الفصل 3

كثيرات الحدود ودوالها
Polynomials and Polynomial Functions

فيما سبق:
درستُ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا، وحل المعادلات التربيعية.

والآن:
- أتعرف الأعداد المركبة، وأجري العمليات عليها.
- أحل معادلات تربيعية.
- أجمع كثيرات الحدود وأطرحها وأضربها وأقسمها.
- أحلّل دوال كثيرات الحدود.
- أصف التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود، وأحل معادلات كثيرات الحدود.
- أجد عوامل دوال كثيرات الحدود وأصفارها.
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.

لماذا؟

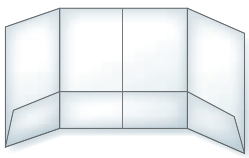
مواصلات: يمكن استعمال دوال كثيرات الحدود لتحديد جداول انطلاق الحافلات، والطاقة الاستيعابية للطرق السريعة، والأنماط المرورية، ومتوسط تكاليف الوقود. وأسعار كلٍّ من السيارات الجديدة والمستعملة.

المطويات منظم أفكار

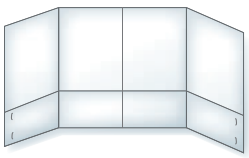
كثيرات الحدود ودوالها: اعمل المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود ودوالها، ابدأ بورقة A4.

1. **اثن** الورقة بعرض 5cm بصورة موازية للضلع الأطول.

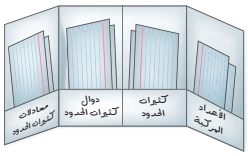
2. **اثن** الورقة بصورة موازية للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.



3. **ثبّت** الحافتين الطرفيتين للثنيه كما يظهر في الشكل أدناه.



4. **عنون** الأقسام الأربعة بالعناوين: الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.



التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل الأول

اجب عن الاختبار الاتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أعد كتابة كلٍّ من العبارات الآتية في صورة جمع: (يستعمل مع الدرس 4-3)

1) $-5 - 13$
2) $5 - 3y$
3) $5mr - 7mp$
4) $3x^2y - 14xy^2$
5) **محاضرات:** حضر 20 شخصًا محاضرة، ثم غادروا القاعة في مجموعات ثنائية، فغادرت منهم x مجموعة. اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع.

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس: (يستعمل مع الدرس 4-3)

6) $-4(a + 5)$
7) $-1(3b^2 + 2b - 1)$
8) $-\frac{1}{2}(2m - 5)$
9) $-\frac{3}{4}(3z + 5)$
10) **هدايا:** وزع معلم قلمًا وحقيبة على كل طالب في صفٍّ يضم 15 طالبًا. إذا كان ثمن القلم 8 ريالاتٍ، والحقيبة 18 ريالًا، فاكتب عبارة تمثل ثمن الأقلام والحقائب. استعمل خاصية التوزيع لحساب الثمن.

حل كل معادلة فيما يأتي: (يستعمل مع الدرس 7-3)

11) $x^2 + 2x - 8 = 0$
12) $x^2 - 5x + 6 = 0$
13) $x^2 - x - 20 = 0$
14) $x^2 - x = 0$
15) **فيزياء:** إذا سقط جسم من ارتفاع 50ft عن سطح الأرض فإن ارتفاعه عن سطحها بعد t ثانية يعبر عنه بالصيغة $h = -16t^2 + 50$. استعمل المعادلة $-16t^2 + 50 = 0$ لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى الأرض.

مراجعة سريعة

مثال 1

أعد كتابة العبارة $2xy - 3 - z$ على صورة جمع.

$2xy - 3 - z$	العبارة الأصلية
$= 2xy + (-3) + (-z)$	أعد الكتابة باستعمال الجمع

مثال 2

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة الآتية دون أقواس: $-3(a + b - c)$

$-3(a + b - c)$	العبارة الأصلية
$= -3(a) + (-3)(b) + (-3)(-c)$	خاصية التوزيع
$= -3a - 3b + 3c$	بسّط

مثال 3

حل المعادلة: $x^2 - 6x + 12 = 19$.

يمكن استعمال طريقة إكمال المربع.

$x^2 - 6x + 12 = 19$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 6x = 7$	اطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$	أضف 9 لكلا الطرفين
$(x - 3)^2 = 16$	حلّل $x^2 - 6x + 9$
$x - 3 = \pm 4$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = 3 \pm 4$	أضف 3 لكلا الطرفين

الحلان هما: $7, -1$

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

3-1 الأعداد المركبة
Complex Numbers

فيما سبق :
درستُ تبسيط الجذور التربيعية.
(مهارة سابقة)

والآن :
- أجري العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات

الوحدة التخيلية
imaginary unit

العدد التخيلي البحت
pure imaginary number

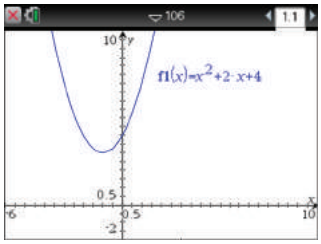
العدد المركب
complex number

المركبان المترافقان
complex conjugates

www.obeikaneducation.com

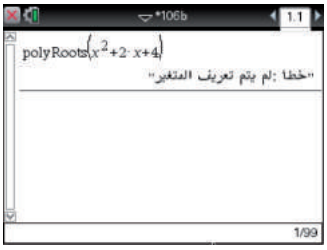
لماذا ؟

بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لايقطع المحور x، ولذا فليس للمعادلة جذور حقيقية. فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟



[−6, 10] scl: 0.5 by [−2, 10] scl: 0.5

للتأكد من ذلك استعمل الآلة الحاسبة بالضغط على مفتاح on ومنها اختر 1 مستند جديد ثم اختر 1: إضافة تطبيق الحاسبة ثم اضغط menu واختر منها 3: العمليات الجبرية 3: ادوات كثيرات الحدود 2: الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود



ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط enter enter فيظهر على الشاشة كلمة **خطأ**، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيلية.

الأعداد التخيلية البحتة : قادت المعادلات "كالمعادلة السابقة" الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، ووحدتها التخيلية i ، حيث تعرف **الوحدة التخيلية** i على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن : $i = \sqrt{-1}$ ، وهذا يعني أن $i^2 = -1$

والأعداد على الصورة $i\sqrt{3}$, $-2i$, $6i$، تسمى **أعدادًا تخيلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن $bi = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$.$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

a) $\sqrt{-27}$ **b)** $\sqrt{-216}$

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt{-18}$ **1B)** $\sqrt{-125}$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلًّا من الخاصيتين التجميعية والتبديلية على الضرب، ويبين الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$	$i^6 = (i^2)^3 = -1$	$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

مثال 2 ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $-5i \cdot 3i$

b) $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

تحقق من فهمك

2A) $3i \cdot 4i$ **2B)** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ **2C)** i^{31}

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر التربيعي

راجع خصائص الجذر التربيعي التي درستها في الصف الثالث المتوسط.

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة : $4x^2 + 256 = 0$.

تحقق من فهمك

3A) $4x^2 + 100 = 0$ **3B)** $x^2 + 4 = 0$

العمليات على الأعداد المركبة : تتكون العبارة من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما، وهما العدد الحقيقي 2 والعدد التخيُّلي $3i$، ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.

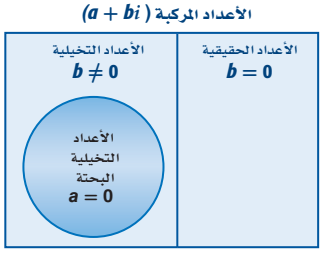
مفهوم أساسي الأعداد المركبة (C)

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a وَ b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

يوضِّح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًّا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتَي x , y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

ويمكنك استعمال كلٍّ من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمِّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمِّع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

b) $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

تحقق من فهمك

5A) $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ **5B)** $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب يمكنك تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

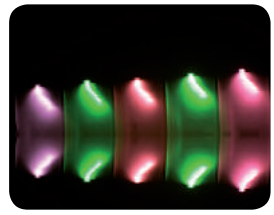
إرشادات للدراسة

المعاوقة :
في الأعداد المركبة تستعمل كلمة المعاوقة بدلًا من المقاومة.

مثال 6 من واقع الحياة

ضرب الأعداد المركبة

كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $4i + 2$ أمبير، ومعاوقتها $3i - 9$ أوم .



الربط مع الحياة

مصابيح الزينة من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

المصدر: كتاب الفيزياء المقرر للصف الثالث الثانوي، 1434 هـ

تحقق من فهمك

6) كهرباء: أوجد فرق الجهد لتيار متناوب شدته $4i - 2$ أمبير، ومعاوقته $2i - 3$ أوم.

يسمى العددان المركبان $a - bi$, $a + bi$ **مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا على الصورة $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

مثال 7

قسمة الأعداد المركبة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

a) $\frac{2i}{3 + 6i}$

b) $\frac{4 + i}{5i}$

إرشادات للدراسة

قراءة الرياضيات

يمكنك حل الفرع b من المثال 7 بضرب كل من البسط والمقام في العدد $-5i$ ، ولكن للاختصار تم الضرب في العدد i فقط.

تحقق من فهمك

7A) $\frac{-2i}{3 + 5i}$

7B) $\frac{2 + i}{1 - i}$

تأكد

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

المثالان 1 , 2

1) $\sqrt{-81}$

2) $\sqrt{-32}$

3) $(4i)(-3i)$

4) $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

5) i^{40}

6) i^{63}

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي :

مثال 3

7) $4x^2 + 32 = 0$

8) $2x^2 + 24 = 0$

في كلِّ معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي a , b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

9) $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

10) $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

الأمثلة 5 , 6 , 7

11) $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

12) $(7 + 4i) - (1 + 2i)$

13) $(6 - 8i)(9 + 2i)$

14) $(3 + 2i)(-2 + 4i)$

15) $\frac{3 - i}{4 + 2i}$

16) $\frac{2 + i}{5 + 6i}$

17) **كهرباء:** تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $3i - 5$ أمبير، وفي الجزء الآخر من الدائرة $9i + 7$ أمبير. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

تدرب وحل المسائل

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

المثالان 1 , 2

18) $\sqrt{-121}$

19) $\sqrt{-169}$

20) $\sqrt{-100}$

21) $\sqrt{-81}$

22) $(-3i)(-7i)(2i)$

23) $4i(-6i)^2$

24) i^{11}

25) i^{25}

26) $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$

27) $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي :

مثال 3

28) $4x^2 + 4 = 0$

29) $3x^2 + 48 = 0$

30) $2x^2 + 10 = 0$

31) $6x^2 + 108 = 0$

في كلِّ معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي x، y الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

32) $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$

33) $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$

34) $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$

35) $(2x - 4y)i + x + 5y = 15 + 58i$

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

الأمثلة 5 , 6 , 7

36 $(-3+i)+(-4-i)$

37 $(11-8i)-(2-8i)$

38 $(1+2i)(1-2i)$

39 $(3+5i)(5-3i)$

40 $(4-i)(6-6i)$

41 $\dfrac{2i}{1+i}$

42 $\dfrac{5}{2+4i}$

43 $\dfrac{5+i}{3i}$

44 $(4-6i)+(4+6i)$

45 $(8-5i)-(7+i)$

46 $(-6-i)(3-3i)$

47 $(1+i)(2+3i)(4-3i)$

48 $\dfrac{4-i\sqrt{2}}{4+i\sqrt{2}}$

49 $\dfrac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$

50 **كهرباء:** تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $8i+7$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $4i-13$ أوم. اجمع هذين العددين المركّبين لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

كهرباء: استعمل الصيغة $V = C \cdot I$، حيث V فرق الجهد، وC شدة التيار، و I المعاوقة في حل السؤالين 52 , 51 :

51 إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $3+6i$ أمبير، والمعاوقة $-5i$ أوم ، فكم يكون فرق الجهد ؟

52 إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $-12i-20$ فولت، والمعاوقة $-4i-6$ أوم ، فكم تكون شدة التيار؟

53 أوجد ناتج جمع $7+x-(4+5i)x^2+ix$ إلى $3x^2+(2+6i)x-8i$.

54 بسّط العبارة: $[(2+i)x^2-ix+5+i]-[(-3+4i)x^2+(5-5i)x-6]$

55 **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حدٍّ بعيد المستوى الحقيقي، وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية البحتة على المحور الرأسي.

a) بيانيًّا: مثّل العدد $3+4i$ بيانيًّا في المستوى المركب، وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(3, 4)$، وسمِّ تلك النقطة A.

b) بيانيًّا: مثّل العدد $-2-5i$ بيانيًّا في المستوى المركب وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-5, -2)$، وسمِّها B.

c) بيانيًّا: إذا كانت النقطتان A, B ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C .

d) تحليليًّا: ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A, B, C؟

الربط مع الحياة

الكهرباء عدد من التأثيرات الفيزيائية تشمل مجموعة متنوعة من الظواهر الناتجة عن وجود شحنة كهربائية وتدفّقها. وتضم هذه الظواهر: البرق، والكهرباء الساكنة، والمجال والحثّ الكهرومغناطيسيين.

المصدر: ويكيبيديا كهرباء
http://ar.wikipedia.org/wiki

مسائل مهارات التفكير العليا

56) **اكتشف الخطأ:** قامت كلٌّ من صفاء ومنال بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$، فأيٌّ منهما على صواب؟وضِّح إجابتك.

صفاء	منال
$24i^3 = -24i$	$24i^3 = -24$

57) **تحدٍّ:** بسّط العدد المركب $(1 + 2i)^3$.

58) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك:

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي"

59) **مسألة مفتوحة:** اكتب عددين مركّبين يكون ناتج ضربهما يساوي 20.

60) **اكتب:** وضِّح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية، وكيف تحدد إذا كان للمعادلة التربيعية حلول مركبة فقط أم لا ؟

تدريب على اختبار

61) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5 + 4i) - (x+yi) = (-1-3i)$ صحيحية؟

A $x = 6, y = 7$

B $x = 4, y = i$

C $x = 4, y = i$

D $x = 4, y = 7$

62) قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي:

A $-27 + 36i$

B $9 + 36$

C $9 - 36$

D $36 - 27i$

مراجعة تراكمية

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي مستعملًا التحليل إلى العوامل: (مهارة سابقة)

63) $2x^2 + 7x = 15$ **64)** $4x^2 - 12 = 22x$ **65)** $6x^2 = 5x + 4$

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا ممَّا يأتي، (إذا كان ذلك ممكنًا): (مهارة سابقة)

66) مجموعهما -3، وناتج ضربهما -40 . **67)** مجموعهما -21، وناتج ضربهما 108 .

