مع

سلسلة رفعة

للرياضيات متعة

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

أسهل

أجمل

رياضيات

٥

$\frac{2}{3}$

أبسط

تأليف

ندى محمد عبد العزيز الناصر

جواهر حمدان ملوح العنزي

مراجعة

سامي محمد عبدالله المعيلي

أ/ ندى محمد الناصر - أ/ جواهر حمدان العنزي

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

مع سلسلة رفعة للرياضيات متعة (رياضيات 5)

رقم الإيداع: 1443/795 تاريخ: 1443/1/21

هـ، ورقم ردمك 4-8938-03-603-978

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ، أما بعد:

نبذة تعريفية لمجموعة رفعة

هي مجموعة تدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات ، وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام ، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام .

وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات ، تقدم مجموعة رفعة بين أيديكم هذا العمل ضمن " سلسلة كُتب رفعة " وتتميز هذه الكُتب بما يلي :

- عرض المحتوى بصورة جذابة ومشوقة .
- اختبار قصير بعد كل درس (اختبر نفسك).
- ملحق للإجابات لـ (اختبر نفسك) للتأكد من صحة الحل.

ونطمح من خلاله توصيل المفاهيم الرياضية وموضوعات المنهج بصورة سلسة وواضحة ... لإفادة طلابنا وطالباتنا ، وتوفير جهود معلمينا ومعلماتنا الأفاضل .

والله ولي التوفيق

رياضيات ٥

الفصل الأول

تحليل الدوال

الفصل الثاني

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفصل الثالث

المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل الرابع

القطوع المخروطية

تحليل الدوال

1-1 الدوال

الدرس | اختبر نفسك

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

الدرس | اختبر نفسك

1-3 الاتصال والنهايات

الدرس | اختبر نفسك

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

الدرس | اختبر نفسك

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الدرس | اختبر نفسك

1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

الدرس | اختبر نفسك

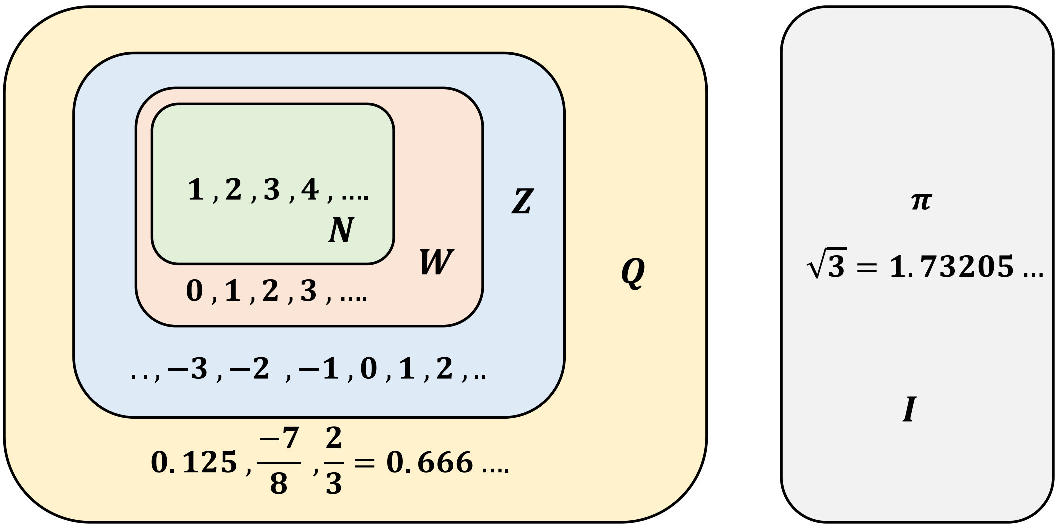
1-7 العلاقات والدوال العكسية

الدرس | اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

مجموعة الأعداد الحقيقية R

$R = Q \cup I$



$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ $\qquad$ $I \subset R$

الصفة المميزة للمجموعة

$$\{x \mid -2 < x < 5 \,,\, x \in R\}$$

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد	x لها هذه الخصائص ..	الأعداد x حيث ...

مثال

اكتب المجموعة التالية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة :

$$x \le -3$$

الحل :

$$\{x \mid x \le -3 \,,\, x \in R\}$$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي **تقل أو تساوي** -3

رموز الفترات

تستعمل لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

فيستعمل الرمزان " [" أو "] " للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها

بينما يستعمل الرمزان " (" أو ") " للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها .

أما الرمزان " $-\infty$ " أو " ∞ " فيستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة .

فترات محدودة	
المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a\,,b]$
$a < x < b$	$(a\,,b)$
$a \le x < b$	$[a,b)$
$a < x \le b$	$(a,b]$

فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة
$x \ge a$	$[a,\infty)$
$x \le a$	$(-\infty,a]$
$x > a$	$(a\,,\infty)$
$x < a$	$(-\infty\,,a)$
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty\,,\infty)$

الرمزان

$\cup$ رمز الاتحاد: ويعني جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين .

$\cap$ رمز التقاطع: ويعني جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين .

مثال

اكتب المجموعة التالية باستعمال رمز الفترة :

$x < -2$ أو $x > 9$

الحل :

$(-\infty\,,-2) \cup (9\,,\infty)$

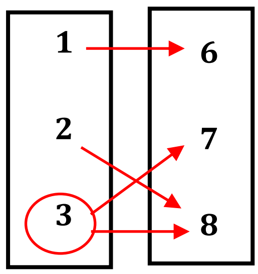
تمييز الدالة

متى تكون العلاقة دالة ؟؟

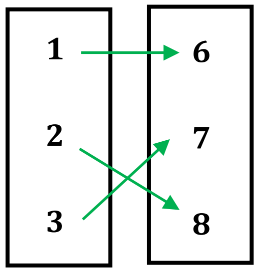
المخطط السهمي — عدديًا

علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B .

مجموعة A

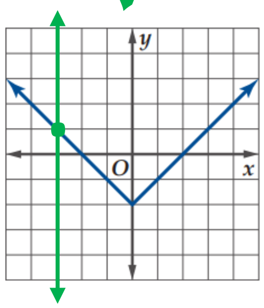


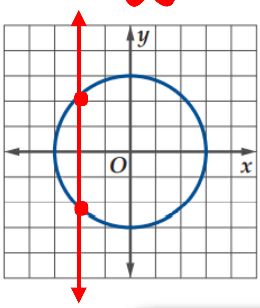
مجموعة B



اختبار الخط الرأسي — بيانيًا

تمثل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة .





الجداول — عدديًا

تكون دالة عندما ترتبط كل قيمة من x بقيمة واحدة لِـ y

x	y
-2	3
-2	5
1	2

x	y
-2	3
0	5
1	2

المعادلات — جبريًا

$y^2 - 2x = 5$

$3y + 6x = 18$

تكون y دالة في x

نحل المعادلة بالنسبة لـ y

وعندما لا ترتبط أي قيمة لِـ x بقيمتين من y تكون دالة .

رمز الدالة

يستعمل $f(x)$ رمزًا للدالة ويعني قيمة الدالة f عند x وبما أن $f(x)$ تمثل قيمة y التي ترتبط بقيمة x فإننا نكتب $y = f(x)$

المعادلة : $y = -6x$ الدالة المرتبطة بالمعادلة : $f(x) = -6x$

x المتغير المستقل ويمثل قيم المجال

y المتغير التابع ويمثل قيم المدى

إيجاد قيم الدالة

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x .

مثال : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ عند $x = 2$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1$$

$$f(2) = 15$$

إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

الدالة متعددة التعريف : هي التي تعرف بقاعدتين أو أكثر على فترات مختلفة .

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x

وذلك بتحديد الفترة المناسبة لقيمة x .

مثال : أوجد $f(10)$

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 \ , & x < 3 \\ -x^3 \ , & 3 \le x \le 8 \\ 3x^2 + 1 \ , & x > 8 \end{cases}$$

أولًا : نحدد الفترة المناسبة لـ $x = 10$

هي الفترة الثالثة

ثم نعوض فيها عن قيمة x

$$f(10) = 3(10)^2 + 1$$

$$f(10) = 301$$

إيجاد مجال الدالة جبرياً

الدالة	المجال	أمثلة
كثيرة حدود	المجال : R	$f(x) = x + 3$ المجال = R
كسرية	$\frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}$ المقام $\neq 0$ نوجد قيم x ونستبعدهم من المقام المجال = أصفار المقام $- R$ المجال : $\{x \mid x \neq$ أصفار المقام $, x \in R\}$	$f(x) = \frac{2+x}{x^2 - 7x}$ $x^2 - 7x \neq 0$ $x(x-7) \neq 0$ $x \neq 0$ $x - 7 \neq 0 \quad \rightarrow x \neq 7$ المجال : $\{x \mid x \neq 0 , x \neq 7 , x \in R\}$
جذرية تربيعية	$\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}$ ما تحت الجذر ≥ 0 ونحلها وتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \mid$ الصفة المميزة $, x \in R\}$	$f(x) = \sqrt{x-5}$ $x - 5 \geq 0$ $x \geq 5$ المجال : $\{x \mid x \geq 5 , x \in R\}$
كسرية البسط كثيرة حدود والمقام جذر تربيعي	$\frac{\text{كثيرة حدود}}{\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}}$ ما تحت الجذر > 0 ونحلها وتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \mid$ الصفة المميزة $, x \in R\}$	$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$ $2x + 6 > 0$ $2x > -6$ $x > -3$ المجال : $\{x \mid x > -3 , x \in R\}$
كسرية البسط جذر تربيعي والمقام كثيرة حدود	$\frac{\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}}{\text{كثيرة حدود}}$ لإيجاد المجال : نستخدم طريقة الجذر للبسط وطريقة الكسرية للمقام	$f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$ نوجد البسط: $2x - 3 \geq 0$ المجال : $x \geq \frac{3}{2}$ نوجد أصفار المقام $x - 5 \neq 0$ $x \neq 5$ المجال : $x \neq 5$ المجال : $\{x \mid x \geq \frac{3}{2} , x \neq 5 , x \in R\}$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 تكتب المجموعة $-31 < x \le 64$ باستعمال رمز الفترة :

A	B	C	D
$[-31, 64]$	$(-31, 64]$	$(-31, 64)$	$[-31, 64)$

2 مجال الدالة $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$ هو ....

