة الكلية لهذه القطع النقدية هي 10.5 ريالات، فاستعمل هذه المعلومات للإجابة عن كل سؤال مما يأتي:

a) افرض أن d تمثل عدد الريالات التي يملكها عمر، وq عدد أنصاف الريالات التي يملكها. اكتب نظام معادلات يمثّل هذه الحالة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن أن تستعمل لإيجاد قيم كلٍّ من d و q.

c) حل المعادلة المصفوفية في الفرع b باستعمال النظير الضربي. ما عدد الريالات وأنصاف الريالات التي يملكها عمر؟

12) مثل بيانيًّا نظام المتباينات الآتي، ثم حدد رؤوس منطقة الحل وجد القيمة العظمى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

$$x \ge 0\ ,\ y \ge 0$$
$$x + 2y \le 14$$
$$3x + 4y \le 36$$
$$f(x, y) = 8x + 12y$$

13) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، ومتى لا يمكن ضربهما، وأعط مثالًا على ذلك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	2	8	9	10	11	12	13
فعد إلى...	2-2	2-3	1-3	2-4	1-5	2-1	1-4	2-5	2-4	1-5	2-5	1-6	2-3