هل تمثّل كلٌّ من ثلاثيات الحدود الآتية مربعًا كاملًا أم لا؟ (مهارة سابقة)

68) $x^2 + 16x + 64$ **69)** $x^2 - 12x + 36$

70) $x^2 + 8x - 16$ **71)** $x^2 + 5x + 6.25$

3-2

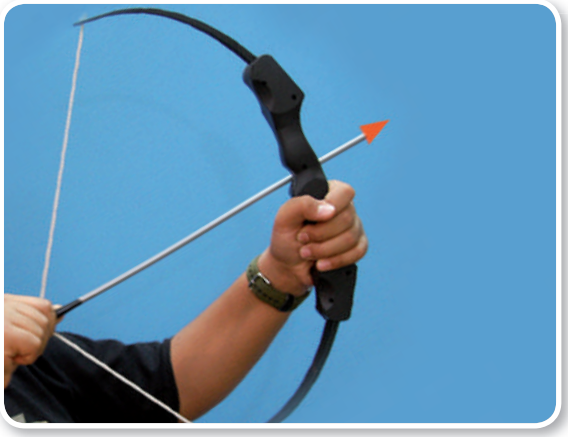
القانون العام والمميز
The Quadratic Formula and the Discriminant

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المفردات
القانون العام
Quadratic Formula
المميز
discriminant

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

أُطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$h = -4.9t^2 + 117t + 42$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$.

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: تمكنت سابقًا من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي، أو بإكمال المربع، أو باستعمال القانون العام؛ وهو قانون يمكن استعماله لحل أية معادلة تربيعية، ويمكن اشتقاق هذا القانون من خلال حل معادلة تربيعية على الصورة القياسية.

الحالة العامة		مثال
$ax^2 + bx + c = 0$	معادلة تربيعية على الصورة القياسية	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	اقسم كلا الطرفين على a	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	اطرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	أكمل المربع	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	حلّل الطرف الأيسر	$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	بسّط الطرف الأيمن	$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	خاصية الجذر التربيعي	$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	اطرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	بسّط	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال 1

معادلة لها جذران نسبيان

حل المعادلة: $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

تحقق من فهمك

(1A) $x^2 + 6x = 16$

(1B) $2x^2 + 25x + 33 = 0$

عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا، فإننا نحصل على جذرٍ نسبيٍّ واحدٍ، ويكون حل المعادلة في هذه الحالة هو هذا الجذر النسبي، ولكنه مكرر مرتين .

تاريخ الرياضيات

براهام جوبتا

(598-668 م) عالم رياضي هندي، وهو أول من أوجد حلًّا عامًّا للمعادلة التربيعية في الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمَّى الآن القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال 2 معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

حل المعادلة: $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

تحقق من فهمك

(2A $x^2 - 16x + 64 = 0$

(2B $x^2 + 34x + 289 = 0$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها في الصورة الجذرية .

مثال 3 الجذور غير النسبية

حل المعادلة: $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

إرشادات للدراسة

إظهار كامل التمثيل البياني:

لإظهار التمثيل البياني للدالة كاملًا على الشاشة.

اضغط مفتاح menu ومنها اختر 4: تكبير/تصغير النافذة

ثم اختر 1: إعدادات النافذة لتحدد التدريج المناسب للمتغير y فاختر مثلًا

و

تحقق من فهمك

(3A $3x^2 + 5x + 1 = 0$

(3B $x^2 - 8x + 9 = 0$

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

تذكّر أن تكتب حلك على الصورة $a + bi$، وتسمى هذه الصورة الصورة القياسية للعدد المركب.

مثال 4 الجذور المركبة

حل المعادلة: $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

تحقق من فهمك

(4A) $3x^2 + 5x + 4 = 0$

(4B) $x^2 - 4x = -13$

الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. تسمى العبارة $b^2 - 4ac$ **المميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{المميز}$$

ويمكنك استعمال المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية، وأنواعها، والجدول في الصفحة الآتية يلخص الأنواع الممكنة للجذور، وذلك للتأكد من صحة حلك.

إرشادات للدراسة

الجذور

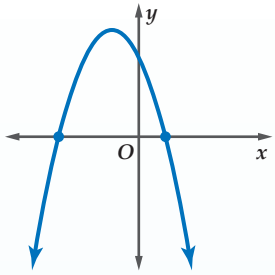
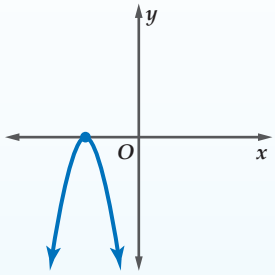
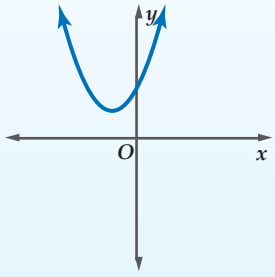
تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X.

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

المميز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b, c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي مكرر مرتين	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 5

وصف الجذور

أوجد قيمة المميز لكلٍّ من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كلٍّ منهما وأنواعها:

a) $7x^2 - 11x + 5 = 0$ **b)** $x^2 + 22x + 121 = 0$

تحقق من فهمك

5A) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$ **5B)** $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، والجدول أدناه يلخص تلك الطرائق.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حل المعادلات التربيعية

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا مثال: $x^2 - 7x = 0$؛ أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 5x + 6 = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	عندما لايمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها. مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تأكد

الأمثلة 4–1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $x^2 + 12x - 9 = 0$

2) $x^2 + 8x + 5 = 0$

3) $4x^2 - 5x - 2 = 0$

4) $9x^2 + 6x - 4 = 0$

5) $10x^2 - 3 = 13x$

6) $22x = 12x^2 + 6$

7) $-3x^2 + 4x = -8$

8) $x^2 + 3 = -6x + 8$

مثال 5 أجب عن الفرعين b،a لكلِّ معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

9) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

10) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

11) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

12) $5x^2 + 2x + 4 = 0$

الأمثلة 4–1

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

13) $x^2 + 45x = -200$

14) $4x^2 - 6 = -12x$

15) $5x^2 - 9 = 11x$

16) $12x^2 + 9x - 2 = -17$

مثال 5

أجب عن الفروع a–c لكلِّ معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

17) $2x^2 + 3x - 3 = 0$

18) $3x^2 - 3x + 8 = 0$

19) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

20) $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

21) $x^2 - 6x = -9$

22) $x^2 + 2x - 4 = -9$

23) $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

24) $5x^2 + 8x = 0$

25) $8x^2 = -2x + 1$

26) $4x - 3 = -12x^2$

27) $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

28) $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

الربط مع الحياة

تأسس برنامج مكافحة التدخين التابع لوزارة الصحة في المملكة العربية السعودية في 1423/2/23هـ؛ لمكافحة التدخين بكافة أنواعه ووسائله. ويقدم خدماته في كافة المجالات التوعوية والعلمية والاستشارية المتعلقة بالتدخين وأضراره وطرق مكافحته في مدن ومحافظات المملكة.

المصدر: البوابة الإلكترونية لوزارة الصحة www.moh.gov.sa/depts/TCP/Pages/About.aspx

العام	عدد الإصابات لكل 100000
2000	92
2002	90
2004	85
2010	?
2015	?

29) التدخين: تبذل دول العالم جهودًا مكثفة للتوعية بأخطار التدخين، وقد أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام، وكانت نتائجها التقريبية كما في الجدول المجاور. ويمكن تمثيل العدد التقريبي للمصابين بالدالة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000.

a) احسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامَي 2010, 2015 .

b) استعمل القانون العام لإيجاد قيمة x عندما $y = 50$.

c) اعتمادًا على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ فسِّر إجابتك.

30) نظرية الأعداد: يعطَى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية n ، ... ،3 ،2 ،1 بالقانون $S = \frac{1}{2} n\,(n+1)$. فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا بالعدد 1 مجموعها يساوي 666؟

31) ترفيه: يُعطى ارتفاع لعبة ترفيهية عن سطح الأرض وهي تهوي بسرعة تصل إلى 80 $ft \backslash s$ بالدالة: $h = -16t^2 - 64t + 60$ ؛ حيث h الارتفاع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. فإذا علمت أنها ترتفع مسافة 60 ft ، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع 60 ft إلى 0 ft ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

32) اكتشف الخطأ: حددت كلٌّ من هدى وندى عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

هدى

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

وبما أن المميز موجب فللمعادلة حلان حقيقان.

ندى

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

وبما أن المميز سالب فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

33) تحدٍّ: حل المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستعمال القانون العام.

34) تبرير: حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك:

a) إذا كانت إشارتا كلٍّ من المعاملَين a،c في المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة القياسية مختلفتين، فإن جذرَي المعادلة حقيقيان.

b) إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين.

35) اكتب: صف ثلاث طرائق مختلفة لحل المعادلة: $x^2 - 2x - 15 = 0$. وأيها تفضل؟ ولماذا؟

تدريب على اختبار

36) أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟

A $x^2 - 2x + 5 = 0$

B $x^2 - 2x - 5 = 0$

C $x^2 = 19$

D $x^2 - 8x = -16$

37) قيمة المميز للمعادلة $x^2 - 8x = 0$ هي:

A -64

B -8

C 8

D 64

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مما يأتي مربعًا كاملًا. ثم اكتبها على صورة مربع كامل: (مهارة سابقة)

38) $x^2 + 13x + c$

39) $x^2 + 2.4x + c$

40) $x^2 + \frac{4}{5}x + c$

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-1)

41) i^{26}

42) $\sqrt{-16}$

43) $(4\sqrt{-9}) \cdot (2\sqrt{-25})$

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

الهدف
أكتب المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

إذا علمت جذري معادلة تربيعية فإنه يمكنك كتابتها باستعمال مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

للمعادلةالتربيعية: $x^2 + 5x - 24 = 0$ جذران هما -8 , 3
ومجموعهما -5 ، وحاصل ضربهما -24.

مجموع الجذرين: $3 + (-8) = -5$ — -5 هو النظير الجمعي لمعامل x

$x^2 + 5x - 24 = 0$

حاصل ضرب الجذرين: $3(-8) = -24$ — -24 هو الحد الثابت

ويمكن تعميم ذلك لأية معادلة تربيعية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية، فإذا كان جذرا المعادلة التربيعية r_1 , r_2 فإن:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{مجموع الجذرين}$$

$$= \frac{-2b + 0}{2a} = -\frac{b}{a} \quad \text{بسّط}$$

مجموع الجذرين يساوي $-\frac{b}{a}$

حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اضرب الجذرين}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \quad \text{اضرب}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \quad \text{الخاصية التوزيعية}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \text{بسّط}$$

حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{c}{a}$

مما سبق يمكن التوصل للقانون الآتي الذي يستعمل لكتابة أية معادلة تربيعية علم جذراها.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما

إذا كان r_1 , r_2 جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
فإن $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$, $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.

النشاط 1 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها -7 , 2.

الخطوة 1 : أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = 2 + (-7)$$
$$= -5$$

الخطوة 2 : أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = 2(-7)$$
$$= -14$$

الخطوة 3 : اكتب المعادلة:

بما أن $-14 = \frac{c}{a}$, $-5 = -\frac{b}{a}$ ، فإذا كانت $a = 1$ فإن: $b = 5$, $c = -14$.

وبالتالي المعادلة : $x^2 + 5x - 14 = 0$ تحقق المطلوب.

النشاط 2 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{12}{5}$, $\frac{3}{4}$.

الخطوة 1 : أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= \frac{15}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{33}{20}$$

الخطوة 2 : أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= -\frac{36}{20}$$

الخطوة 3 : اكتب المعادلة:

بما أن $-\frac{36}{20} = \frac{c}{a}$, $-\frac{33}{20} = -\frac{b}{a}$ ؛ فإذا كانت $a = 20$ فإن: $b = 33$, $c = -36$.

وبالتالي المعادلة : $20x^2 + 33x - 36 = 0$ تحقق المطلوب.

تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العددان المعطيان في كل مما يأتي:

1) $-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ **2)** $-7, \frac{2}{3}$ **3)** $\pm\frac{2}{5}$ **4)** $4 \pm \sqrt{3}$

5) $1 \pm \sqrt{6}$ **6)** $\frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7}$ **7)** $7 \pm 3i$ **8)** $\sqrt{5} \pm 8i$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلًّا مما يأتي:

9) مجموع جذريها 4 ، وحاصل ضربهما $\frac{13}{12}$.

10) مجموع جذريها $\frac{1}{6}$ ، وحاصل ضربهما $\frac{5}{21}$.

3-3

العمليات على كثيرات الحدود
Operations with Polynomials

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيم القوى.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى، وأقسمها وأبسّطها.
- أجمع كثيرات حدود، وأطرحها وأضربها.

المفردات:
التبسيط
simplifying
درجة كثيرة الحدود
Degree of a polynomial

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريبًا؛ إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ تقريبًا.

ما الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} \text{m}$ تقريبًا؟

ضرب وحيدات الحد وقسمتها تذكّر أن وحيدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة، وتتكون من حد واحد فقط. والجدول الآتي يلخص خصائص الأسس التي تساعد على ضرب وقسمة وحيدات الحد وتبسيطها، حيث إن عملية **تبسيط** عبارات تتضمن قوى تعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

خصائص الأسس

لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b:

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$، حيث $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسّ السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \frac{1}{x^{-a}} = x^a$، حيث $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد من أنك قد كتبتها في أبسط صورة.

مفهوم أساسي

تبسيط وحيدات الحد

أضف إلى مطويتك

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أقواسًا أو أسسًا سالبة.