A	B	C	D
$[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$	$[-\sqrt{6}, \infty)$	$R - [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$	$(-\infty, \sqrt{6}]$

3 أي من العلاقات التالية y تمثل دالة في x :

A

x	y
-2	-4
3	-1
3	4
5	6
7	9

B

x	y
-8	-5
-5	-4
0	-3
3	-2
6	-3

C

x	y
-6	-7
2	3
5	8
5	9
9	22

D

x	y
-1	6
2	3
3	8
9	5
9	1

أكمل الفراغات التالية :

1 إذا كانت $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$ فإن $g(3x)$ تساوي ....

2 تكتب المجموعة $x > 50$ باستعمال الصفة المميزة ....

3 إذا كانت :

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 & , \quad x < 3 \\ -x^3 & , \quad 3 \le x \le 8 \\ 3x^2 + 1 & , \quad x > 8 \end{cases}$$

فإن قيمة $f(-5)$ تساوي ....

أوجد حل ما يلي:

يعطى زمن الدورة T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9.8}}$

حيث l طول البندول ، فهل تمثل T دالة في l ؟

- إذا كانت كذلك فحدد مجالها ، وإذا لم تكن دالة فبين السبب .

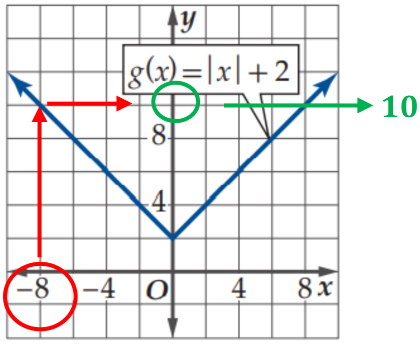
تقدير قيم الدوال

يستعمل التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة .

في المثال : استعمل التمثيل البياني لتقدير $g(-8)$

ثم تحقق جبريًا وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة

بيانيًا :



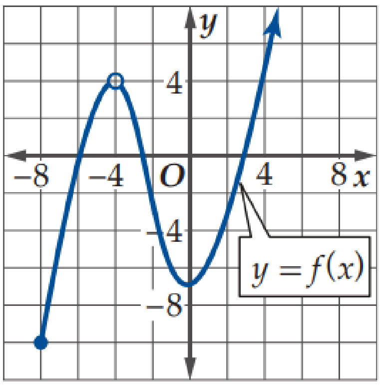
جبريًا :

$g(-8) = |-8| + 2$

$g(-8) = 8 + 2$

$g(-8) = 10$

إيجاد المجال والمدى من خلال التمثيل البياني



المجال

يحدد بيانيًا من محور x

يبدأ المجال من $x = -8$

$x = -4$ ليست في المجال

السهم يدل على استمرارية المجال في الجهة الأخرى .

المجال $= [-8 , -4) \cup (-4 , \infty)$

المدى

يحدد بيانيًا من محور y

يبدأ المدى من $y = -10$

وتزداد قيمة الدالة بلا حدود كما يدل السهم الممتد لأعلى .

المدى $= [-10 , \infty)$

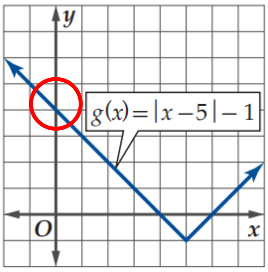
إيجاد المقطع y

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور.

ويمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة.

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y ثم أوجده جبرياً :



بيانياً : المنحنى يقطع محور y عند النقطة $(0, 4)$

إذن المقطع y هو 4 .

جبرياً : نعوض عن الـ x بـ صفر

$$g(0) = |0 - 5| - 1$$

$$g(0) = 4$$

إيجاد الأصفار

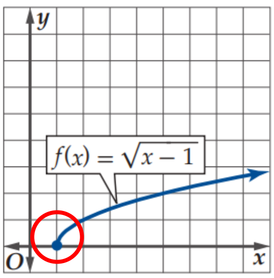
تسمى المقاطع x لمنحنى الدالة أصفار الدالة وتسمى حلول المعادلة

المرافقة للدالة جذور المعادلة ولإيجاد أصفار دالة f

فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل .

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية لأصفارها ثم أوجدها جبرياً :



بيانياً: المنحنى يقطع محور x عند النقطة $(1, 0)$

إذن المقطع x هو 1.

جبرياً : نعوض عن الـ y بـ صفر

$$0 = \sqrt{x - 1}$$

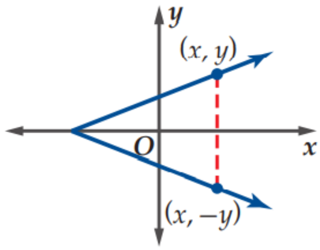
بالتربيع للطرفين

$$x = 1 \leftarrow \quad 0 = x - 1$$

اختبارات التماثل

التماثل حول محور x

بيانياً:



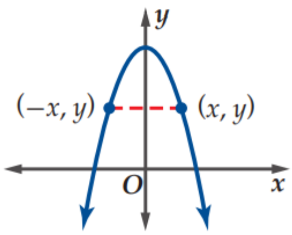
جبرياً:

نعوض عن y بـ $-y$

فيعطي معادلة مكافئة .

التماثل حول محور y

بيانياً:



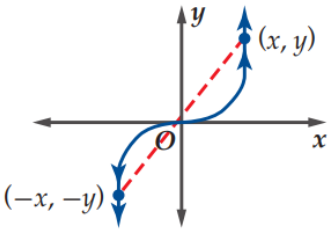
جبرياً:

نعوض عن x بـ $-x$

فيعطي معادلة مكافئة .

التماثل حول محور نقطة الأصل

بيانياً:



جبرياً:

نعوض عن x بـ $-x$

ونعوض عن y بـ $-y$

فيعطي معادلة مكافئة .

الدوال الزوجية والفردية

زوجية
متماثلة حول محور y

جبرياً :
لكل x في مجال f
$f(-x) = f(x)$

فردية
متماثلة حول نقطة الأصل

جبرياً :
لكل x في مجال f
$f(-x) = -f(x)$

مثال

$$f(x) = x^4 + 2$$
$$f(-x) = (-x)^4 + 2$$
$$f(-x) = x^4 + 2$$
$$f(-x) = f(x)$$

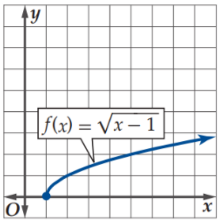
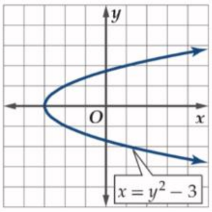
$$f(x) = x^3 - 2x$$
$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$$
$$f(-x) = -x^3 + 2x$$
$$f(-x) = -(x^3 - 2x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

ليست زوجية وليست فردية

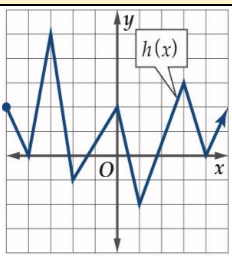
$$f(x) = 4\sqrt{x}$$
$$f(-x) = 4\sqrt{-x}$$
$$f(-x) \neq f(x)$$
$$f(-x) \neq -f(x)$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	مقطع y في الدالة $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 4$ يساوي							
	A	-4	B	0	C	4	D	6
2	في الشكل المجاور أصفار الدالة هي : 							
	A	-1	B	0	C	1	D	لا يوجد
3	الدالة $f(x) = x^2 + 6x + 10$ هي دالة :							
	A	زوجية	B	فردية	C	زوجية وفردية معًا	D	ليست زوجية وليست فردية
4	في الشكل المجاور الدالة متماثلة حول .... 							
	A	محور x	B	محور y	C	نقطة الأصل	D	لا شيء مما سبق

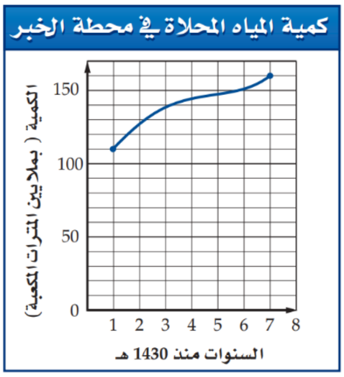
أكمل الفراغات التالية :

1	من الشكل المجاور: مجال الدالة هو	
2	من الشكل المجاور: مدى الدالة هو	

أوجد حل ما يلي:

إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر في الفترة 1431هـ إلى الفترة 1437 هـ معطى بالدالة
$f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$

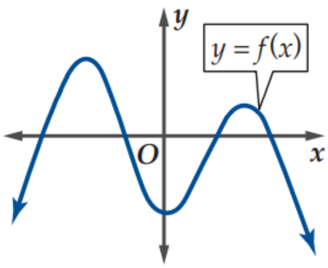
- قدر كمية المياه المحلاة سنة 1435 هـ .
- قدر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني .



الدالة المتصلة

تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.

وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه .



نهاية الدالة

اقتراب قيم الدالة من قيمة واحدة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة .

وهي أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ بأن تقترب من قيمة واحدة عندما تقترب x من c من جهتي اليمين واليسار .

النهايات

إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L

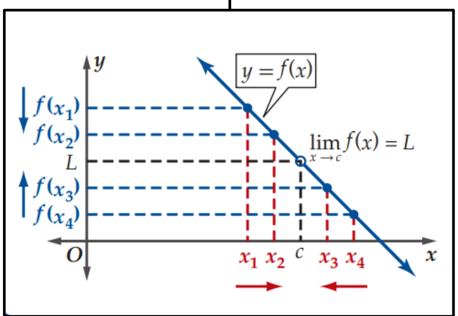
عندما تقترب x من c من الجهتين ،

فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

ويرمز لها بالرمز :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

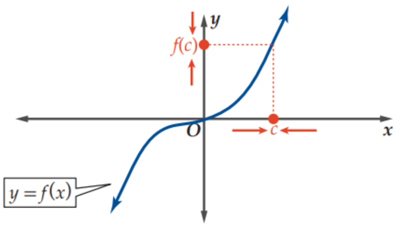
أي : نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L



اختبار الاتصال

يقال أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط التالية :

1 $f(x)$ معرفة عند c
أي أن $f(c)$ موجودة .



