1 برهن ان $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots .. n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الخطوة الأولى: عندما $n = 1$ فان الطرف الايسر من المعادله هو

والطرف الأيمن هو $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

$$1^2 = 1$$

اذن الجملة صحيحه عند $n = 1$

الخطوة الثانية: افرض ان $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

صحيحه حيث n عدد طبيعي

الخطوة الثالثه: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$

بجمع $(k+1)^2$ الطرفين

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

بالجمع

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

بإخراج العامل المشترك

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

بالتبسيط

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

بالتحليل

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

2 برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n

الخطوة الأولى: عندما $n = 1$ فان $7^1 - 1 = 6$
وهو عدد يقبل القسمة على 6

الخطوة االثانية: افرض $7^1 - 1$ وهو عدد على يقبل القسمة على 6
حيث n عدد طبيعي وهذا يعني انه يوجد عدد طبيعي بحيث ان $6r - 1$

الخطوة الثالثة: ابرهن صحة الجملة عند $n = k + 1$

$7^k - 1 = 6r$	فرضية الاستقراء
$7^k = 6r + 1$	بإضافة 1 الى الطرفين
$7^{k+1} = 7(6r + 1)$	بضرب كلا الطرفين في 7
$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$	بالتبسيط وطرح 1 من كلا الطرفين
$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$	بالتحليل

بما أن r عدد طبيعي ، فإن $7r+1$ عدد طبيعي ، وهذا يعني أن $7^{k+1} - 1$
يقبل القسمة علي ٦ أي ان الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$
ولذا فإن $7^n - 1$ يقبل القسمة علي ٦ لكل عدد طبيعي n

3 اعط مثالا مضادا يبين خطا الجملة:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \ldots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

عند $n = 1$

$$1^2 = \frac{1(3-1)}{2} = 1$$

$1 = 1$ صحيحة

عند $n = 2$

$$1^2 + 2^2 = \frac{2(6-1)}{2}$$

$5 = 5$ صحيحة

عند n=3

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3(9-1)}{2}$$

$14 \neq 12$ خاطئة