مثال 1

تبسيط العبارات

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

b) $\dfrac{q^2r^4}{q^7r^3}$

c) $\left(\dfrac{-2a^4}{b^2}\right)^3$

إرشادات للدراسة

تحقق

يمكنك التحقق من إجابتك دائمًا باستعمال تعريف الأسس، فمثلًا:

$$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q} = \frac{1}{q^5}$$

تحقق من فهمك

1A) $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

1B) $\dfrac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

1C) $\left(\dfrac{a}{4}\right)^{-3}$

1D) $(-2x^3y^2)^5$

العمليات على كثيرات الحدود: **درجة كثيرة الحدود** المبسّطة هي أكبر درجة لوحيدات الحد المكوِّنة لها.
فمثلًا درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

إرشادات للدراسة

كثيرات الحدود
تذكّر أن كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد، وتُسمى كل وحيدة حد منها حدًّا في كثيرة الحدود. ودرجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

مثال 2 درجة كثيرة الحدود

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

a) $\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$

b) $\sqrt{x} + x + 4$

c) $x^{-3} + 2x^{-2} + 6$

تحقق من فهمك

2A) $\frac{x}{y} + 3x^2$

2B) $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$

يمكنك إجراء العمليات المطلوبة على كثيرات الحدود وتبسيطها تمامًا كما تبسّط وحيدة الحد، ثم تجمع الحدود المتشابهة.

إرشادات للدراسة

طرائق بديلة
لاحظ أن المثال 3a يستعمل طريقة الجمع الأفقي. على حين يستعمل المثال 3b طريقة الجمع الرأسي، وكلتاهما تؤدي إلى الإجابة الصحيحة.

مثال 3 جمع كثيرات الحدود وطرحها

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورةٍ:

a) $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

b) $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$

تحقق من فهمك

3A) $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$

3B) $(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

يمكنك استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

مثال 4 ضرب وحيدة حدٍّ في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $3x(2x^2 - 4x + 6)$، واكتبه في أبسط صورة.

تحقق من فهمك

(4A) $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

(4B) $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

مثال 5 ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(n + 2)(n^2 + 4n - 6)$، واكتبه في أبسط صورة.

إرشادات للدراسة

قانون المسافة

تذكّر أن:

المسافة = السرعة × الزمن

تحقق من فهمك

(5A) $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

(5B) $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

يمكنك استعمال كثيرات الحدود لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة كتابة عبارة كثيرة حدود

قيادة: تتطلب أنظمة إحدى شركات النقل البري أن تكون مدة قيادة سائقي الشاحنات 10 ساعات يوميًّا، تتخللها فترة استراحة، فإذا قاد أحد سائقي الشركة شاحنته في فترة ما قبل الاستراحة بسرعة 90km/h ، وبعد الاستراحة بسرعة 100km/h ، فاكتب كثيرة حدود تمثل المسافة التي قطعها .

الربط مع الحياة

تعقد معظم الدول دورات تدريبية متخصصة واختبارات مشددة لقائدي الشاحنات للتأكد من مستوى تأهيلهم لقيادتها، وتوعيتهم بكيفية التعامل مع الطرق السريعة، بما يقلل المخاطر ويؤمن حركة السير.

تحقق من فهمك

(6) استثمار: استثمر فيصل مبلغ 90000 ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18%، والآخر مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي 42%، فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$ **2)** $\dfrac{12x^4y^2}{2xy^5}$ **3)** $\left(\dfrac{2a^2}{3b}\right)^3$ **4)** $(6g^5h^{-4})^3$

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

5) $3x + 4y$ **6)** $\frac{1}{2}x^2 - 7y$ **7)** $x^2 + \sqrt{x}$ **8)** $\dfrac{ab^3 - 1}{az^4 + 3}$

الأمثلة 3 , 4 , 5 أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي واكتبه في أبسط صورة:

9) $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$ **10)** $(3a + 4b) + (6a - 6b)$

11) $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$ **12)** $(n - 9)(n + 7)$

مثال 6 **13) رياضة:** يمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 دقيقة يوميًّا. وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، أما عندما يرفع الأثقال فيحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. فإذا مارس رفع الأثقال x دقيقة في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم.

تمارين ومسائل

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

14) $(5x^3y^{-5})(4xy^3)$ **15)** $\dfrac{-y^3z^5}{y^2z^3}$ **16)** $\dfrac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2}$ **17)** $(n^5)^4$

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

18) $2x^2 - 3x + 5$ **19)** $a^3 - 11$ **20)** $\dfrac{5np}{n^2} - \dfrac{2g}{h}$ **21)** $\sqrt{m - 7}$

الأمثلة 3 , 4 , 5 أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورة:

22) $(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12)$ **23)** $4x(2x^2 + y)$

24) $(x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$ **25)** $(a + b)(a^3 - 3ab - b^2)$

مثال 6 **26) مزرعة:** استأجر سلمان عاملين لتنسيق مزرعته، فإذا تقاضى الأول 200 ريالٍ عن كل يوم عمل ، وتقاضى الثاني 150 ريالًا عن كل يوم عمل، واحتاجت المزرعة إلى 15 يوم عملٍ لتنسيقها، فاكتب كثيرة حدودٍ تمثل تكلفة تنسيق المزرعة إذا عمل الأول مدة x يومًا.

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

27) $\left(\dfrac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4$ **28)** $\left(\dfrac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2}$ **29)** $(a^2b^3)(ab)^{-2}$

30) $(-3x^3y)^2(4xy^2)$ **31)** $\dfrac{3c^2d(2c^3d^5)}{15c^4d^2}$ **32)** $\frac{1}{4}g^2(8g + 12h - 16gh^2)$

33) $x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1})$ **34)** $a^{-3}b^2(ba^3 + b^{-1}a^2 + b^{-2}a)$

35) $(n^2 - 7)(2n^3 + 4)$ **36)** $(2x - 2y)^3$

الربط مع الحياة

يصعب التنبؤ بالطقس على كوكب المريخ، نظرًا إلى بيئته المتقلبة. ويبدو أن فيه أعمق وادٍ، وأكبر بركان في المجموعة الشمسية.

المصدر: NASA

37) فلك: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس.

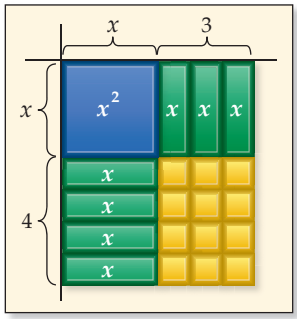
a) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من المجرة المذكورة إلى الأرض؟

b) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من الشمس إلى المريخ إذا كانت المسافة بينهما $2.28 \times 10^{11}\text{m}$؟

38) إذا كان $5^{k+7} = 5^{2k-3}$، فما قيمة k؟

39) ما قيمة k التي تجعل $q^{41} = q^{4k} \cdot q^5$ صحيحة؟

40) تمثيلات متعددة: استعمل النموذج المجاور الذي يمثل حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.



a) هندسيًا: مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طوله في عرضه، أوجد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$ باستعمال النموذج.

b) جبريًا: استعمل طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.

c) لفظيًا: وضِّح كيف يمثّل النموذج كل حدّ في حاصل الضرب.

مسائل مهارات التفكير العليا

41) برهان: وضِّح كيف يمكن برهنة خاصية الأسس السالبة باستعمال خاصيتي قسمة القوى والقوة الصفرية؟

42) تحدٍّ: ما الذي يحدث للمقدار x^{-y} عندما تزداد قيمة y لكل $x > 1, y > 0$؟

43) تبرير: فسّر لماذا تكون العبارة 0^{-2} غير معرَّفة؟

44) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث عبارات مختلفة مكافئة لـ x^{12}.

45) اكتب: وضِّح لماذا تُعد خصائص الأسس مهمة في الفلك؟ وضمّن توضيحك طريقة إيجاد الزمن اللازم لوصول الضوء من مصدرٍ ما إلى أحد الكواكب.

تدريب على اختبار

46) إجابة قصيرة: بسّط المقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$.

47) أيّ مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود $x^3 - x^2 - 2x$؟

A x **B** $x + 1$ **C** $x - 1$ **D** $x - 2$

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (مهارة سابقة)

48) $12ax^3 + 20bx^2 + 32cx$

49) $x^2 + 2x + 6 + 3x$

50) $12y^2 + 9y + 8y + 6$

51) $2my + 7x + 7m + 2xy$

52) $8ax - 6x - 12a + 9$

53) $10x^2 - 14xy - 15x + 21y$

3-4

قسمة كثيرات الحدود
Dividing Polynomials

فيما سبق:
درست قسمة وحيدات الحد. (الدرس 3 - 3)

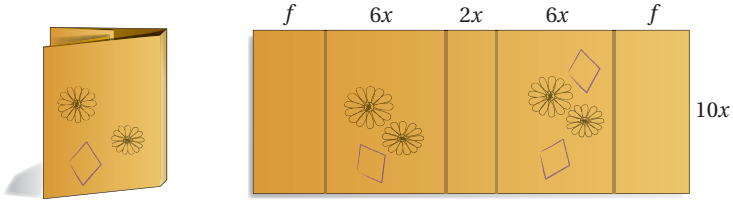
والآن:
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

المفردات:
القسمة التركيبية
Synthetic division

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.



f = عرض الثنية

القسمة الطويلة: تعلمت في الدرس (3 – 3) قسمة وحيدات الحد، لذا يمكنك قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد مستعملًا المهارات نفسها .

مثال 1 قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

بسّط العبارة : $\dfrac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$.

تحقق من فهمك

(1A) $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

(1B) $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$

يمكنك استعمال عملية مشابهة للقسمة الطويلة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى. وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة.

مثال 2 قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

تحقق من فهمك

(2A) $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

(2B) $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:
- اكتب كثيرة الحدود في كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه، بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا حسب درجتها.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني ... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.

قد ينتج باقٍ عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية، فمثلًا عند إيجاد 3 ÷ 11 يكون الناتج 3 والباقي 2، وتكتب عادةً على الصورة $3+\frac{2}{3}$. ويمكنك كتابة نتيجة قسمة كثيرتي حدود مع باقٍ بالطريقة نفسها.

مثال 3 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

A $a + 10 - \frac{19}{3-a}$

B $-a + 10$

C $-a - 10 + \frac{19}{3-a}$

D $-a - 10 - \frac{19}{3-a}$

إرشادات للدراسة

الاختيار من متعدد

يمكنك حذف بعض البدائل عن طريق اختيار قيمة للمتغير a ثم تعويض هذه القيمة في العبارة الأصلية وفي البدائل وإيجاد قيمة كل منها.

تحقق من فهمك

3) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$؟

A $-r - 6 + \frac{13}{1-r}$

B $r + 6$

C $r - 6 + \frac{13}{1-r}$

D $r + 6 - \frac{13}{1-r}$

القسمة التركيبية: **القسمة التركيبية** هي طريقة مبسّطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مفهوم أساسي

القسمة التركيبية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًّا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x-r$، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4: كرر الخطوتين 3 , 2 على ناتج الجمع في الخطوة السابقةحتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

مثال 4 القسمة التركيبية

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم

$2x^3 - 4x^2 + 6$

فاكتبه في صورة

$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$

تحقق من فهمك

4A $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

4B $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

4C $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

4D $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$

ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي الواحد، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية.

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

مثال 5 معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

تحقق من فهمك

(5A) $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

(5B) $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

(5C) $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$

(5D) $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$

تأكد

مثال 1 بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

1) $\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$

2) $(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$

المثالان 2, 4 استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

3) $(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$

4) $(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$

5) $(3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z + 3)$

6) $(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2)$

مثال 3

7) اختيار من متعدد: أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$ ؟

A $-x - 7 + \frac{19}{4 - x}$ B $-x - 7$ C $x + 7 - \frac{19}{4 - x}$ D $-x - 7 - \frac{19}{4 - x}$

مثال 5 استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ مما يأتي :

8) $(10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5)$

9) $(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2)$

10) $\frac{12b^2 + 23b + 15}{3b + 8}$

11) $\frac{27y^2 + 27y - 30}{9y - 6}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

12) $\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$

13) $\frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy}$

14) $\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh}$

15) $\frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab}$

16) $\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2}$

17) $\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2}$

المثالان 2, 4 استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

18) $(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$

19) $(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1)$

20) $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$

21) $(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4)$

22) $\frac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y + 2}$

23) $(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2)$

مثال 3

24) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + x - 6)(2 - x)^{-1}$ ؟

A $x + 3$ B $-x - 1$ C $-x + 1$ D $-x - 3$

مثال 5 استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ مما يأتي :

25) $(6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2)$

26) $\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1}$

27) هندسة: صُمّم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بحيث ترتبط أبعاده بعلاقة معينة بدلالة المتغير x. فإذا كان حجم الصندوق $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$، وارتفاعه $x + 2$، فما عرض قاعدته، وماطولها؟

28) فيزياء: يرتبط فرق جهد التيار V بشدة التيار C، والقوة P بالمعادلة $V = \frac{P}{C}$. فإذا عُبّر عن القوة بالدالة $P(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$ ، وشدة التيار بالمعادلة $C = t + 4$، فاكتب عبارةً تمثل فرق الجهد V.

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي:

29) $(x^4 - y^4) \div (x - y)$

30) $(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd)$

31) $(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-ab)^{-1}$

32) $\frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4}$

33) $\frac{p^3 + 2p^2 - 7p - 21}{p + 3}$

34) $\frac{3z^5 + 5z^4 + z + 5}{z + 2}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتقان - تواصل

35) أعمال: يمكن تقدير عدد النسخ المبيعة من مجلة باستعمال المعادلة $n = \frac{3500a^2}{a^2 + 100}$ ؛ حيث a المبلغ الذي تنفقه المجلة على الإعلان بمئات الريالات، و n عدد النسخ المبيعة من المجلة.

a) أجرِ عملية القسمة المعبر عنها بالمقدار: $\frac{3500a^2}{a^2 + 100}$.

b) كم نسخة بيعت من المجلة إذا أُنفق على الدعاية والإعلان 6000 ريال؟

36) تمثيلات متعددة: افترض أن مساحة مستطيل هي $2x^2 + 7x + 3$، وطوله $2x + 1$.

a) حسيًّا: مثّل الموقف باستعمال البطاقات الجبرية، ثم استعملها لإيجاد عرض المستطيل.

b) رمزيًّا: اكتب عبارةً جبريّةً تمثّل إيجاد عرض المستطيل .

c) جبريًّا: حل المسألة جبريًّا باستعمال القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة، وهل يتفق الحل باستعمال البطاقات الجبرية مع الحل الجبري؟

الربط مع الحياة

فن الإعلان جزء من النشاط الترويجي المتعدد العناصر، ولكنه يتفوق من حيث إمكانية تحقيقه اتصالًا على نطاق واسع جدًا في وقت محدود. ومع التطور التقني تطوّر تصميم وإخراج الدعاية والإعلانات. ومن أنواع الإعلانات: الإعلان المطبوع، الإعلان المباشر، الإعلان الخارجي، الإعلان المسموع/ المرئي، الإعلان التفاعلي.