3 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

2 $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين
أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.

مثال

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = x^3$ متصلة عند $x = 0$

الحل :

نتحقق من الشروط الثلاثة .

1 هل $f(0)$ موجودة ؟

$f(0) = 0$ ، الدالة معرفة عند $x = 0$

2 هل $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ موجودة ؟

نكون جدول يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين .

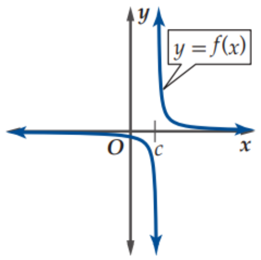
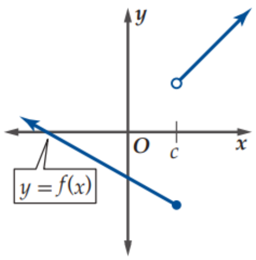
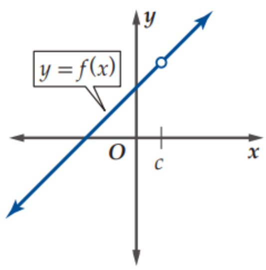
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	-1×10^{-6}	-1×10^{-9}		1×10^{-9}	1×10^{-6}	0.001

الجدول يبين أنه عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين واليسار ، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 0
أي أن : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

3 هل $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ؟

بما أن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ، $f(0) = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 0$

أنواع عدم الاتصال

التمثيل البياني	نوع عدم الاتصال	شروطها
 إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.	عدم اتصال لانهائي عدم اتصال غير قابل للإزالة	تكون كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون : $\dfrac{\text{عدد}}{0}$ أي غير معرف .
 إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.	عدم اتصال قفزي عدم اتصال غير قابل للإزالة	تكون الدالة متعددة التعريف $f(x) = \begin{cases} f_1(x)\,, & x > c \\ f_2(x)\,, & x \le c \end{cases}$ عند إيجاد النهايات للطرفين من اليمين واليسار تكون غير متساوية $\lim\limits_{x \to c^+} f_1(x) \neq \lim\limits_{x \to c^-} f_2(x)$
 إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة ولا تساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ويشار إليها بدائرة صغيرة غير مظللة لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.	عدم اتصال قابل للإزالة	تكون الدالة كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون : $\dfrac{0}{0}$ أي غير معرف . فنعمل على تحليلها لنعيد تعريفها من جديد لتصبح متصلة .

أمثلة على أنواع عدم الاتصال

1

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

عند $x = 0$

$f(0) = \frac{1}{0}$

غير معرف

غير متصل نوعه لانهائي

2

$f(x) = \begin{cases} 5x + 4 , x > 2 \\ 2 - x , x \le 2 \end{cases}$

عند $x = 2$

$f(2) = 2 - x$

$= 2 - 2 = 0$

$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} 2 - x = 0 \\ \lim_{x \to 2^+} 5x + 4 = 14 \end{aligned}\right] \neq$

النهايات غير متساوية

غير متصل نوعه قفزي

3

$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

عند $x = 4$

$f(4) = \frac{(4)^2 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$

غير معرف

نعيد تعريفها :

$\frac{x^2 - 16}{x - 4}$

$= \frac{(x-4)(x+4)}{x - 4}$

$f(x) = x + 4$

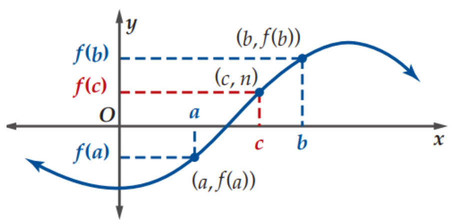
$f(4) = 4 + 4 = 8$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} , & x \neq 4 \\ 8 , & x = 4 \end{cases}$

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b ، بحيث $f(c) = n$

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة ، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b بحيث $f(c) = 0$ أي يوجد صفر للدالة بين a و b .



تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

مثال

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:
$f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$

الحل :

أولًا: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

ثانيًا: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهي بين قيم الدالة التي فيها تغير بالإشارات بين العددين -3 و -2

و بين العددين 0 و 1 وبين العددين 1 و 2 .

تقريب الأصفار دون تغيّر الإشارة

مثال

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:
$f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$

الحل :

أولًا: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

ثانيًا: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهنا قيم الدالة لا تتغير إشاراتها عند قيم x المعطاة ولكن $f(x)$ تتناقص عندما

تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار ، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$

من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0.

سلوك طرفي التمثيل البياني

يصف شكل الدالة عند طرفي منحناها ، أي يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x

أو تنقص بلا حدود ، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$

ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني نستعمل مفهوم النهاية .

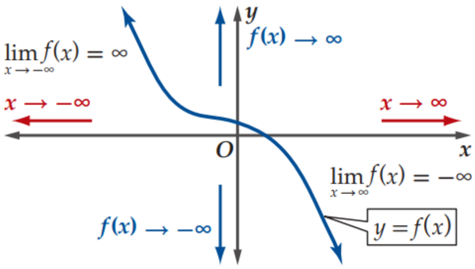
دراسة سلوك طرفي التمثيل البياني

من اليمين

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

من اليسار

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



كثيرة حدود

من الرسم نحدد السلوك

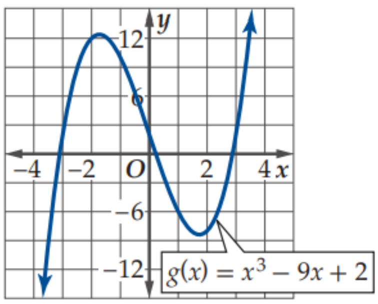
إذا كان :

اتجاه السهم إلى أعلى ∞

اتجاه السهم إلى أسفل $-\infty$

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني :



الحل :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

كسرية

درجة البسط < درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

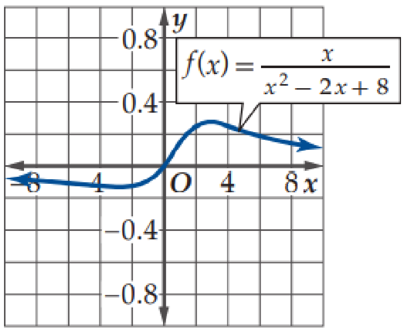
درجة البسط > درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

درجة البسط = درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\text{معامل الحد الرئيس}}{\text{معامل الحد الرئيس}}$$

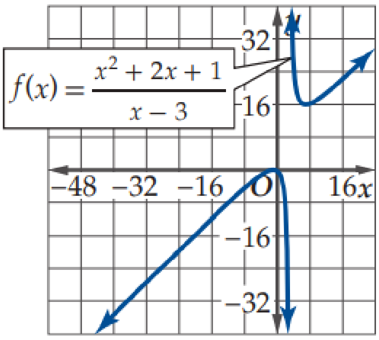
مثال :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

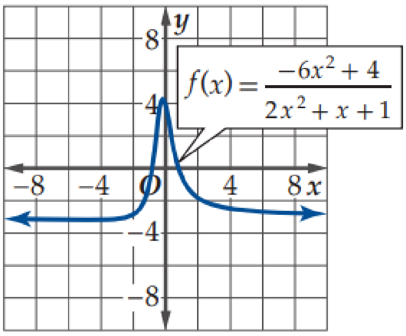
مثال :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

مثال :



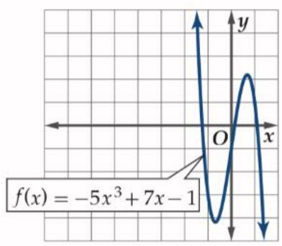
$$\lim_{x\to\infty} f(x) =$$

$$= \frac{-6}{2} = -3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	نوع الدالة $f(x) = \frac{x}{x-1}$ عند $x = 1$:						
	A	متصلة	B	عدم اتصال لا نهائي	C	عدم اتصال قفزي	D	عدم اتصال قابل للإزالة
2	الدالة الصحيحة لإعادة تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ لتصبح متصلة عند النقطة $x = -3$ هي :						
	A	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x \neq -3 \\ 3 & , x = -3 \end{cases}$	B	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x \neq -3 \\ 6 & , x = -3 \end{cases}$	C	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x \neq -3 \\ -3 & , x = -3 \end{cases}$	D	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x \neq -3 \\ -6 & , x = -3 \end{cases}$
3	الاعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الاصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - x^2 - 3$ في الفترة $[-2, 4]$:						
	A	بين 0 و 1	B	بين 1 و 2	C	بين 1 و 3	D	بين 2 و 3
4	في الشكل المجاور : سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ 						
	A	∞	B	1	C	0	D	$-\infty$

أكمل الفراغات التالية :

1	الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ غير متصلة في الفترة ....

أوجد حل ما يلي:

تعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$ حيث p الزخم (حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته المتجهة) ، m كتلة الجسم .

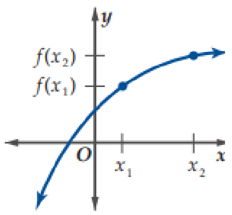
- اذا وضع رمل في شاحنة متحركة ، فماذا سيحدث اذا استمرت m في الزيادة ؟

خصائص الدالة (متزايدة – متناقصة – ثابتة) :

متزايدة

تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط
إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

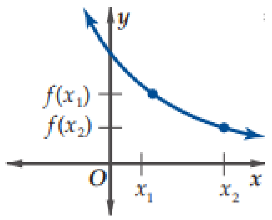
لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) < f(x_2)$
عندما $x_1 < x_2$



متناقصة

تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط
إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

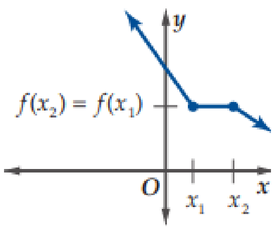
لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) > f(x_2)$
عندما $x_1 < x_2$



ثابتة

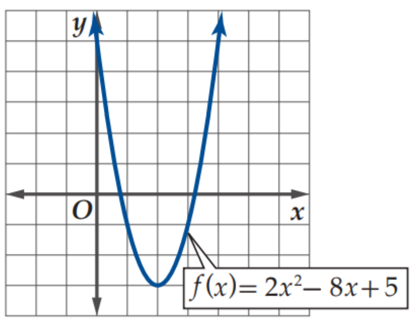
تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط
إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة .

لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) = f(x_2)$
عندما $x_1 < x_2$



مثال

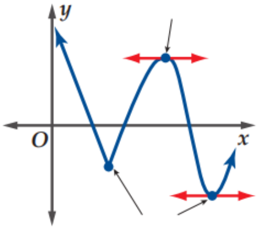
استعمل التمثيل البياني لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة
متزايدة أو متناقصة أو ثابتة :



الحل :

الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty , 2)$

الدالة متزايدة في الفترة $(2 , \infty)$



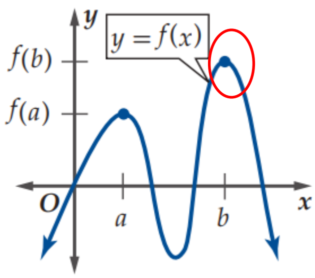
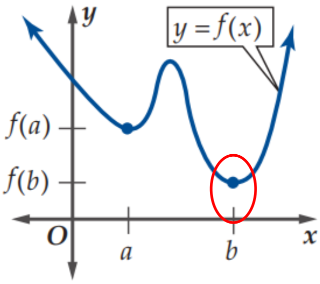
النقاط الحرجة

هي النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها

فتكون قمة أو قاعًا في منحنى الدالة .

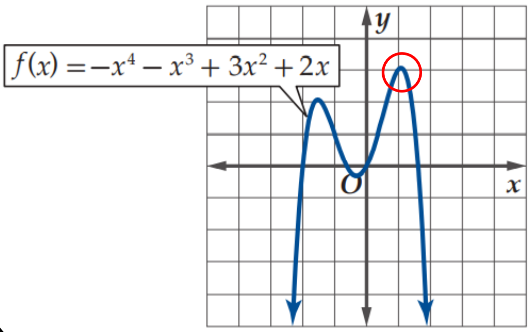
يكون المماس المرسوم للمنحنى عندها إما أفقيًا (ميله صفر) أو عموديًا (ميله غير معرف)
أو أنه لا يوجد عندها مماس ويدل ذلك على وجود قيمة عظمى أو صغرى للدالة .

القيم القصوى المطلقة

العظمى	الصغرى
	
لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأسفل والأكثر علواً هي القيمة العظمى المطلقة .	لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأعلى والأكثر نزولاً هي القيمة الصغرى المطلقة .
وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في مجالها .	وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في مجالها .
يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $b = x$	يوجد قيمة صغرى مطلقة عند $b = x$

مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى مطلقة
ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

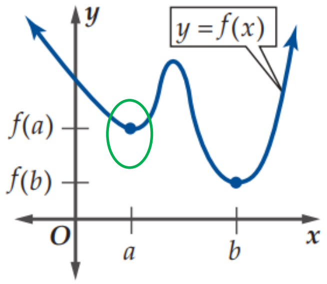
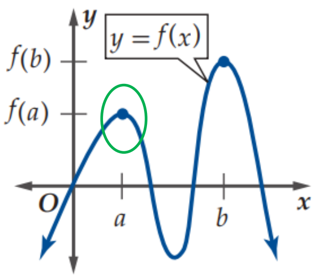


الحل :

توجد قيمة عظمى مطلقة عند $1 = x$

مقدارها $= 3$

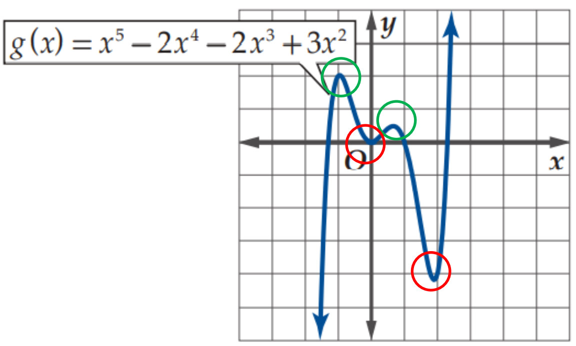
القيم القصوى المحلية

الصغرى	العظمى
	
لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . الأقل نزولًا هي قيمة صغرى محلية . وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في فترة من المجال . توجد قيمة صغرى محلية عند $x = a$	لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . الأقل ارتفاعًا هي قيمة عظمى محلية. وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في فترة من المجال . توجد قيمة عظمى محلية عند $x = a$

مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى محلية مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة ، ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

الحل :



توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$

مقدارها $= 2$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0.5$

مقدارها $= 0.5$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 0$

مقدارها $= 0$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$

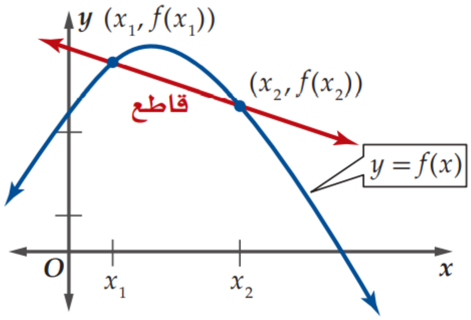
مقدارها $= -4$

متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين .

متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو :

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



القاطع : هو المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة .

مثال

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

في الفترة $[2 , 3]$

الحل :

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3) + 2$$
$$f(3) = 2$$

$$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 3(2) + 2$$
$$f(2) = -4$$

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 = 2 , x_2 = 3$$

$$m_{sec} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$$

$$= \frac{2 - (-4)}{3 - 2}$$

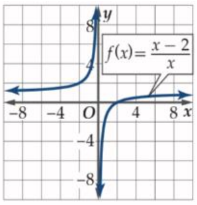
$$= 6$$

متوسط معدل التغير = السرعة المتوسطة

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 في التمثيل المجاور الدالة متزايدة في الفترة :

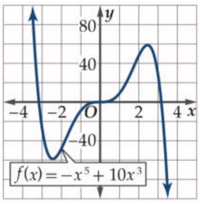


A		B		C		D	
A	$(-\infty, 0)$	B	$(0, \infty)$	C	$(0, \infty), (-\infty, 0)$	D	$(1, \infty)$

2 متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1$ في الفترة $[5, 9]$:

A	4430	B	4340	C	4500	D	4350

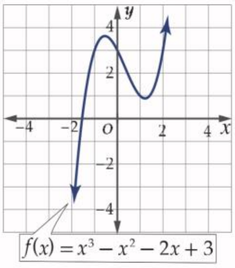
3 في التمثيل المجاور القيمة العظمى المطلقة للدالة عند .....



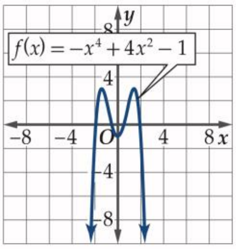
A	$x = 2$	B	$x = 2.5$	C	$x = 3$	D	لا توجد

أكمل الفراغات التالية :

1 في التمثيل المجاور قدر الفترة التي تكون فيها الدالة متناقصة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة ....



2 في التمثيل المجاور القيمة الصغرى المحلية ....



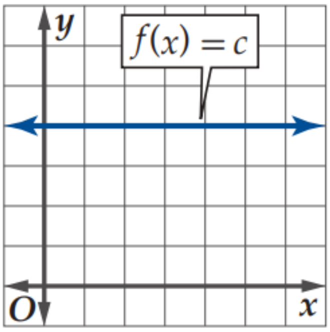
أوجد حل ما يلي:

أوجد كلًا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور ليكون حجمها أكبر ما يمكن قرب إلى أقرب جزء من عشرة . (مساحة الأسطوانة $A = 2rh\pi + r^2\pi$ وحجم الأسطوانة $V = r^2h\pi$)

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

1 الدالة الثابتة $f(x) = c$

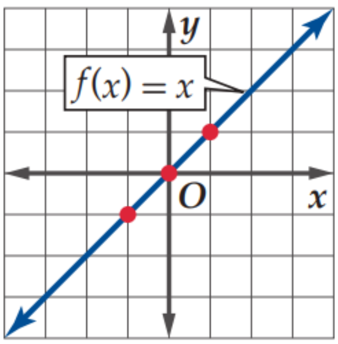
المجال	$R \quad (-\infty, \infty)$
المدى	$\{C\}$
المقطع	تقطع y عند النقطة $(0, c)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة في الفترة $(-\infty, \infty)$



c عدد حقيقي

2 الدالة المحايدة $f(x) = x$

المجال	$R \quad (-\infty, \infty)$
المدى	$R \quad (-\infty, \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$

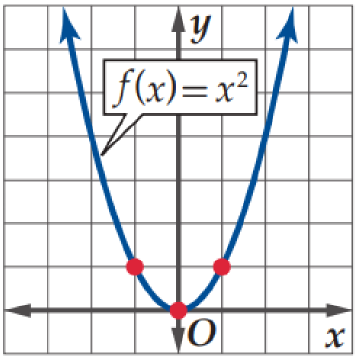


جميع النقاط الذي تمر بها الدالة إحداثياتها (a, a)

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

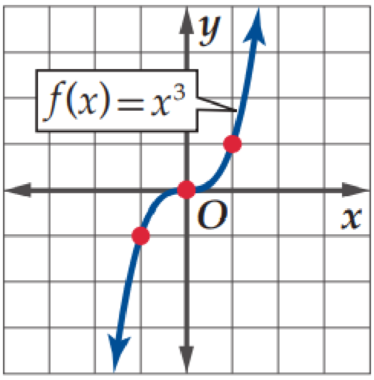
3 الدالة التربيعية $f(x) = x^2$

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R^+ \quad [0 , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty , 0)$ متزايدة في الفترة $(0 , \infty)$



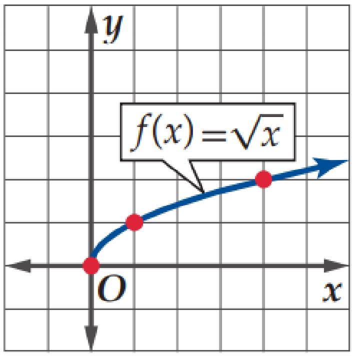
4 الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R \quad (-\infty , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	متزايدة في الفترة $(-\infty , \infty)$