المصدر: ويكيبيديا
http://ar.wikipedia.org/wiki.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) اكتشف الخطأ: قسّم كلٌّ من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$، فقال خليفة: إن الباقي 26، وقال جمال: إن الباقي -100. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

38) تحدٍّ: إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتجه عن العلاقة بينهما؟

39) تبرير: راجع أحد أسئلة القسمة في هذا الدرس، وبيّن العلاقة بين درجة كل من: المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة.

40) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة تتضمن قسمة كثيرتي حدود، بحيث يكون الباقي 3 .

41) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك.

$5b + 11c - 9ad^2$	$x + 5$	$\frac{5}{x^2}$	$3xy + 6x^2$

42) اكتب: استعن بالمعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، واكتب تعليمات متسلسلة لعمل غلاف لكتاب الرياضيات باستعمال قسمة كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

43) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $(-4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$؟

A $2x^2$ **C** $-10x^2 + 17x$

B $-10x^2$ **D** $2x^2 + 17x$

44) أيُّ كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟

A $x^3 + x^2 - 2x^4$ **C** $x^2 + x + 12^3$

B $-2x^2 - 3x + 4$ **D** $1 + x + x^3$

مراجعة تراكمية

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي: (الدرس 3-3)

45) $4a(2a - 3) + 3a(5a - 4)$ **46)** $(xy)^2(2xy^2z)^3$ **47)** $(3ab^2)^{-2}(2a^2b)^2$

إذا كان $f(x) = 4x + 3, h(x) = -2x^2 - 2x + 4$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

48) $f(-6)$ **49)** $h(3)$ **50)** $f(c)$ **51)** $h(2b + 1)$

بسط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{-81}$

2) $(15-3i)-(4-12i)$

3) i^{37}

4) $\frac{3-i}{2+5i}$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

5) $x^2-8x-9=0$

6) $-4.8x^2+1.6x+24=0$

بسط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

7) $(3x^2y^{-3})(-2x^3y^5)$

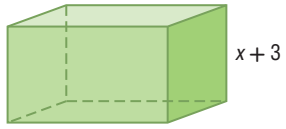
8) $4t(3rt-r)$

9) $\frac{3a^4b^3c}{6a^2b^5c^3}$

10) $\left(\frac{p^2r^3}{pr^4}\right)^2$

11) $(4m^2-6m+5)-(6m^2+3m-1)$

12) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن حجم متوازي المستطيلات في الشكل أدناه هو $6x^3+19x^2+2x-3$، فأيُّ كثيرة حدود فيما يأتي تمثل مساحة قاعدته؟



A $6x^4+37x^3+59x^2+3x-9$

B $6x^2+x+1$

C $6x^2+x-1$

D $6x+1$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة)؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

13) $(4r^3-8r^2-13r+20)\div(2r-5)$

14) $\frac{3x^3-16x^2+9x-24}{x-5}$

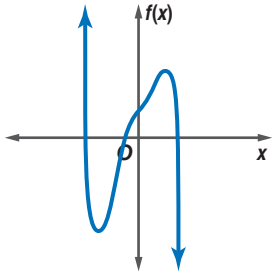
استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $(4x^3-6x^2+6x-3)\div(2x-1)$

16) $(x^4+3x^3-2x^2-4x+10)\div(x+3)$

17) استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:
$(x^2+2x-24)\div(x-4)$

18) صف سلوك طرفي التمثيل البياني الآتي، وحدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية. واذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



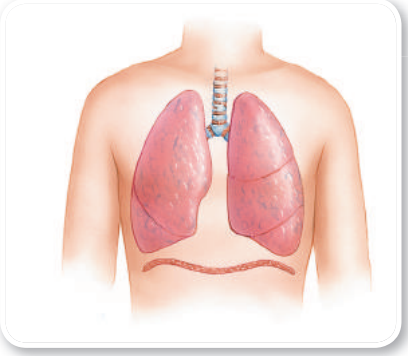
دوال كثيرات الحدود
Polynomial Functions

فيما سبق:
درست تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود.
- أتعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود، وأحدد عدد أصفارها الحقيقية.

المفردات:
كثيرة حدود بمتغير واحد polynomial in one variable
المعامل الرئيس leading coefficient
دالة كثيرة الحدود polynomial function
دالة القوة power function
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior
صفر الدالة zero of a function

www.obeikaneducation.com



لماذا؟
يمكن تمثيل حجم الهواء في رئتي الإنسان خلال دورة تنفس مدتها 5 ثوان بالدالة: $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$، حيث v الحجم باللترات، t الزمن بالثواني. وهذه الدالة مثال على دالة كثيرة حدود.

دوال كثيرات الحدود: **كثيرة الحدود بمتغير واحد** هي عبارة جبرية على الصورة: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$، n عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا، ودرجة كثيرة الحدود هي أسّ المتغير ذي أكبر أسّ فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

كثيرة الحدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x - 9$	1	4
التربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$	n	a_n

مثال 1 درجة كثيرة الحدود ومعاملها الرئيس

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

a $8x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3$

b $12x^2 - 3xy + 8x$

c $3x^4 + 6x^3 - 4x^8 + 2x$

تحقق من فهمك

1A $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$ **1B** $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$ **1C** $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد ، فمثلًا $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ دالة كثيرة حدود تكعيبية. وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود على الصورة $f(x) = ax^b$، حيث a عدد حقيقي، b عدد صحيح غير سالب، وتُسمى عندئذٍ **دوال القوة**.

إذا علمت عنصرًا في مجال دالة كثيرة حدود، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

الربط مع الحياة

تصل سعة الرئة لدى الشخص البالغ السليم إلى 6 لترات تقريبًا.

المصدر: Family Practic Notebook

مثال 2 من واقع الحياة
إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود

التنفس: ارجع إلى الفقرة في بداية الدرس، وأوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتان.

تحقق من فهمك

2) تنفس: أوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 4 ثوانٍ.

يمكنك إيجاد قيم الدوال عند متغيرات وعبارات جبرية.

مثال 3
قيمة دالة كثيرة الحدود عند متغير

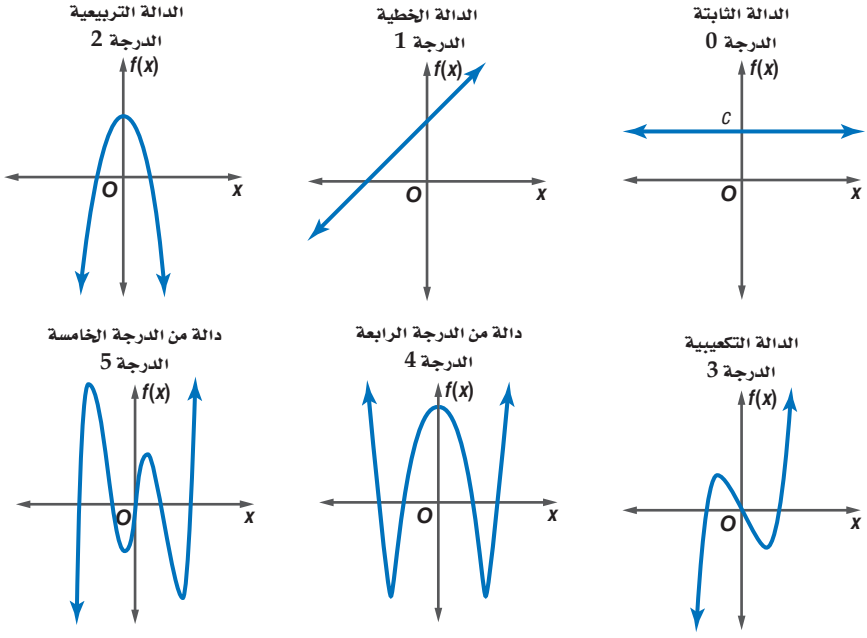
إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x - 3$، فأوجد: $f(3c - 4) - 5f(c)$.

تحقق من فهمك

3A) إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$.

3B) إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$، فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$.

التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود: إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر أكبر عدد من المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.



مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ويُحدد **سلوك طرفي التمثيل البياني** للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$، أو سالب المالانهاية $(x \to -\infty)$ بكل من: درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيس لها.

قراءة الرياضيات

الرمزان $+\infty$, $-\infty$

نعبر عن التزايد غير المحدود لقيم المتغير x، باستعمال الرمز $+\infty$ ويُقرأ ما لا نهاية ويُكتب $x \to +\infty$، كما نعبر عن التناقص غير المحدود لقيم المتغير x، باستعمال الرمز $-\infty$ ويُقرأ سالب ما لا نهاية ويُكتب $x \to -\infty$.

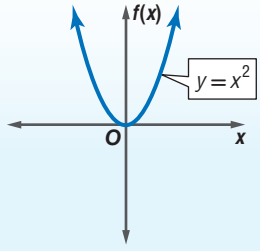
مفهوم أساسي

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

أضف إلى مطويتك

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: موجب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .

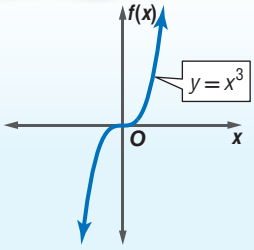
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في الاتجاه نفسه)

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: موجب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

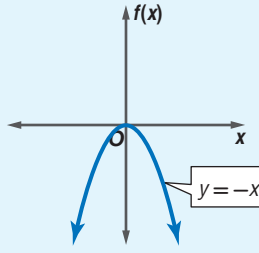
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في اتجاهين مختلفين)

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: سالب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى

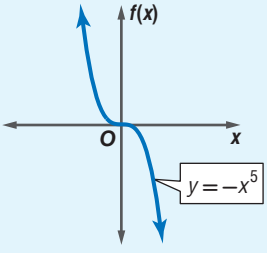
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في الاتجاه نفسه)

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: سالب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

سلوك طرفي التمثيل البياني: (في اتجاهين مختلفين)

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفَي التمثيل البياني

المعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني.

صفر الدالة هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x، لذا فإنه يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها. تذكّر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار؛ ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار.

إرشادات للدراسة

الصفر المكرر

عندما يمس التمثيل البياني المحور x، يكون للدالة صفران متساويان (صفر مكرر).

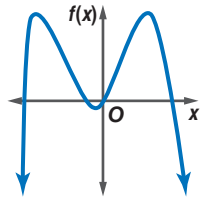
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

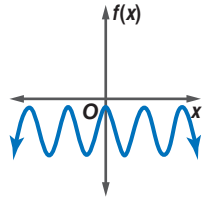
أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة

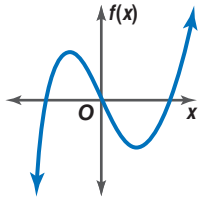


لها 4 أصفار حقيقية

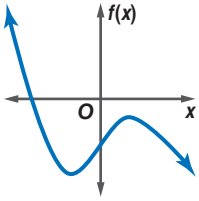


ليس لها أصفار حقيقية

كثيرتا حدود فرديتا الدرجة



لها 3 أصفار حقيقية



لها صفر واحد حقيقي

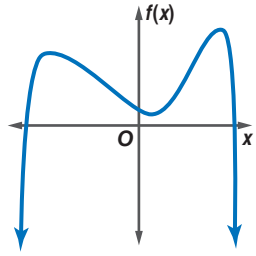
مثال 4

وصف دالة كثيرة الحدود من تمثيلها البياني

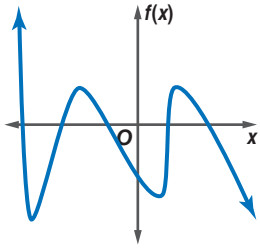
أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(a

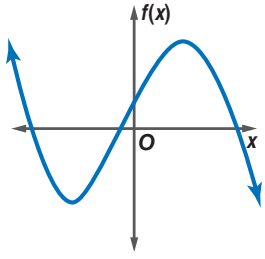


(b

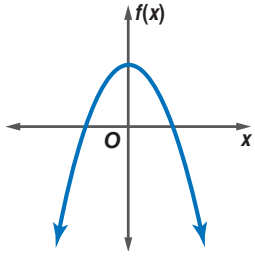


تحقق من فهمك

(4A



(4B



تأكد

مثال 1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

2) $-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22$

3) $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

4) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$

مثال 2 أوجد $w(-4), w(5)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

5) $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$

6) $w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

مثال 3 إذا كانت $d(x) = 3x^2 + 6x - 10$ ، $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

7) $c(y^3)$

8) $-4[d(3z)]$

9) $6c(4a) + 2d(3a - 5)$

10) $-3c(2b) + 6d(4b - 3)$

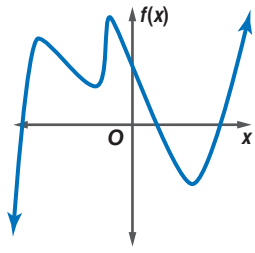
مثال 4 أجب عن الفروع a – c لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

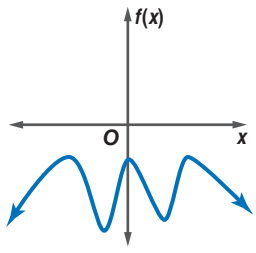
b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

11)



12)



تمارين ومسائل

مثال 1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

13) $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$

14) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$

15) $8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9$

16) $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$

17) $13b^3 - 9b + 3b^5 - 18$

18) $(5 - 2y)(4 + 3y)$

19) $6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2$

20) $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$

مثال 2 أوجد $p(3), p(-6)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

21) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

22) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24$

23) $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$

24) $p(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2$

مثال 3 إذا كانت $d(x) = -x^3 + x + 1$ ، $c(x) = 2x^2 - 4x + 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

25) $c(3a)$

26) $5d(2a)$

27) $c(b^2)$

28) $d(4a^2)$

29) $d(4y - 3)$

30) $c(y^2 - 1)$

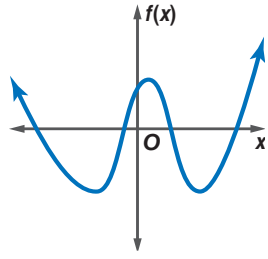
مثال 4 أجب عن الفروع من a–c لكل التمثيلات البيانية الآتية:

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

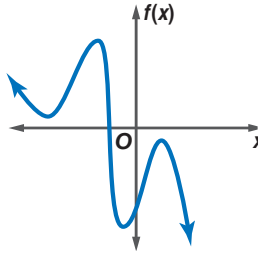
b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

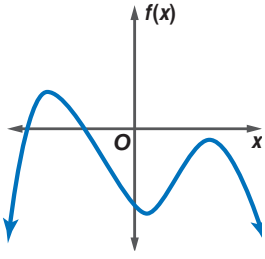
(31



(32



(33



(34 فيزياء: تعطى الطاقة الحركية KE بالجول لجسم متحرك كتلته m kg بالدالة $KE(v) = 0.5mv^2$، حيث تمثل v سرعة الجسم بالأمتار لكل ثانية. أوجد الطاقة الحركية لعربة كتلتها 171 kg تسير بسرعة $11m/s$.

أوجد $f(8), f(-2)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

(35 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2$

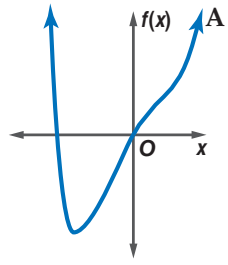
(36 $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18$

(37 $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 6x$

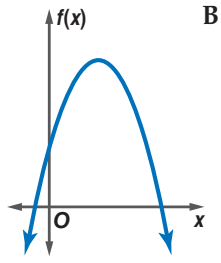
(38 $f(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 10$

حدّد التمثيل البياني المناسب لكل دالة في الأسئلة (39–42) مستعملًا درجة كثيرة الحدود وسلوك طرفي التمثيل البياني لها.

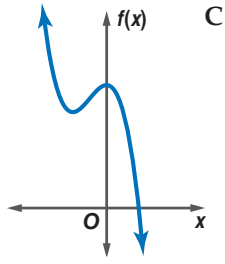
A



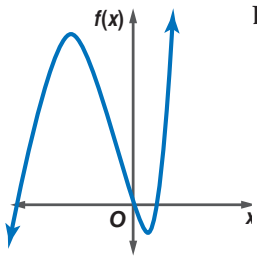
B



C



D



(39 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

(40 $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$

(41 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$

(42 $f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$

إذا كانت $d(x) = 4x^2 - 6x + 8$, $c(x) = x^3 - 2x$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(43 $3c(a-4) + 3d(a+5)$

(44 $-2d(2a+3) - 4c(a^2+1)$

(45 $5c(a^2) - 8d(6-3a)$

(46 $-7d(a^3) + 6c(a^4+1)$

(47 ملابس: تُمثل أرباح مصنع للملابس بدالة كثيرة الحدود $w(x) = -x^4 + 40x^2 - 144$، حيث x عدد قطع الملابس المبيعة بالألوف، و$w(x)$ ربح المصنع بألوف الريالات.

a) أنشئ جدولًا لتمثيل الدالة بيانيًّا، ثم مثِّلها (استعمل قيم x التالية: $-7, -6, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 6, 7$).

b) أوجد أصفار الدالة.

c) بين أي قيمتين يجب أن يبيع المصنع من قطع الملابس ليحقق ربحًا.

d) وضّح لماذا أُخذ صفران فقط بعين الاعتبار في الفرع c.

الربط مع الحياة

فن صناعة تصميم الملابس يعتمد على العلم والجمال، ويقوم على عدة عناصر تتكامل من حيث الخط والشكل واللون والنسيج، وتتناسق من حيث التصميم والابتكار ليحصل الفرد في النهاية على زي يُشعره بالتناسق، ويراعى مراحل ترتيب قياسية في مراحل إنتاج الملابس الجاهزة. وتنتج الملابس من الألياف الصناعية بجانب الألياف الطبيعية والمخلوطة ذات الطبيعة الخاصة.

المصدر: ويكيبيديا: تصميم الملابس http://ar.wikipedia.org/wiki.

48) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)(x+4)$.

a) تحليليًا: حدد المقطع x والمقطع y والجذور، ودرجة الدالة $g(x)$، وصف سلوك طرفي تمثيلها البياني.

b) جبريًا: اكتب الدالة بالصيغة القياسية.

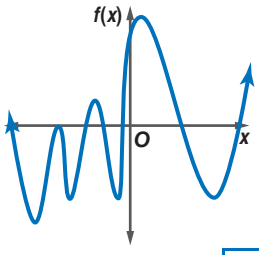
c) جدوليًا: أنشئ جدولًا لتمثيل الدالة بيانيًا، ثم مثّلها.

d) بيانيًا: مثّل الدالة بيانيًا بتعيين نقاط، والتوصيل بينها بمنحنى.

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة فيما يأتي:

49) $f(x) = -5x^4 + 3x^2$ **50)** $g(x) = 2x^5 + 6x^4$ **51)** $h(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x$

مسائل مهارات التفكير العليا



52) **اكتشف الخطأ:** حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ماجد

يوجد 8 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x 7 مرات، وأحد الجذور مكرر مرتين.

بدر

يوجد 7 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x سبع مرات.

53) **تحدٍّ:** إذا كانت $g(x)$ من عوامل $f(x)$، وكانت درجة $f(x)$ تساوي 5، ومعاملها الرئيس موجبًا، وكانت درجة $g(x)$ تساوي 3 ومعاملها الرئيس موجبًا، فصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$، وفسّر إجابتك.

54) **مسألة مفتوحة:** مثّل بيانيًا كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها 8، وأحدها مكرر مرتين.

55) **اكتب:** صف المقصود بسلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود، وكيف يتم تحديده؟

تدريب على اختبار

56) ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟

A -11 **B** 1 **C** -1 **D** 11

57) إذا كان $i = \sqrt{-1}$ ، فإن $5i(7i)$ يساوي :

A 70 **B** 35 **C** -35 **D** -70

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي : (الدرس 4-3)

58) $\frac{16x^4y^3 + 32x^6y^5z^2}{8x^2y}$ **59)** $\frac{18ab^4c^5 - 30a^4b^3c^2 + 12a^5bc^3}{6abc^2}$ **60)** $\frac{18c^5d^2 - 3c^2d^2 + 12a^5c^3d^4}{3c^2d^2}$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها : (الدرس 3-3)

61) $8x^2 + 5x^4 - 6x + 4$ **62)** $9x^4 + 12x^6 - 16$ **63)** $3x^4 + 2x^2 - x^{-1}$

حل كلًّا من المعادلات الآتية مستعملًا القانون العام لحل المعادلة التربيعية: (الدرس 3-2)

64) $x^2 - x - 3 = 0$ **65)** $x + x^2 + 1 = 0$ **66)** $x^2 - 13x + 12 = 0$

3-6

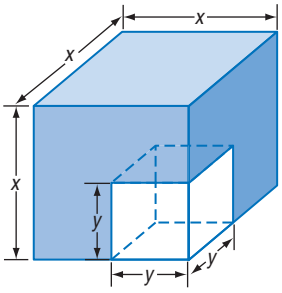
حل معادلات كثيرات الحدود
Solving Polynomial Equations

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.
(الدرس 2 - 3)

والآن:
- أحلّل كثيرات الحدود.
- أحلّ معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

المفردات
كثيرة حدود أولية
prime polynomial
الصورة التربيعية
quadratic form

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطي حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية $x^3 - y^3$ كما في مثال 4.

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقًا أنه يمكنك تحليل كثيرات الحدود التربيعية تمامًا كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكنك تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية بقوانين خاصة.

مفهوم أساسي مجموع مكعبين والفرق بينهما

أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

مثال 1 مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $16x^4 + 54xy^3$

b) $8y^3 + 5x^2$

تحقق من فهمك

1A) $5y^4 - 320yz^3$

1B) $-54w^4 - 250wz^3$

إرشادات للدراسة

التحليل التام لكثيرات الحدود
يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حللت إلى أقصى درجة ممكنة.

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولًا عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد ما إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملًا واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال 2

التحليل بتجميع الحدود

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

b) $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: للتحقق من صحة إجابتك، اضرب العوامل لتتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

تحقق من فهمك

2A) $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

2B) $13ax + 18bz - 15by - 14az$

تُعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الأساسية لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر، أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكنك تحليلها اعتمادًا على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه .

مثال 3 التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $x^6 - y^6$

b) $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

إرشادات للدراسة

التحليل باستعمال الفرق بين مكعبين:

في مثال $3a$، إذا بدأت بالتحليل على اعتبار أن كثيرة الحدود المعطاة فرق بين مكعبين؛ فإنك تحصل على التحليل التالي:

$(x^2-y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

وهو تحليل غير تام ويصعب إتمامه.

إرشادات للدراسة

تجميع 6 حدود أو أكثر

جمّع الحدود التي بينها أكبر عدد من العوامل المشتركة.

تحقق من فهمك

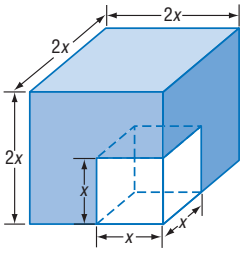
3A) $a^6 + b^6$

3B) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

حل معادلات كثيرات الحدود: يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية.

مثال 4 من واقع الحياة حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل

هندسة: ارجع إلى فقرة لماذا في بداية هذا الدرس. إذا كان طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 7000cm^3، فما بُعدا المكعبين؟



تحقق من فهمك

4) **هندسة:** إذا كان طول حرف المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 3250cm^3، فأوجد بُعدي المكعبين.

تستطيع أحيانًا أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلًا بفرض أن $u = x^2$، يمكنك كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$.
وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على **الصورة التربيعية**.

مفهوم أساسي — الصورة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: au^2+bu+c ، $a\neq0$ ، a,b,c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

مثال 5 — كتابة عبارات في الصورة التربيعية

اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين في الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

a) $150n^8 + 40n^4 - 15$

b) $y^8 + 12y^3 + 8$

تحقق من فهمك

5A) $x^4 + 5x + 6$

5B) $8x^4 + 12x^2 + 18$

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية
لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ u بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصًا بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لايمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 6 — حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

حل المعادلة: $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$.

تحقق من فهمك

6A) $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$

6B) $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

تأكد

الأمثلة 1-3 حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

1) $3ax + 2ay - az + 3bx$

2) $16g^3 + 2h^3$

3) $12qw^3 - 12q^4$

4) $a^6x^2 - b^6x^2$

5) $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

6) $8c^3 - 125d^3$

مثال 4 **7) إنشاءات:** صنع أنس ممرًّا خشبيًّا عرضه x ft حول بركة مستطيلة الشكل. فإذا كان طول البركة 40ft وعرضها 30 ft، ومساحتها مع الممر 2000ft^2، فما عرض الممر الخشبي؟

مثال 5 اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

8) $4x^6 - 2x^3 + 8$

9) $25y^6 - 5y^2 + 20$

مثال 6 حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

10) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

11) $y^4 - 18y^2 + 72 = 0$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

12) $8c^3 - 27d^3$

13) $64x^4 + xy^3$

14) $a^8 - a^2b^6$

15) $x^6y^3 + y^9$

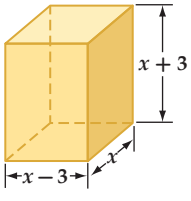
16) $gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2$

17) $18x^6 + 5y^6$

18) $8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2y^3 + 200x^3 - 10xy^3$

19) $12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2$

مثال 4 **20) هندسة:** إذا كان حجم المجسم المجاور يساوي $55x\text{cm}^3$ حيث $x > 0$، فأوجد كلًّا من قيمة x، وطول قاعدته وعرضها، وارتفاعه.



مثال 5 اكتب كلَّ عبارة مما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

21) $x^4 + 12x^2 - 8$ **22)** $-15x^4 + 18x^2 - 4$ **23)** $8x^6 + 6x^3 + 7$

24) $5x^6 - 2x^2 + 8$ **25)** $9x^8 - 21x^4 + 12$ **26)** $16x^{10} + 2x^5$

مثال 6 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

27) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ **28)** $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$ **29)** $4x^4 - 14x^2 + 12 = 0$

30) $9x^4 - 27x^2 + 20 = 0$ **31)** $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$ **32)** $24x^4 + 14x^2 - 3 = 0$

حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

33) $x^4 - 625$ **34)** $x^6 - 64$ **35)** $x^5 - 16x$ **36)** $8x^5y^2 - 27x^2y^5$

37) $15ax - 10bx + 5cx + 12ay - 8by + 4cy + 15az - 10bz + 5cz$

38) $6a^2x^2 - 24b^2x^2 + 18c^2x^2 - 5a^2y^3 + 20b^2y^3 - 15c^2y^3 + 2a^2z^2 - 8b^2z^2 + 6c^2z^2$

39) $6x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 54x^3 + 99x^2 + 90x$

40) $20x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 500x^4 + 175x^3 + 150x^2$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

41) $x^4 + x^2 - 90 = 0$ **42)** $x^4 - 16x^2 - 720 = 0$ **43)** $x^4 - 7x^2 - 44 = 0$

44) $x^4 + 6x^2 - 91 = 0$ **45)** $x^3 + 216 = 0$ **46)** $64x^3 + 1 = 0$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

47) $8x^4 + 10x^2 - 3 = 0$ **48)** $6x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

49) $20x^4 - 53x^2 + 18 = 0$ **50)** $18x^4 + 43x^2 - 5 = 0$

51) $8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$ **52)** $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$

53) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ **54)** $4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0$

55) $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$ **56)** $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$

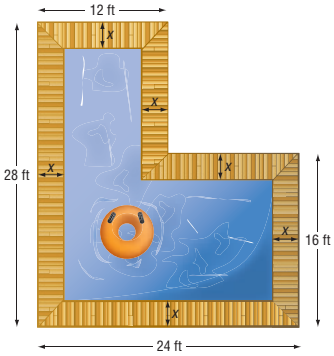
57) هندسة: منشور متوازي مستطيلات أبعاده $x - 2, x - 4, x - 6$ ، وحجمه $40x$ وحدة مكعبة.

a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم المنشور.

b) حل المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل.

c) هل هناك قيم غير مقبولة للمتغير x عند حل المعادلة؟ وضِّح إجابتك.

d) ما أبعاد المنشور؟



58) تصميم: يريد سليمان أن يبني بركة سباحة وفق التصميم المجاور، حيث يحيط بها ممر خشبي بعرض ثابت.

a) إذا كانت مساحة البركة فقط 336ft^2، فما قيمة x؟

b) إذا أصبحت قيمة x مثليها وذلك بتقليل مساحة البركة، فما المساحة الجديدة للبركة؟

c) إذا نصفت قيمة x بزيادة مساحة البركة، فما مساحة البركة فقط عندئذٍ؟

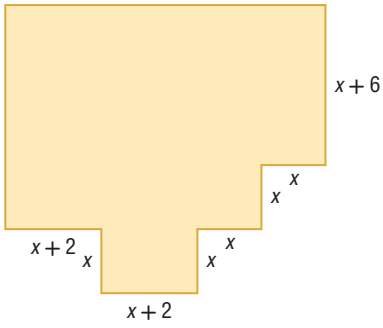
59) أحياء: قدّر حسام عدد الفيروسات في إحدى التجارب بالدالة: $P(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$، حيث t الزمن بالساعات، $P(t)$ عدد الفيروسات. فإذا أراد حسام أن يحدد الزمن الذي يصبح فيه عدد الفيروسات 8000 فيروس.

a) فأوجد قيمة t باستعمال التحليل إلى العوامل.

b) كيف أجريت عملية التحليل إلى العوامل؟

c) ماقيم t المقبولة؟ وما القيم غير المقبولة؟ وضِّح إجابتك.