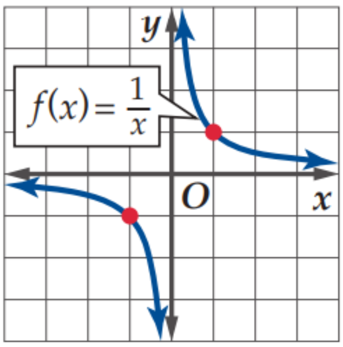


خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

5 دالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$

المجال	$R^+ \quad [0\,,\infty)$	 $x \geq 0$
المدى	$R^+ \quad [0\,,\infty)$	
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$	
التماثل	غير متماثلة	
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية	
الاتصال	متصلة	
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	
فترات التزايد والتناقص	ثابتة في الفترة $(-\infty\,,\infty)$	

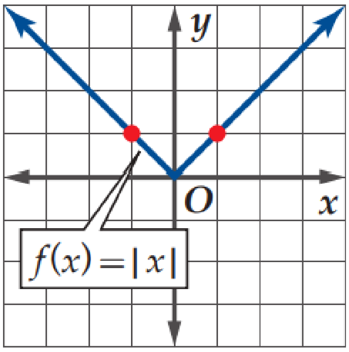
6 دالة المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$

المجال	$R - \{0\}$	 $x \neq 0$
المدى	$R - \{0\}$	
المقطع	لا يوجد	
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل	
نوع الدالة	فردية	
الاتصال	غير متصلة (لا نهائي)	
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$	
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty\,,0)\,,(0\,,\infty)$	

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

7 دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$

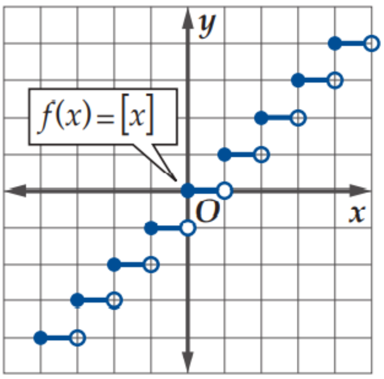
المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R^+ \quad [0 , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty , 0)$ متزايدة في الفترة $(0 , \infty)$



$$f(x) = \begin{cases} -x , & x < 0 \\ x , & x \geq 0 \end{cases}$$

8 دالة أكبر عدد صحيح $f(x) = [x]$

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	Z
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	غير متماثلة
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية
الاتصال	غير متصلة (قفزي)
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة عندما $x \notin Z$ متزايدة عندما $x \in Z$



أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x

دالة أكبر عدد صحيح هي أحد الأمثلة المشهورة على الدالة الدرجية .

التحويلات الهندسية

قياسية

تغير موقع المنحنى
ولا تغير أبعاده أو شكله .

غير قياسية

تغير موقع المنحنى
تغير شكل المنحنى .

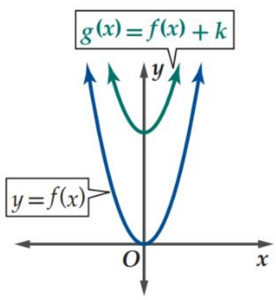
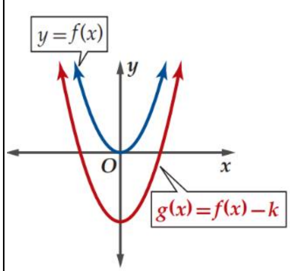
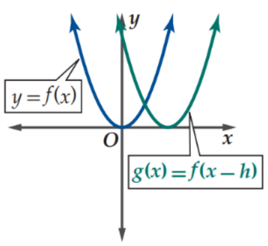
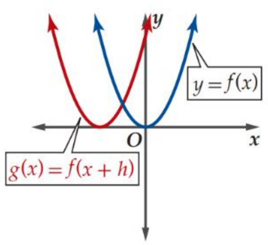
مثال

الانسحاب - الانعكاس

التمدد - تحويلات القيمة المطلقة

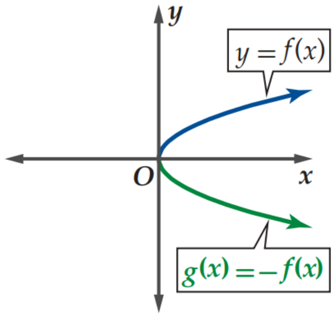
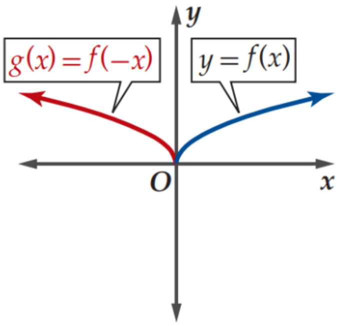
الانسحاب

تحويل ينقل منحنى الدالة فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة إلى أعلى أو أسفل ، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار.

الانسحاب			
رأسي		أفقي	
$g(x) = f(x) + k$		$g(x) = f(x - h)$	
k خارج		h داخل	
أعلى $(+)$	أسفل $(-)$	يمين $(-)$	يسار $(+)$
$g(x) = f(x) + k$	$g(x) = f(x) - k$	$g(x) = f(x - h)$	$g(x) = f(x + h)$
			

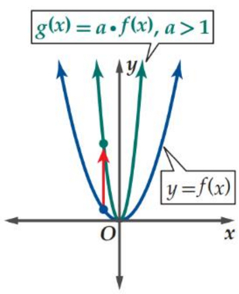
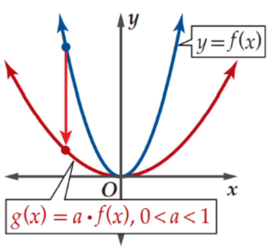
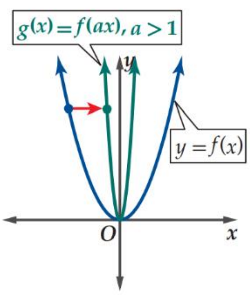
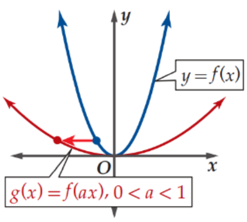
الانعكاس

تحويل يكون لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدد .

الانعكاس	
الانعكاس حول محور x	الانعكاس حول محور y
خارج $(-)$	داخل $(-)$
$g(x) = -f(x)$	$g(x) = f(-x)$
	

التمدد

تحويل يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة .

التمدد			
رأسي		أفقي	
(a خارج الدالة)		(a داخل الدالة)	
$g(x) = a.f(x)$		$g(x) = f(a.x)$	
توسع	تضيق	توسع	تضيق
$a > 1$	$0 < a < 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$
اتجاه الحركة			
↑ ↓	↓ ↑	← →	→ ←
			

التوسع الرأسي ≈ التضيق الأفقي ، التضيق الرأسي ≈ التوسع الأفقي

تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانياً

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًا باستعمال التحويلات الهندسية.

مثال

مثل الدالة بيانيًا :

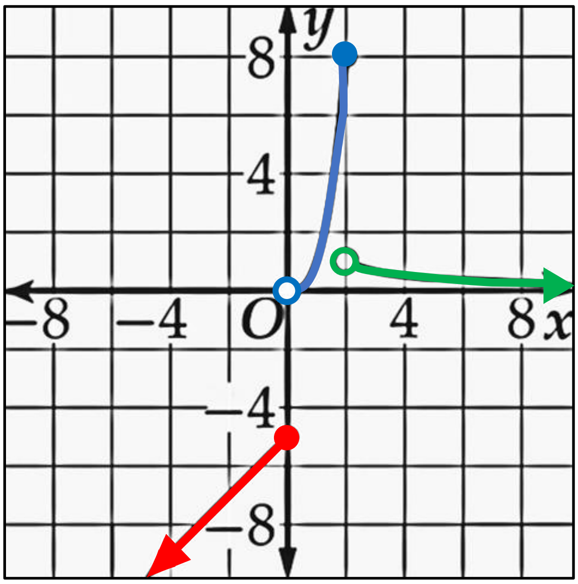
$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \le 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \le 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

الحل :

في الفترة $(-\infty, 0]$ ، أمثل الدالة $y = x - 5$

في الفترة $(0, 2]$ ، أمثل الدالة $y = x^3$

في الفترة $(2, \infty)$ ، أمثل الدالة $y = \frac{2}{x}$



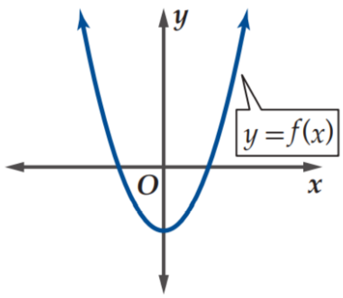
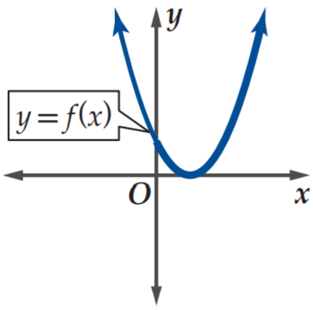
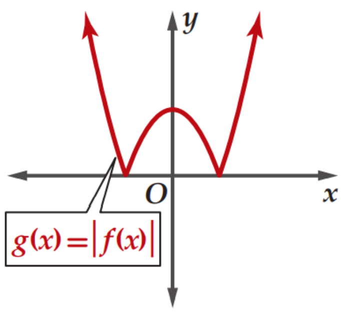
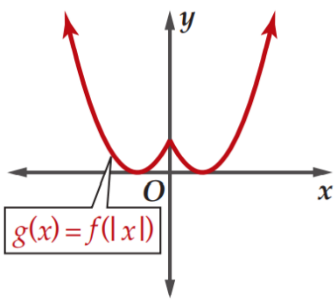
ضع دائرة مفتوحة عند

النقطة $(0\ ,0)$ والنقطة $(2, 1)$

ضع دائرة مغلقة عند

النقطة $(0\ , -5)$ والنقطة $(2, 8)$

التحويلات الهندسية لدوال القيمة المطلقة

القيمة المطلقة	
خارج	**داخل**
$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	$g(x) = f(\lvert x \rvert)$
الرسم قبل التحويل	
	
الرسم بعد التحويل	
	
طريقة الرسم	
نعكس كل جزء موجود تحت محور x ونجعله فوق محور x ثم نزيل السابق .	نزيل الجزء الموجود يسار محور y ثم نعكس المتبقي فقط حول محور y .