60) تصميم المباني: يمثل الشكل المجاور مخطط شقة سكنية.



a) اكتب دالة بدلالة المتغير x تمثل مساحة الشقة.

b) إذا كانت مساحة الشقة 1366ft^2، فما قيمة x؟

حلّل كلَّ كثيرة حدود فيما يأتي تحليلًا تامًّا. وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

61) $x^6 - 4x^4 - 8x^4 + 32x^2 + 16x^2 - 64$ **62)** $y^9 - y^6 - 2y^6 + 2y^3 + y^3 - 1$

63) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

64) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 32ft و 40ft، تم توسعتها لتصبح مساحتها 4.5 أمثال مساحتها الأصلية بزيادة كل من طولها وعرضها بالمقدار نفسه.

a) ارسم شكلًا يمثل الموقف.

b) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل المساحة الجديدة، وحلها بالتحليل إلى العوامل.

c) مثّل الدالة بيانيًّا. **d)** ما الحل غير المقبول؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

65) تحد: حلّل المقدار $36x^{2n} + 12x^n + 1$ إلى عوامله.

66) تبرير: أعط مثالًا مضادًا للعبارة: $a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

67) مسألة مفتوحة: إذا كانت الصورة التكعيبية لمعادلة هي: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$، فاكتب معادلة من الدرجة السادسة يمكن كتابتها على الصورة التكعيبية.

68) اكتب: وضِّح كيف يمكن أن يساعدك تمثيل دالة كثيرة حدود بيانيًّا على تحليلها؟

تدريب على اختبار

69) إجابة قصيرة حل المعادلة: $x^3 + 27 = 0$.

70) إذا كان الفرق الموجب بين العددين k, $\frac{1}{12}$ مساويًا للفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$، فما قيمة k ؟

A $\frac{1}{60}$ **B** $\frac{1}{20}$ **C** $\frac{1}{15}$ **D** $\frac{13}{60}$

مراجعة تراكمية

حدّد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: (الدرس 3-5)

71) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x$ **72)** $f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 9$ **73)** $f(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7$

74) كهرباء: دائرة كهربائية تتكون من جزأين موصولين على التوالي؛ معاوقة الأول $4j + 3$ أوم، ومعاوقة الثاني $6j - 2$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لتجد المعاوقة الكلية لهذه الدائرة. (الدرس 3-1)

اقسم كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-4)

75) $(x^2 + 6x - 2) \div (x + 4)$ **76)** $(2x^2 + 8x - 10) \div (2x + 1)$ **77)** $(8x^3 + 4x^2 + 6) \div (x + 2)$

حل متباينات كثيرات الحدود

الهدف استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لإيجاد حلول تقريبية لمتباينة كثيرة الحدود.

يمكنك استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لحل متباينات كثيرات الحدود.

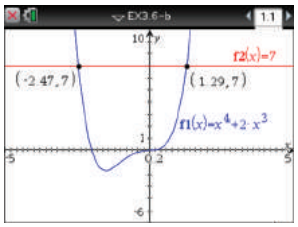
نشاط

حل المتباينة $x^4 + 2x^3 \le 7$

الطريقة 1 : تمثيل المعادلات المرتبطة بكل طرف بيانيًا بشكل منفصل .

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on ثم اختر 1 مستند جديد
- اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية ، واكتب في الطرف الأيسر $x^4 + 2x^3$ بجانب $f1(x) =$، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح tab؛ لكتابة الطرف الأيمن 7 بجانب $f2(x) =$ ، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
  ملاحظة: تدريج الآلة المعتاد على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ وحتى يظهر التمثيل للمعادلة $f2(x) = 7$ ، قم بالضغط على مفتاح menu واختر 4: تكبير/تصغير النافذة ومنها اختر 1: إعدادات النافذة... ؛ لتحديد التدريج المناسب لكل من x, y
- حدد نقاط التقاطع من خلال الضغط على مفتاح menu ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر منها 4 : نقاط التقاطع ، وقم بالضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع لتظهر نقطة التقاطع، كرّر ذلك مع نقطة التقاطع الثانية فيكون الحل هو :
  $-2.47 \le x \le 1.29$ تقريبًا.



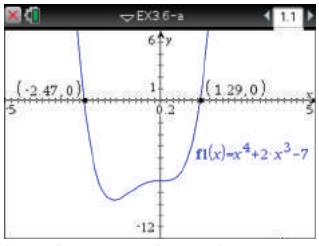
[−5, 5] scl: 0.2 by [−6, 10] scl: 1

الطريقة 2 : تمثيل المعادلة المرتبطة بعد مساواتها بالصفر بيانيًا.

$$x^4 + 2x^3 = 7 \longrightarrow x^4 + 2x^3 - 7 = 0$$

الخطوات:

- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية .
- اكتب المعادلة المرتبطة $x^4 + 2x^3 - 7$ ، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
  ملاحظة: اختر التدريج المناسب.
- حدد أصفار المعادلة من خلال الضغط على مفتاح menu ، ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ، ثم اختر منها 1: أصفار الدالة ، وقم بالضغط في أي نقطة من الشاشة مرورًا بنقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور x فيظهر صفر الدالة،كرّر ذلك مع النقطة الأخرى، ستظهر إحداثيات صفري الدالة، فيكون الحل هو : $-2.47 \le x \le 1.29$ تقريبًا.



[−5, 5] scl: 0.2 by [−12, 6] scl: 1

تمارين:

حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة :

1) $\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x \ge -9$

2) $x^3 - 9x^2 + 27x \le 20$

3) $x^3 + 1 \ge 4x^2$

4) $x^6 - 15 \le 5x^4 - x^2$

5) $\frac{1}{2}x^5 \ge \frac{1}{5}x^2 - 2$

6) $x^8 < -x^7 + 3$

7) $x^4 - 15x^2 > -24$

8) $x^3 - 6x^2 + 4x < -6$

9) $x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0$

نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factor Theorems

فيما سبق:
درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية.
(الدرس 3 - 3)

والآن:
- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أستعمل التعويض التركيبي لأحدّد ما إذا كانت ثنائية حدٍّ عاملًا من عوامل كثيرة حدود أم لا.

المفردات:
نظرية الباقي
Remainder Theorm
التعويض التركيبي
synthetic substitution
نظرية العوامل
Factor Theorm

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

قدّر صاحب بقالة أرباحه السنوية بالدالة: $S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، حيث x عدد السنوات منذ العام 1418هـ، وتمثل $S(x)$ قيمة الأرباح بمئات الريالات.

يمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير الأرباح في العام 1438هـ، بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

التعويض التركيبي: يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x-3 \overline{)\,-3x^2 + 5x + 4} \\ (-)\ -3x^2 + 9x \\ \hline -4x + 4 \\ (-)\ \ -4x + 12 \\ \hline -8 \end{array}$$

الطريقة 2: القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & -3 & 5 & 4 \\ & & -9 & -12 \\ \hline & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8، وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$ عوّض العدد 3 بدلًا من x

$= -27 + 15 + 4$ اضرب

$= -8$ بسّط

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضِّح **نظرية الباقي**.

مفهوم أساسي — **نظرية الباقي**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$، وكذلك:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x - r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

إن عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية تسمى **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيم دوال كثيرات الحدود، خصوصًا عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 1 التعويض التركيبي

إذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$، فأوجد $f(4)$ باستعمال التعويض التركيبي.

تحقق من فهمك

1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$.

1B) إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $g(-1)$.

يمكنك استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي تكون فيها حسابات التعويض المباشر معقدة.

مثال 2 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة

مبيعات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. ما قيمة الأرباح في العام 1438 هـ؟

تحقق من فهمك

2) مدارس: يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى المناطق منذ عام 1427 هـ، حيث تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلاب بالعشرات، قدّر عدد طلاب المنطقة عام 1439 هـ.

عوامل كثيرات الحدود: تبيّن القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

$$\underbrace{2x^3 - 3x^2 - 17x + 30}_{\text{المقسوم}} = \underbrace{(2x^2 - 9x + 10)}_{\text{ناتج القسمة}} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{\text{المقسوم عليه}} + \underbrace{0}_{\text{الباقي}}$$

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضِّح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي — **نظرية العوامل**

أضف إلى مطويتك

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة.

مثال 3 — **استعمال نظرية العوامل**

حدّد ما إذا كان $x - 5$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطًا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملا كثيرة الحدود $x^3 + x^2 - x + 15$ هما $x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

تحقق من فهمك

3) حدد ما إذا كان $x - 2$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

تأكد

مثال 1 أوجد $f(-2)$, $f(4)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$

2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$

مثال 2

3) جوارح: يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390 هـ، فما العدد التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1438 هـ؟

مثال 3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى، حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$

5) $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$

6) $3x^3 + 10x^2 - x - 12; x - 1$

7) $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15; x + 3$

تمارين ومسائل

مثال 1 أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

8) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

9) $f(x) = x^2 - 8x + 6$

10) $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 12$

11) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$

12) $f(x) = x^3 - 5x + 2$

13) $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15$

14) $f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$

15) $f(x) = x^4 - 6x - 8$

مثال 2

16) وقود: يقدر استهلاك سيارة للوقود (بالميل لكل جالون) وفقًا للدالة $f(x) = 0.00000056x^4 - 0.000018x^3 - 0.016x^2 + 1.38x - 0.38$، حيث x سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة. حدد استهلاك السيارة للوقود إذا سارت بالسرعات الآتية 40mi/h, 50mi/h, 60mi/h.

مثال 3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى. حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

17) $x^3 - 3x + 2; x + 2$

18) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16; x + 2$

19) $x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$

20) $x^3 - x^2 - 5x - 3; x - 3$

21) $2x^3 + 17x^2 + 23x - 42; x - 1$

22) $2x^3 + 7x^2 - 53x - 28; x - 4$

23) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3; x - 1$

24) $x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 2$

25) $6x^3 - 25x^2 + 2x + 8; 2x + 1$

26) $16x^5 - 32x^4 - 81x + 162; 2x - 3$

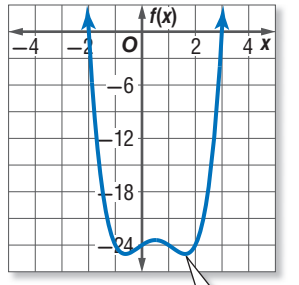
27) زوارق: تحرك زورق بخاري من السكون في اتجاه معاكس للأمواج، فإذا كانت سرعته بالأقدام لكل ثانية تعطى بالدالة $f(t) = -0.04t^4 + 0.8t^3 + 0.5t^2 - t$، حيث t الزمن بالثواني.

a) فأوجد سرعة الزورق بعد مرور زمن: 1s, 2s, 3s.

b) إذا استغرق الزورق، 6s ليقطع المسافة بين عوامتين، فأوجد $f(6)$ مستعملاً التعويض التركيبي، ووضِّح ماذا يعني ذلك.

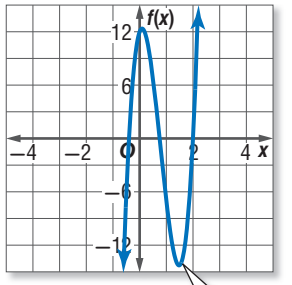
استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

28)



$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

29)



$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

30) **تمثيلات متعددة:** لتكن الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$.

a) جبريًا: إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل هذه الدالة، فأوجد كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة هذه الدالة على $(x - 2)$.

b) جدوليًا: كوّن جدول قيم لكثيرة الحدود التي وجدتها في الفرع "a" حيث $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

c) تحليليًا: اعتمادًا على جدول القيم الذي كوَّنته، ما الاستنتاجات التي يمكن أن نتوصل إليها حول بقية عوامل الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$؟ وضِّح إجابتك.

d) بيانيًا: مثّل الدالة الأصلية بيانيًّا لتؤكد الاستنتاجات التي توصلت إليها.

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كلٍّ مما يأتي يساوي 3:

31) $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

32) $(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$

33) $(x^2 + 5x + 7) \div (x - k)$

34) $(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$

تنبيه!

التعويض التركيبي

تذكر أنه في التعويض التركيبي يتم قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد على الصورة $(x - a)$. وفي هذه الحالة استعمل a، وإذا كانت ثنائية الحد على الصورة $(x + a)$، فاستعمل $-a$.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أوجد حلول كل من المعادلتين:

35) $(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 4) - 2 = 0$

36) $(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0$

37) تبرير: إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

a) الباقي يساوي صفرًا؟

b) الباقي يساوي 1؟

c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفرًا؟

38) مسألة مفتوحة: اكتب دالة تكعيبية يكون باقي قسمتها على $x - 2$ يساوي 8، وباقي قسمتها على $x - 3$ يساوي -5.

39) اكتب: وضِّح لماذا تعد نظرية العوامل حالة خاصة من نظرية الباقي؟

تدريب على اختبار

40) أيٌّ مما يأتي هو تحليل للعبارة $27x^3 + y^3$ ؟

A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

41) ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 - i)(4 + i)$؟

A 15 **C** 17

B $16 - i$ **D** $17 - 8i$

مراجعة تراكمية

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي: (الدرس 2-3)

42) $x^4 - 4x^2 - 21 = 0$

43) $x^4 - 6x^2 = 27$

44) $4x^4 - 8x^2 - 96 = 0$

حُلَّ كلًّا من النظامين الآتيين بيانيًّا: (مهارة سابقة)

45) $y=3x-1$
$y=-2x+4$

46) $3x+2y=8$
$-4x+6y=11$

إذا كان $c(x) = x^2 - 2x$, $d(x) = 3x^2 - 6x + 4$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

47) $c(a + 2) - d(a - 4)$

48) $c(a-3)+d(a+1)$

49) $c(-3a) + d(a + 4)$

50) $3d(3a)-2c(-a)$

51) $c(a) + 5d(2a)$

52) $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توظيف

3-8

الجذور والأصفار
Roots and Zeros

فيما سبق:
درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية.
(الدرس 2 - 3)

والآن:
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية للدالة.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.

المفردات:
النظرية الأساسية في الجبر
Fundamental Theorem of Algebra

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالةَ:
$g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$،
لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات، حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.
ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

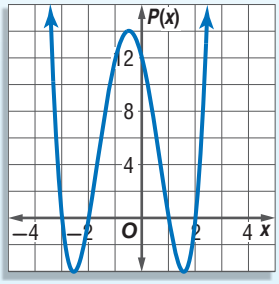
أنواع الجذور تعلمت سابقًا أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًّا تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x.

ملخص المفهوم
الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:
- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x.

مثال: افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$
وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي: $-3, -2, 1, 2$
وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$
ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

مفهوم أساسي
النظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى مطويتك

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

مثال 1 تحديد عدد الجذور وأنواعها

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $x^3 + 25x = 0$

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا.

تحقق من فهمك

1A) $x^3 + 2x = 0$ **1B)** $x^4 - 16 = 0$ **1C)** $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

اختبر حُلَّ كلَّ معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

مفهوم أساسي **نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

وبالمثل دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار المركبة.

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت

(1596 – 1650 م)، فيلسوف، ورياضي، وفيزيائي فرنسي، يلقب بـ"أبو الفلسفة الحديثة". له تأثير واضح في علم الرياضيات؛ فقد اخترع نظامًا رياضيًا شكّل أساس الهندسة التحليلية سمّي باسمه وهو نظام الإحداثيات الديكارتية.

مثال 2

إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية لدالة

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$.

تنبيه!

أصفار الدوال

لن تناقش الحالة التي يكون فيها الحد الثابت مساويًا للصفر في هذا الدرس.

تحقق من فهمك

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة.
$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$.

تعلمت سابقًا أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائمًا، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلًا إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$، فإنك تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نظرية الأصفار المركبة المترافقة

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

مثال 3

استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 5 - i$ من أصفارها .

إرشادات للدراسة

استعمال الأصفار لكتابة الدالة

إن أي دالة على الصورة $f(x)=a(x^3-9x^2+16x+26)$، (حيث a عدد صحيح لا يساوي الصفر)، تحقق المعطيات الواردة في المثال 3، ولكن اعتبر أن $a = 1$ للتسهيل فقط.

تحقق من فهمك

3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 1 + 2i$ من أصفارها.

تأكد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

2) $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$

3) $16x^4 - 81 = 0$

4) $0 = x^3 - 8$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي :

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

6) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7$

7) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4$

8) $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

9) $4, -1, 6$

10) $3, -1, 1, 2$

11) $-2, 5, -3i$

12) $-4, 4 + i$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

13) $4x^2 + 1 = 0$

14) $2x^2 - 5x + 14 = 0$

15) $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

16) $8x^3 - 27 = 0$

17) $16x^4 - 625 = 0$

18) $x^3 - 6x^2 + 7x = 0$

19) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

20) $x^5 + 2x^3 + x = 0$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي :

21) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

22) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$

23) $f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$

24) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$

25) $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24$

26) $f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36$

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

27) $5, -2, -1$

28) $-4, -3, 5$

29) $-1, -1, 2i$

30) $-3, 1, -3i$

31) $0, -5, 3 + i$

32) $-2, -3, 4 - 3i$

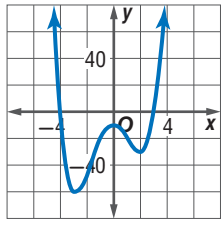
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

a) $-3, 4, i, -i$

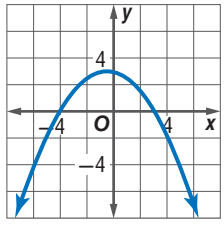
b) $-4, 3$

c) $-4, 3, i, -i$

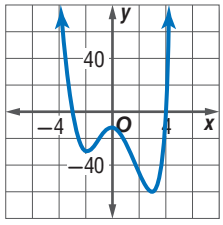
33)



34)

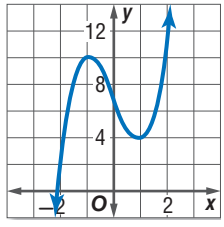


35)



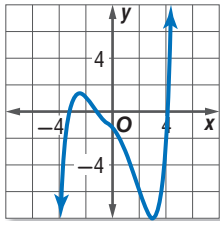
حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ من الدالتين الممثلتين بيانيًّا فيما يأتي، ووضِّح إجابتك:

36)



الدرجة : 3

37)



الدرجة : 5

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **مسألة مفتوحة:** في كل مما يأتي، مثِّل بيانيًّا دالة كثيرة حدود بحيث يكون لها :

a) 3 أصفار حقيقية وصفران تخيليان **b)** 4 أصفار حقيقية **c)** صفران تخيليان

39) **تحدٍّ:** اكتب معادلة على صورة حاصل ضرب عوامل دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة، لها صفران تخيليان، وصفر غير صحيح، وصفران غير نسبيين، ووضِّح إجابتك .

40) حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخريات، ووضِّح إجابتك:

$r^3 - 8 = 0$	$r^2 - 1 = 0$	$r^3 + 1 = 0$	$r^4 + 1 = 0$

41) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا لكل عبارة فيما يأتي:

a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.

b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

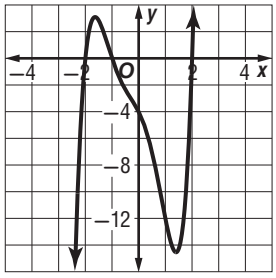
42) **اكتب:** وضِّح لزميلك كيف تستعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة الممكنة لدالة كثيرة الحدود: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

تدريب على اختبار

43) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟

A $x - 2$ **B** $x - 1$

C $x + 2$ **D** $x + 1$



مراجعة تراكمية

أوجد $f(4), f(-8)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي مستعملًا التعويض التركيبي: (الدرس 3-7)

44) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$

45) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x$

46) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4$

حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية: (الدرس 3-6)

47) $x^6 - y^6$

48) $4x^2y + 8xy + 16y - 3x^2z - 6xz - 12z$

49) $5a^3 - 30a^2 + 40a + 2a^2b - 12ab + 16b$

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الأعداد المركبة (الدرس 3-1)

- i هي الوحدة التخيلية، $i^2 = -1$ ، $i = \sqrt{-1}$
- العدد المركب هو أيُّ عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيان، ويسمى a الجزء الحقيقي، وb الجزء التخيُّلي.

القانون العام والمميز (الدرس 3-2)

- القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

العمليات على كثيرات الحدود (الدرسان 3-3, 3-4)

- عند الجمع أو الطرح: أجمِّع الحدود المتشابهة.
- عند الضرب: أستعمل خاصية التوزيع.
- عند القسمة: أستعمل القسمة الطويلة أو التركيبية.

دوال كثيرات الحدود (الدرس 3-5)

- تعرَّف دالة كثيرة الحدود بأنها دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد.

حل معادلات كثيرات الحدود (الدرس 3-6)

- يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال العامل المشترك الأكبر أو تجميع الحدود، أو بإحدى طرائق تحليل الدالة التربيعية.

نظريتا الباقي والعوامل (الدرس 3-7)

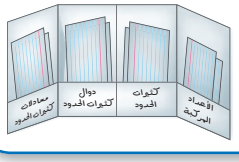
- نظرية الباقي: إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$.
- نظرية العوامل: تكون ثنائية الحد $x - a$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذًا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

الجذور، والأصفار (الدرس 3-8)

- نظرية الأصفار المركبة المترافقة: إذا كان $a + bi$ صفرًا للدالة، فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

الوحدة التخيلية (108) — دالة كثيرة الحدود (139)

العد التخيلي البحت (108) — دالة القوة (139)

العدد المركب (109) — سلوك طرفي التمثيل البياني (140)

المركبان المترافقان (111) — صفر الدالة (141)

القانون العام (115) — كثيرة الحدود الأولية (145)

المميز (118) — الصورة التربيعية (148)

التبسيط (125) — نظرية الباقي (154)

درجة كثيرة الحدود (127) — التعويض التركيبي (154)

القسمة التركيبية (132) — نظرية العوامل (156)

كثيرة حدود بمتغير واحد (138) — النظرية الأساسية في الجبر (160)

المعامل الرئيس (138)

اختبر مفرداتك

بيّن ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) العدد 6i تخيلي بحت

2) يسمى القانون: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالمميز

3) يُسمّى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية المعامل الرئيس.

4) تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها كثيرة حدود بمتغير واحد.

5) دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد.

6) تبسيط عبارات تتضمن قوى، يعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

7) القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

8) $(x^3)^2 + 3x^3 - 8 = 0$ هي دالة قوة.

مراجعة الدروس

3-1 الأعداد المركبة (الصفحات: 108-114)

بسّط كلًّا مما يأتي:

9) $\sqrt{-8}$ **10)** $(2-i)+(13+4i)$

11) $(6+2i)-(4-3i)$ **12)** $(6+5i)(3-2i)$

13) كهرباء: تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $2i+3$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $3i-4$ أوم. اجمع هذين العددين لتجد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

14) $2x^2+50=0$ **15)** $4x^2+1=0$

مثال 1

حل المعادلة: $3x^2+12=0$

$3x^2+12=0$	المعادلة الأصلية
$3x^2=-12$	اطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2=-4$	اقسم كلا الطرفين على 3
$x=\pm\sqrt{-4}$	خاصية الجذر التربيعي
$x=\pm 2i$	$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$

3-2 القانون العام والمميز (الصفحات: 115-122)

أجب عن الفروع a–c لكلِّ معادلة تربيعية فيما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

16) $x^2-10x+25=0$ **17)** $x^2+4x-32=0$

18) $2x^2+3x-18=0$ **19)** $4x^2-4x+1=0$

20) فيزياء: قذف محمد كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft\s. إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض (h) بالأقدام يعطى بالمعادلة $h=-16t^2+40t+5$، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الأرض.

مثال 2

حل المعادلة: $x^2-4x-45=0$

$a=1, b=-4, c=-45$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	القانون العام
$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-45)}}{2(1)}$	$a=1, b=-4, c=-45$
$=\frac{4\pm 14}{2}$	بسّط
$x=\frac{4+14}{2}$, $x=\frac{4-14}{2}$	اكتب على صورة معادلتين
$=9$, $=-5$	بسّط

إذن الحلّان هُمَا: $-5, 9$.

3-3 العمليات على كثيرات الحدود (الصفحات: 125-130)

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

21) $\frac{14x^4y}{2x^3y^5}$

22) $3t(tn-5)$

23) $(4r^2+3r-1)-(3r^2-5r+4)$

24) $(x^4)^3$

25) $(m+p)(m^2-2mp+p^2)$

26) $3b(2b-1)+2b(b+3)$

مثال 3

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(-4a^3b^5)(5ab^3)$

$(-4a^3b^5)(5ab^3)=(-4)(5)a^{3+1}b^{5+3}$	اضرب القوى
$=-20a^4b^8$	بسّط

b) $(2x^2+3x-8)+(3x^2-5x-7)$

$(2x^2+3x-8)+(3x^2-5x-7)$

$=(2x^2+3x^2)+(3x-5x)+[-8+(-7)]$

$=5x^2-2x-15$

3-4 قسمة كثيرات الحدود (الصفحات: 131-136)

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

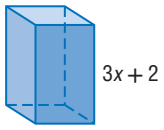
(27) $\dfrac{12x^4y^5 + 8x^3y^7 - 16x^2y^6}{4xy^5}$

(28) $(6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2)$

(29) $(a^4 + 5a^3 + 2a^2 - 6a + 4)(a + 2)^{-1}$

(30) $(4a^6 - 5a^4 + 3a^2 - a) \div (2a + 1)$

(31) **هندسة:** حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور يساوي $3x^3 + 11x^2 - 114x - 80$ وحدة مكعبة، فما مساحة القاعدة؟



مثال 4

بسّط العبارة: $(6x^3 - 31x^2 - 34x + 22) \div (2x - 1)$.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 14x - 24 \\ 2x - 1 \overline{)\ 6x^3 - 31x^2 - 34x + 22} \\ (-)\ 6x^3 - 3x^2 \\ \hline -28x^2 - 34x + 22 \\ (-)\ -28x^2 + 14x \\ \hline -48x + 22 \\ (-)\ -48x + 24 \\ \hline -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $3x^2 - 14x - 24 - \dfrac{2}{2x - 1}$.

3-5 دوال كثيرات الحدود (الصفحات: 138-144)

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

(32) $5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1$

(33) $6xy^2 - xy + y^2$

(34) $12x^3 - 5x^4 + 6x^8 - 3x - 3$

أوجد $p(x + h)$, $p(-2)$ لكلِّ دالة فيما يأتي :

(35) $p(x) = x^2 + 2x - 3$

(36) $p(x) = 3x^2 - x$

(37) $p(x) = 3 - 5x^2 + x^3$

مثال 5

حدّد درجة كثيرة الحدود $4x^3 + 3x^2 - 7x^7 + 4x - 1$ ؟ وما معاملها الرئيس؟

أكبر أس يساوي 7 ؛ لذا فدرجة كثيرة الحدود تساوي 7، والمعامل الرئيس هو -7.