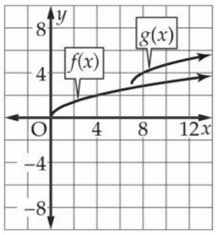
اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مدى الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ هو

A	B	C	D
R	$R - \{0\}$	W	Z

2 المعادلة التي تمثل الدالة $g(x)$ في التمثيل المجاور هي :

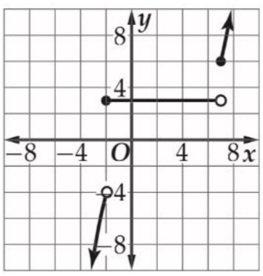


A	B	C	D
$\sqrt{x-7}+3$	$\sqrt{x+7}+3$	$\sqrt{x-7}-3$	$\sqrt{x+7}-3$

3 التحويلات التي حدثت للدالة الأم $f(x) = \|x\|$ فأصبحت $g(x) = \|x-1\| - 2$:

A	B	C	D
انسحاب وحدة لليسار ووحدتين للأسفل	انسحاب وحدة لليسار ووحدتين للأعلى	انسحاب وحدة لليمين ووحدتين للأسفل	انسحاب وحدة لليمين ووحدتين للأعلى

4 الدالة المتعددة التعريف في التمثيل المجاور هي :



A: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -2 \\ 3 & , \quad -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$

B: $f(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x < -2 \\ -x^2 & , \quad -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$

C: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -2 \\ (x-5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$

D: $f(x) = \begin{cases} (x-5)^2 + 2 & , \quad x < -2 \\ -x^2 & , \quad -2 \le x < 7 \\ 3 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$

أكمل الفراغات التالية :

1 $f(x) = x^3$ نوع الدالة .... متماثلة حول .... ومتزايدة في الفترة
.... والمنحنى يقطع المحورين عند النقطة ....

أوجد حل ما يلي:

يبين الجدول سعر سلعة منذ عام 1411 هـ حتى 1431 هـ

- استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية .

العام	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55

العمليات على الدوال

إذا كانت f , g دالتين يتقاطع مجالاهما ، فإننا نعرف عمليات الجمع ، والطرح ، والضرب والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ الضرب : $(f.g)(x) = f(x) . g(x)$

الطرح : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} , g(x) \neq 0$

إيجاد المجال

مجال $(f+g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f-g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f.g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$ − أصفار المقام

مثال

$f(x) = x^2 - 6x - 8 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$

أوجد كلا من الدوال الآتية ، ثم حدد مجالها :

الحل :

مجال $f(x)$ هو R $(-\infty , \infty)$ و مجال $g(x)$ هو $[0, \infty)$

$(f.g)(x) = x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

المجال : $[0, \infty)$

$(f+g)(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$

المجال : $[0, \infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 6x - 8}{\sqrt{x}}$

المجال : $(0, \infty)$

$(f-g)(x) = x^2 - 6x - 8 - \sqrt{x}$

المجال : $[0, \infty)$

تركيب الدوال

تركيب الدوال يعني دمج دالتين ، وهذا الدمج لا ينتج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة

وهو يعني إيجاد قيمة دالة عند دالة أخرى .

تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

تقرأ الدالة $g \circ f$ على النحو f تركيب g أو f بعد g

حيث تطبق الدالة g أولًا ثم الدالة f

مثال

إذا كانت $g(x) = x - 4$, $f(x) = x^2 + 1$ فأوجد :

الحل :

1

$[f \circ g](x)$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f(x-4)$$
$$= (x-4)^2 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 16 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 17$$

2

$[g \circ f](x)$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g(x^2+1)$$
$$= (x^2+1) - 4$$
$$= x^2 - 3$$

3

$[f \circ g](2) =$

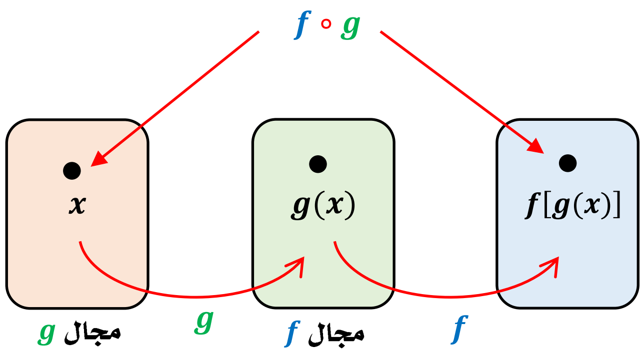
$$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$$
$$= (2)^2 - 8(2) + 17$$
$$= 5$$

مجال دالة التركيب

يتكون مجال الدالة $g \circ f$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f

نوجد مجالي الدالتين f و g قبل تركيبهما وعند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال

$g \circ f$ يكون مقيداً بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودة في مجال f



$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ايجاد مجال دالة التركيب

نوجد مجال كلًا من الدالتين f , g

$= R$ ⟵ مجال $g \circ f$ يساوي R

مجال $f \neq R$ أو مجال $g \neq R$ ⟵ نوجد مجال $g \circ f$ قبل التبسيط

مثال

حدد مجال الدالة $g \circ f$ متضمنًا القيود الضرورية ثم أوجد $f \circ g$ فيما يلي :

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad , \quad g(x) = x^2 + x$$

الحل :

مجال $f(x)$ هو $R - \{0\}$

مجال $g(x)$ هو R

نوجد التركيب

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= f[x^2 + x]$$

$$= \frac{5}{x^2 + x}$$

نوجد مجال $f \circ g$

الدالة كسرية إذن : المقام $\neq 0$

$$x^2 + x \neq 0$$

$$x(x+1) \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

المجال $\{x | x \neq 0, x \neq -1 , x \in R\}$

كتابة الدالة كتركيب دالتين

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها .

أي أنه لتفكيك دالة مثل h ، فإنك تجد دالتين g , f مثلًا بحيث يكون تركيبهما هو h .

$$h(x) = [f \circ g](x)$$

مثال

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ فيما يلي :

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

الحل :

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل :

$$h(x) = (x-1)(x-1)$$

$$h(x) = (x-1)^2$$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين :

$$g(x) = x - 1 \quad , \quad f(x) = x^2$$

وعندئذٍ :

$$h(x) = (x-1)^2$$

$$\boxed{g(x) = x - 1} \qquad \boxed{f(x) = x^2}$$

$$h(x) = [g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

اختبر نفسك

	اختر الإجابة الصحيحة :							
1	إذا كانت $f(x) = x^2 + 4, g(x) = \sqrt{x}$ فإن $(f \cdot g)(x)$ تساوي :							
	A	$x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$	B	$x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$	C	$x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$	D	$x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}}$
2	إذا كانت $f(x) = 2 + x^4, g(x) = -x^2$ فإن $[f \circ g](2)$ تساوي :							
	A	-254	B	250	C	256	D	258
3	إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 4$ ، فإن مجال $f \circ g(x)$ هو :							
	A	$R - \{\pm\sqrt{3}\}$	B	$R - \{\pm 3\}$	C	$R - \{-1\}$	D	R
	أكمل الفراغات التالية :							
1	إذا كانت $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$ فإن الدالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ و ألا تكون أيًا منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ هما .... و							
2	إذا كانت $f(x) = x^2 + 5x + 6, g(x) = x + 2$ فإن $(f - g)(x) =$							
	أوجد حل ما يلي:							

يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال .

افترض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$

- إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال ، فهل تمثل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$ ، برر إجابتك
- أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص ، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة .

العلاقات والعلاقات العكسية

يقال أن العلاقة A علاقة عكسية للعلاقة B إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (a , b) موجوداً في أحد العلاقتين ، فإن الزوج المرتب (b , a) موجودٌ في العلاقة الأخرى .

مثال :

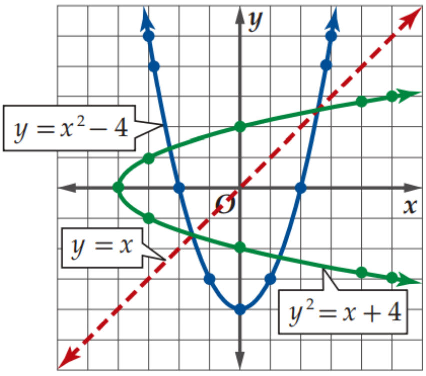
العلاقة $A = \{(1 , 5) , (2 , 10)\}$ هي علاقة عكسية لـ العلاقة $B = \{(5 , 1) , (10 , 2)\}$

وإذا مثلت العلاقة بمعادلة فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع .

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3

ملاحظة

كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$

الدالة العكسية

هي العلاقة **العكسية** لدالة f والتي تمثل دالة ، يرمز لها بالرمز f^{-1} .

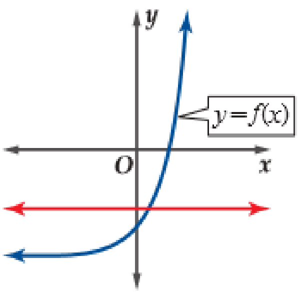
اختبار الخط الأفقي

يوجد لأي دالة f دالة **عكسية** f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل **خط أفقي** يتقاطع مع منحنى الدالة عند **نقطة واحدة** على **الأكثر** .

مثال :

بما أنه **لا يوجد خط أفقي** يقطع منحنى الدالة f **بأكثر** من نقطة

فإن الدالة **العكسية** f^{-1} موجودة .

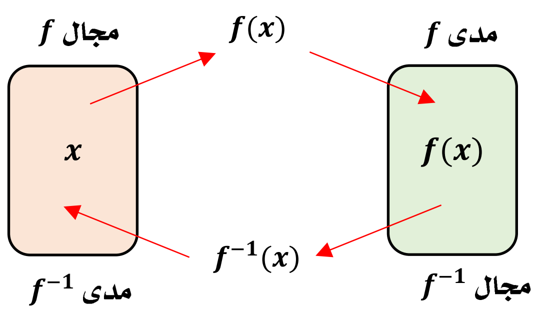


الدالة المتباينة

هي الدالة التي تحقق اختبار **الخط الأفقي** .

لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة **واحدة** فقط لـ y ، و**لا توجد** قيمة لـ y ترتبط **بأكثر** من قيمة لـ x .

إذا كانت الدالة **متباينة** فإن لها دالة **عكسية** .



إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1	التحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي .
الخطوة 2	ضع y مكان $f(x)$
الخطوة 3	بدل موقعي $x\,,y$
الخطوة 4	حل المعادلة بالنسبة للمتغير y
الخطوة 5	ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

مثال

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن .

$$f(x) = -16 + x^3$$

الحل :

الدالة متباينة باختبار الخط الأفقي

إذن يوجد دالة عكسية

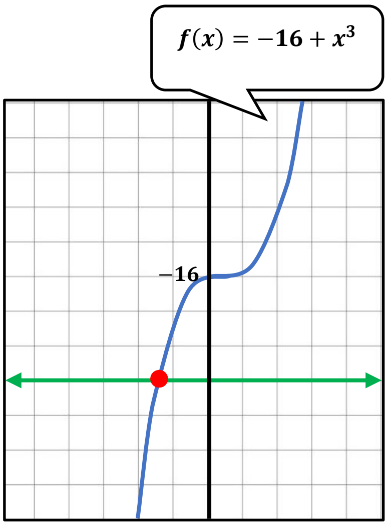
$$y = -16 + x^3$$

$$x = -16 + y^3$$

$$y^3 = x + 16$$

$$y = \sqrt[3]{x+16}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$$



تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} دالة عكسية للأخرى ، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان :

1. $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$
2. $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$

مثال

أثبت جبريًا أن كلًا من الدالتين g , f تمثل دالة عكسية للأخرى :

$f(x) = 18 - 3x$, $g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

الحل :

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f\left[6 - \frac{x}{3}\right]$$
$$= 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right)$$
$$= 18 - 18 + \frac{3x}{3}$$
$$= x$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g[18 - 3x]$$
$$= 6 - \frac{18 - 3x}{3}$$
$$= \frac{18 - 18 + 3x}{3}$$
$$= x$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ فإن كلا الدالتين $g(x)$, $f(x)$ دالة عكسية للأخرى.

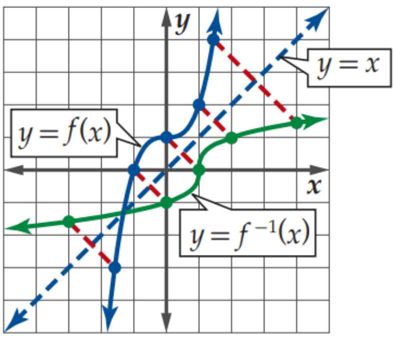
إيجاد الدالة العكسية بيانيًا

يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية

بانعكاس الدالة الأصلية

حول المستقيم $y = x$

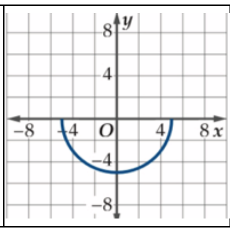
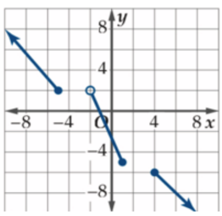
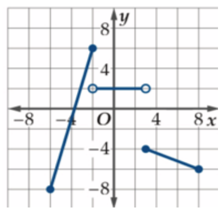
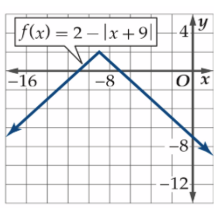
كما في المثال :



إذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل في اختبار الخط الأفقي ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	أي الدوال الآتية لها دالة عكسية :							
	A		B		C		D	
2	الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{x+8}$ هي :							
	A	$f^{-1}(x) = x+8$	B	$f^{-1}(x) = x-8$	C	$f^{-1}(x) = x^2-8$	D	$f^{-1}(x) = x^2+8$
3	اذا كانت $f(x) = \frac{3x+1}{x-4}$ فإن مجال الدالة $f^{-1}(x)$ هو :							
	A	R	B	$R-\{4\}$	C	غير موجودة	D	$R-\{3\}$

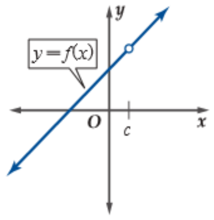
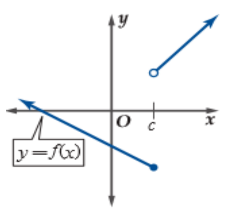
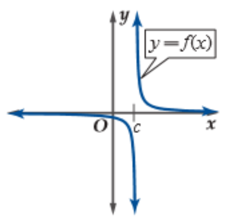
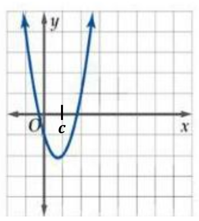
أكمل الفراغات التالية :

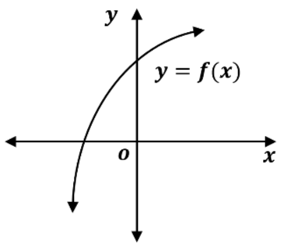
1	إذا كانت $f(x) = 4x+9$ فإن الدالة العكسية لها ....
2	إذا كانت $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$ فإن مجال الدالة العكسية لها ....

أوجد حل ما يلي:

تعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلو جرام ، x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية .

- أوجد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$ وماذا يعني كل متغير فيها .
- أثبت ان كلاً من الدالتين $f(x), f^{-1}(x)$ التي حصلت عليها تمثل عكسية للأخرى .

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :								
1	العدد الذي ينتمي إلى مجموعة الأعداد غير النسبية من بين الأعداد المعطاة هو :							
	A	-5	B	$\sqrt{15}$	C	$\sqrt{49}$	D	$\sqrt{\frac{9}{4}}$
2	مجال الدالة $f(x) = \frac{x-3}{2x-5}$:							
	A	R	B	$R-\{2\}$	C	$R-\left\{\frac{5}{2}\right\}$	D	$R-\{5\}$
3	إذا كان $f(x) = 4x^2 - 8$ فما قيمة $f(x-1)$:							
	A	$4x^2 - 8x - 4$	B	$4x^2 - 8$	C	$x^2 - 1$	D	$x - 1$
4	منحنى الدالة $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ يقطع محور y عند النقطة :							
	A	10	B	5	C	3	D	2
5	ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ إذا كان مجالها $-2 < x < 3$:							
	A	$5 < f(x) < 9$	B	$5 < f(x) < 10$	C	$1 < f(x) < 9$	D	$1 \le f(x) < 10$
6	منحنى الدالة $f(x) = x^5 - 6x^3 + 10x$ متماثل حول :							
	A	محور x	B	محور y	C	نقطة الأصل	D	المستقيم $y = x + 3$
7	الدالة $f(x) = x^3 + 5x^2 - x$ هي دالة							
	A	زوجية	B	فردية	C	زوجية وفردية معًا	D	ليست زوجية وليست فردية
8	الدالة التي تمثل عدم اتصال لانهائي عند $x = c$ هي :							
	A		B		C		D	
9	إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \ge 2 \\ ax + 1 & , x < 2 \end{cases}$ متصلة عند $x = 2$ فما قيمة a							
	A	2	B	-2	C	1	D	-1
10	الدالة $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ غير متصلة عند :							
	A	$x = 2$	B	$x = -2$	C	$x = 0$	D	$x = 4$
11	النهاية $\lim_{x\to\infty} \frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ تساوي :							
	A	15	B	10	C	5	D	2

	اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
12	في أي الفترات يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$							
	A	$[6\,,7]$	B	$[7\,,8]$	C	$[8\,,9]$	D	$[9\,,10]$
13	في الشكل المجاور : الدالة $y = f(x)$ 							
	A	متزايدة	B	متناقصة	C	ثابتة	D	متذبذبة
14	أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^2 - 3x - 4$ في الفترة $[3\,,5]$							
	A	3	B	4	C	5	D	6
15	مدى الدالة $f(x) = [x]$ هو :							
	A	N	B	W	C	R	D	Z
16	إذا كان منحنى $g(x)$ ينتج من منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ بانسحاب وحدتين لليسار ثم انعكاس حول محور x ثم انسحاب ثلاث وحدات إلى الأسفل فأي مما يلي يمثل الدالة $g(x)$							
	A	$\sqrt{-x+2} - 3$	B	$-\sqrt{x+2} - 3$	C	$-\sqrt{x-2} + 3$	D	$\sqrt{x+2} - 3$
17	ما مدى الدالة $f(x) = \lvert x - 2 \rvert + 3$							
	A	$(0\,,\infty)$	B	$[3\,,\infty)$	C	$(2\,,\infty)$	D	$(1\,,\infty)$
18	إذا كان $g(x) = x - 3$, $f(x) = x^2 + 1$ ماهي النقطة التي تجعل $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$							
	A	$x = 1$	B	$x = -1$	C	$x = 2$	D	$x = -2$
19	إذا كان $g(2) = 5\,, f(3) = 4\,, g(3) = 2\,, f(2) = 3$ فما قيمة $[f \circ g](3)$							
	A	2	B	3	C	4	D	5
20	معكوس الدالة $f(x) = 3x - 1$ هو $f^{-1}(x)$ وتساوي :							
	A	$3x + 1$	B	$-3x + 1$	C	$\dfrac{x+1}{3}$	D	$x + \dfrac{1}{3}$
21	لتكن $f(x)$ دالة متصلة على R ، ولها قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x = 3$ ، وقيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = -2$ ، أي التالي صحيح دائمًا؟							
	A	القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية	B	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	C	للدالة صفر في الفترة $[-2\,,3]$	D	الدالة زوجية