مثال 6

إذا كان $p(x) = 3x + 2x^2 - x^3$، فأوجد $p(a - 2)$.

$$\begin{aligned} p(a-2) &= 3(a-2) + 2(a-2)^2 - (a-2)^3 \\ &= 3a - 6 + 2a^2 - 8a + 8 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) \\ &= -a^3 + 8a^2 - 17a + 10 \end{aligned}$$

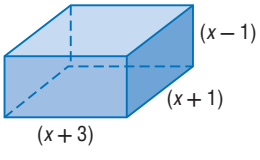
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود (الصفحات: 145-152)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

(38) $x^3 + 2x^2 - 35x = 0$

(39) $8x^4 - 10x^2 + 3 = 0$

(40) **هندسة:** إذا كان حجم المنشور في الشكل الآتي يساوي $315\ \text{in}^3$. فأوجد كلًّا من قيمة x وطول المنشور وعرضه وارتفاعه.



مثال 7

حلّ المعادلة: $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$.

$(x^2 - 4)(4x^2 - 9) = 0$	حلّل إلى العوامل
$x^2 - 4 = 0$ أو $4x^2 - 9 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x^2 = 4$ $\quad x^2 = \dfrac{9}{4}$	أضف 9 لكلا الطرفين، ثم اقسم على 4
$x = \pm 2$ $\quad x = \pm\dfrac{3}{2}$	أوجد الجذر التربيعي

الحلول هي: $-2, 2, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}$.

3-7 نظريتا الباقي والعوامل (الصفحات: 154-159)

أوجد $f(4)$, $f(-2)$ لكلِّ دالة فيما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

41 $f(x) = x^2 - 3$

42 $f(x) = x^2 - 5x + 4$

43 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

44 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

45 $3x^3 + 20x^2 + 23x - 10, x + 5$

46 $2x^3 + 11x^2 + 17x + 5, 2x + 5$

47 $x^3 + 2x^2 - 23x - 60, x - 5$

مثال 8

حدد ما إذا كان $x - 6$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود:
$x^3 - 2x^2 - 21x - 18$

6	1	−2	−21	−18
		6	24	18
	1	4	3	0

$x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود؛ لأن باقي قسمة كثيرة الحدود عليه يساوي صفرًا.

3-8 الجذور والأصفار (الصفحات: 160-166)

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

48 $f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2$

49 $f(x) = -4x^4 - 2x^3 - 12x^2 - x - 23$

50 $f(x) = x^6 - 5x^3 + x^2 + x - 6$

51 $f(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$

52 $f(x) = -2x^6 + 4x^4 + x^2 - 3x - 3$

مثال 9

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 26x - 48$.

تتغير إشارة الدالة $f(x)$ مرة واحدة؛ لذا يوجد صفر حقيقي موجب واحد.

تتغير إشارة الدالة $f(-x)$ ثلاث مرات؛ لذا يوجد للدالة صفر واحد، أو ثلاثة أصفار حقيقية سالبة.

الدالة ليس لها أصفار تخيلية، أو لها صفران تخيليان.

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\frac{2-i}{1+3i}$

2) $(2+3i)-(2-3i)$

3) $(3-i)\cdot(4+2i)$

بسّط كلًّا مما يأتي:

4) $(3a)^2(7b)^4$

5) $(7x-2)(2x+5)$

6) $(2x^2+3x-4)-(4x^2-7x+1)$

7) $(4x^3-x^2+5x-4)+(5x-10)$

8) $(x^4+5x^3+3x^2-8x+3)\div(x+3)$

9) $(3x^3-5x^2-23x+24)\div(x-3)$

10) إذا كانت $c(x)=3x^3+5x^2-4$ ، فما قيمة $4c(3b)$؟

حلّل كلَّ كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

11) $8y^4+x^3y$

12) $2x^2+2x+1$

13) $a^2x+3ax+2x-a^2y-3ay-2y$

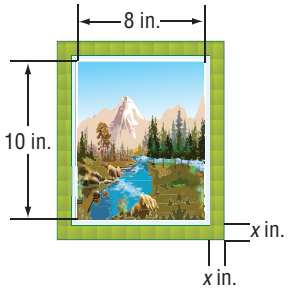
حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

14) $8x^3+1=0$

15) $x^4-11x^2+28=0$

16) حل المعادلة: $x^2-4x+3=0$

17) **إطارات:** إذا كانت مساحة الصورة وإطارها في الشكل الآتي $168\ \text{in}^2$، فما عرض الإطار؟



18) **اختيار من متعدد:** إذا كان $f(x)=x^4-3x^3+5x-3$، فما قيمة $f(-2)$؟

A 37 **B** 27

C −33 **D** −21

19) فيما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها . أوجد عواملها الأخرى:

$2x^3+15x^2+22x-15\ ;\ x+5$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

20) $p(x)=x^3-x^2-x-3$

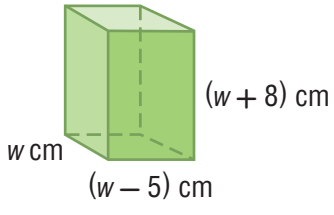
21) $p(x)=2x^6+5x^4-x^3-5x-1$

أوجد جميع أصفار كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

22) $p(x)=x^3-4x^2+x+6$

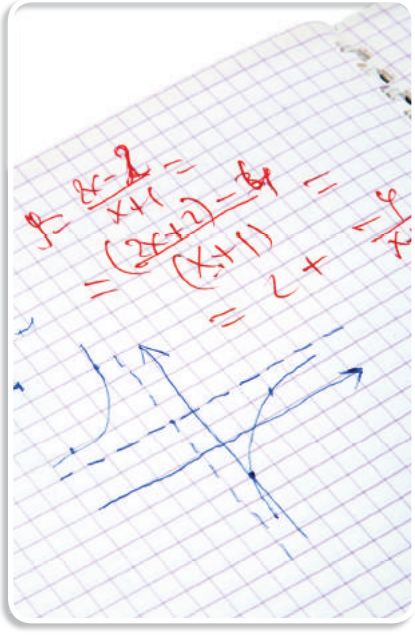
23) $p(x)=x^3+2x^2+4x+8$

24) **هندسة:** إذا كان حجم المنشور المتوازي المستطيلات الموضَّح بالشكل أدناه $612\ \text{cm}^3$، فأوجد أبعاده.



رسم شكل

يعدُّ رسم الشكل طريقة مفيدة في حل المسألة، فهو يعطي تصورًا لكيفية الحل، لذا ارسم شكلًا يمثّل المسألة في ورقة مسودة أو في ورقة الإجابة (إذا سمح بذلك).



استراتيجيات لرسم شكل

خطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

واسأل نفسك الأسئلة الآتية:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما المجاهيل التي يُراد نمذجتها وإيجادها؟

خطوة 2

ارسم شكلًا وضع عليه المسميات والبيانات على أن يكون:

- واضحًا ودقيقًا ما أمكن.
- تشتمل المسميات التي توضع على الشكل على جميع معطيات المسألة.

خطوة 3

حل المسألة.

- استعمل الشكل لمساعدتك على نمذجة المسألة بمعادلة، ثم حلّها.
- تحقق من معقولية إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، واستعمل المعلومات المعطاة لحلِّها.

لدى فيصل بركة سباحة سطحها على شكل مستطيل أبعاده 14 ft, 25 ft، وأراد أن يرصف حولها ممرًّا متساوي العرض، إذا كانت مساحة سطح البركة مع الممرِّ 672 ft^2، فما عرض الممرِّ؟

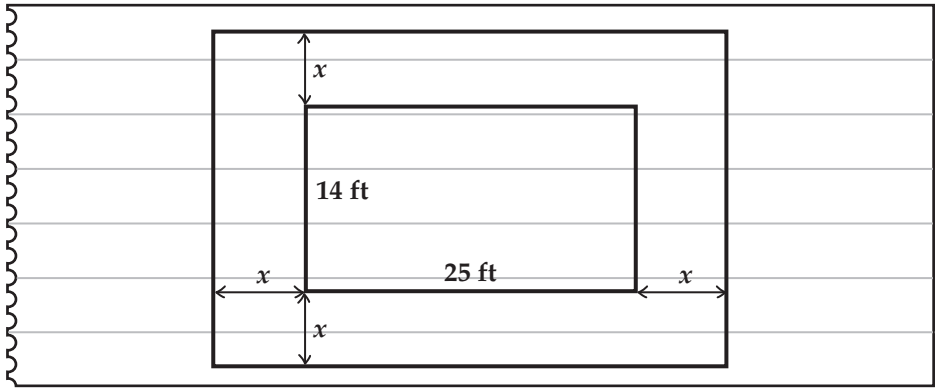
A 2.75 ft

B 3 ft

C 3.25 ft

D 3.5 ft

ارسم شكلًا ليساعدك على تصوُّر المسألة، وافترض أن x يمثل عرض الممرِّ غير المعلوم.



طول البركة مع الممرِّ يساوي $25 + 2x$ ، وعرضها مع الممرِّ يساوي $14 + 2x$.

اضرب العبارتين السابقتين لإيجاد مساحة سطح البركة والممر معًا، وساوِ الناتج بالقيمة المعطاة وهي $672\ ft^2$ ثم حُلَّها لإيجاد x.

$$(25 + 2x)(14 + 2x) = 672$$
$$350 + 78x + 4x^2 = 672$$
$$4x^2 + 78x - 322 = 0$$
$$x = 3.5 \text{ أو } x = -23$$

وبما أن عرض الممرِّ لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن القيمة الأنسب هي 3.5 ft

إذن الإجابة الصحيحة هي D

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة من المسألتين الآتيتين، وحدد المطلوب واستعمل المعطيات المعطاة لحلها:

1) لدى مزارع سياج طوله 240 ft، ويريد أن يحيط به حديقة مستطيلة الشكل على أن يكون جدار منزله أحد جوانبها. فما أكبر مساحة ممكنة للحديقة؟

A $7200\ ft^2$

B $4960\ ft^2$

C $3600\ ft^2$

D $3280\ ft^2$

2) يتم تصنيع الحلقات المعدنية بعمل ثقب في رقاقة معدنية دائرية. إذا صنعت حلقة بعمل ثقب عند مركز رقاقة معدنية قطرها 1.8 in، وكانت مساحة سطح الحلقة $0.65\pi\ in^2$ ، فما نصف قطر الثقب؟

A 0.35 in

B 0.38 in

C 0.40 in

D 0.42 in

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) أبسط صورة للمقدار $(5n^2 + 11n - 6) - (2n^2 - 5)$ هي:

A $3n^2 + 11n - 11$

B $3n^2 + 11n - 1$

C $7n^2 + 11n - 11$

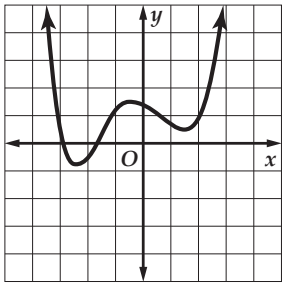
D $7n^2 + 11n - 1$

2) أيٌّ مما يأتي ليس حلاً للمعادلة: $x^3 - 37x - 84 = 0$ ؟

A -4 **C** 6

B -3 **D** 7

3) كم صفرًا حقيقيًّا للدالة كثيرة الحدود الممثلة بيانيًّا أدناه؟



A 2 **C** 4

B 3 **D** 5

4) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي، فإن قيمة x تساوي:

A $\frac{4}{3}$

B $\frac{4}{5}$

C $-\frac{4}{3}$

D $-\frac{4}{5}$

5) استعمل عبد الرحمن الدالة:
$P(x) = -0.000047x^2 + 0.027x + 3$
لتقدير عدد سكان المدينة التي يسكنها ما بين عامي 1390، 1430هـ ؛ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390هـ ، P عدد السكان بالملايين. فما قيمة $P(20)$ التي تمثل عدد سكان هذه المدينة عام 1410هـ ؟

A 2 مليون تقريبًا

B 2.5 مليون تقريبًا

C 3 ملايين تقريبًا

D 3.5 ملايين تقريبًا

6) أبسط صورة للمقدار $\frac{2}{1-5i}$ هي:

A $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

B $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

C $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

D $2 - \frac{2}{5}i$

7) ما قيمة مميِّز المعادلة: $x^2 - x - 20 = 0$ ؟

A 9 **C** 5

B 81 **D** -4

8) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت X مصفوفة رتبتها 2×2 بحيث $X = 2A - B$ فإن:

A $X = 3$

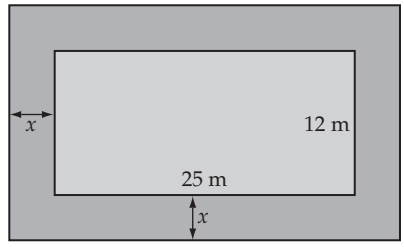
B $X = 2A$

C $X = -2B$

D $X = 3A$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

9) يبين الشكل الآتي حديقة محاطة بممر عرضه x مترًا. فإذا علمت أن مساحة الحديقة مع الممر $558\ m^2$ ، فأوجد عرض الممر بالأمتار.



10) حلّل المقدار: $64a^4 + ab^3$ تحليلًا تامًّا، وبيّن خطوات الحلّ.

11) بسّط المقدار:

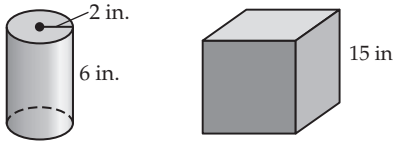
$$\frac{3x^3 - 4x^2 - 28x - 16}{x + 2}$$

واكتب إجابتك على صورة حاصل ضرب عوامل مبينًا خطوات الحل.

12) ما قيمة a في المعادلة المصفوفية الآتية؟

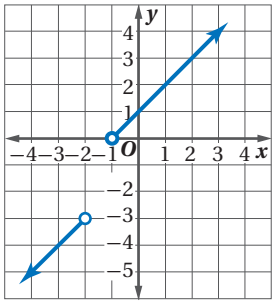
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

13) يريد صالح أن يملأ الإناء المكعب بالماء مستعملًا العلبة الأسطوانية في الشكل أدناه. فكم مرة يستعمل العلبة؟



أسئلة ذات إجابات مطولة

14) اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس ...	3-3	3-6	3-8	2-5	3-5	3-1	3-2	2-2	3-6	3-5	3-4	2-5	3-8	1-3