2-1 الدوال الأسية

الدرس | اختبر نفسك

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

الدرس | اختبر نفسك

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

الدرس | اختبر نفسك

2-4 خصائص اللوغاريتمات

الدرس | اختبر نفسك

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

الدرس | اختبر نفسك

2-6 اللوغاريتمات العشرية

الدرس | اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

الدالة الأسية

دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة : $y = ab^x$

$a \neq 0 , b > 0 , b \neq 1$

أمثلة

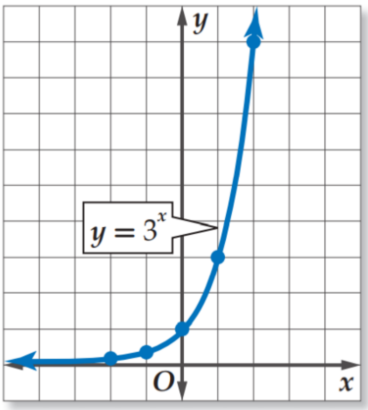
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = 4^x$ $y = 2(3)^x$

تمثيل الدالة الأسية

1 عندما $a > 0$, $b > 1$

تمثيل الدالة الأسية $y = 3^x$

y	$(3)^x$	x
$\frac{1}{9}$	$(3)^{-2}$	-2
$\frac{1}{3}$	$(3)^{-1}$	-1
1	$(3)^0$	0
3	$(3)^1$	1
9	$(3)^2$	2



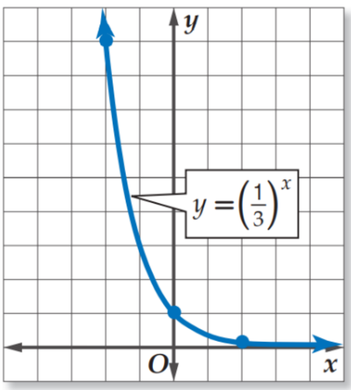
نوعها	تزايدية
المجال	R
المدى	R^+
المقطع y	$a = 1$
خط التقارب	(خط أفقي) محور x

تمثيل الدالة الأسية

2 عندما $a > 0$ ، $0 < b < 1$

تمثيل الدالة الأسية $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	$\frac{1}{9}$

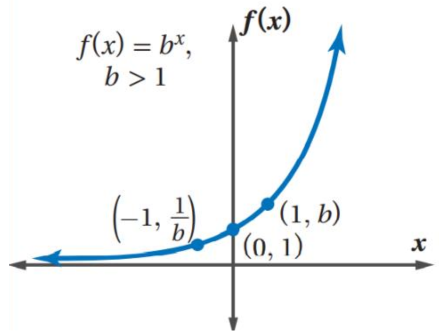
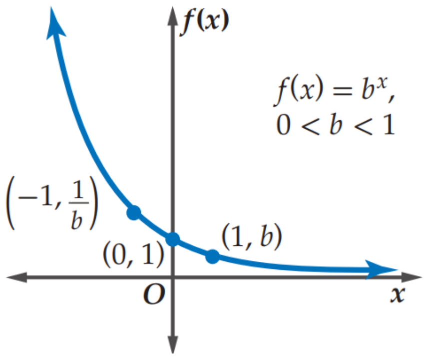


نوعها	تناقصية
المجال	R
المدى	R^+
المقطع y	$a = 1$
خط التقارب	(خط أفقي) محور x

ملاحظات

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم ، فمثلًا تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة .
- إذا كانت $a < 0$ أي قيمة a سالبة ، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x

الدوال الرئيسة " الأم " للدوال الأسية

الدوال الرئيسة " الأم " لدوال النمو الأسي	الدوال الرئيسة " الأم " لدوال الاضمحلال الأسي
صورتها	
$f(x) = b^x \quad , b > 1$	$f(x) = b^x \quad , \quad 0 < b < 1$
تمثيلها البياني	
	
خصائص منحنى الدالة	
متصل – متباين – متزايد	متصل – متباين – متناقص
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
خط التقارب	
المحور x	المحور x
مقطع المحور y	
1	1

النمو الأسي

$$A(t) = a(1+r)^t$$

t الفترة الزمنية ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للنمو

الأساس $(1+r)$ يسمى عامل النمو.

تستعمل عادةً لتمثيل النمو السكاني .

مثال

بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة $1425-1431$ 2% تقريبًا .

إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ

أوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة .

الحل :

$$y = a(1+r)^t$$
$$y = 22678262(1+0.02)^t$$

الاضمحلال الأسي

$$A(t) = a(1-r)^t$$

t الفترة الزمنية ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للاضمحلال

الأساس $(1-r)$ يسمى عامل الاضمحلال .

وتستعمل عادةً في التطبيقات المالية .

مثال

سيارة كان سعرها 80000 ريال ، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة

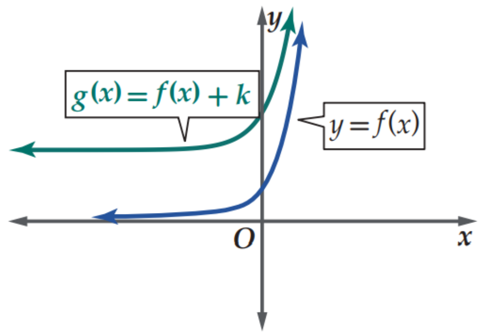
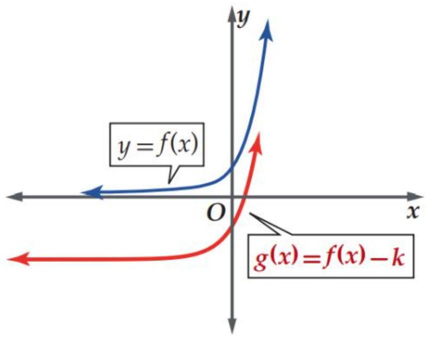
أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها .

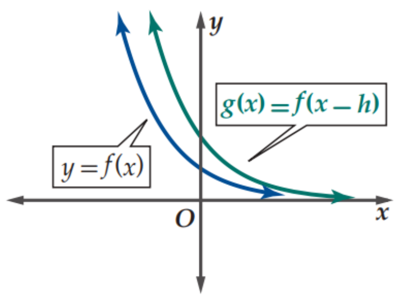
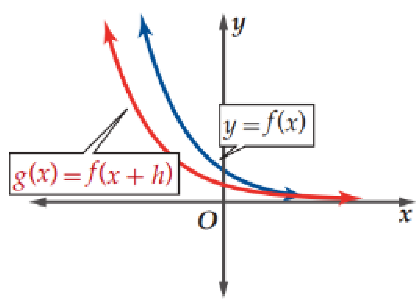
الحل :

$$y = a(1-r)^t$$
$$y = 80000(1-0.15)^t$$

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم)

لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

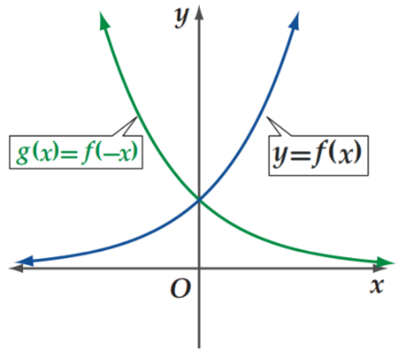
الانسحاب	
رأسي	
$g(x) = f(x) + k$	
خارج k	
أعلى$(+)$	أسفل$(-)$
$g(x) = f(x) + k$	$g(x) = f(x) - k$
	

الانسحاب	
أفقي	
$g(x) = f(x - h)$	
داخل h	
يمين $(-)$	يسار $(+)$
$g(x) = f(x - h)$	$g(x) = f(x + h)$
	

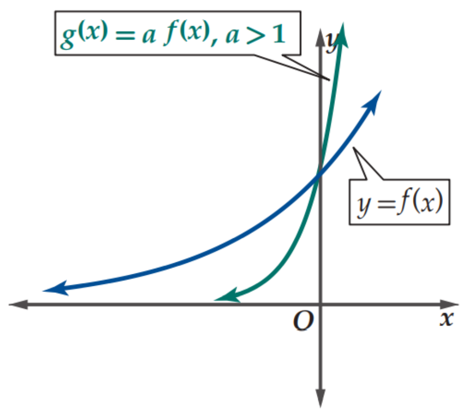
التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم)

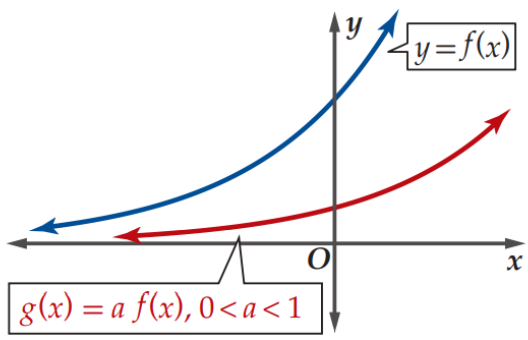
لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

الانعكاس
الانعكاس حول المحور y
$g(x) = f(-x)$



التمدد	
رأسي	
$g(x) = a.f(x)$	
توسع	تضيق
$a > 1$	$0 < a < 1$





إيجاد مدى الدالة الأسية

الصورة الأصلية

$f(x) = b^x$

$f(x) = ab^x$

$a > 0$

$0 < b < 1$

مثال : $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

المدى: R^+ ، $(0, \infty)$

$\{y |\, y > 0\}$

$b > 1$

مثال : $y = 2^x$

المدى: R^+ ، $(0, \infty)$

$\{y |\, y > 0\}$

الدالة متأثرة بالانسحاب

الانسحاب الرأسي

للأسفل $(-)$	للأعلى $(+)$
$y = 2^{x+3} - 5$	$y = 2^x + 1$
المدى: $\{y \mid y > -5\}$	المدى: $\{y \mid y > 1\}$
$y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$	$y = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} + 3$
المدى: $\{y \mid y > -1\}$	المدى: $\{y \mid y > 3\}$

الانسحاب الأفقي **لا يؤثر** على المدى

الدالة متأثرة بالانعكاس

حول محور x

$f(x) = -f(x)$

نغير اتجاه إشارة التباين $(<)$

$y = -2^x$

المدى: $\{y \mid y < 0\}$

$y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$

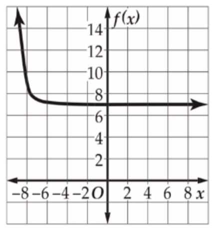
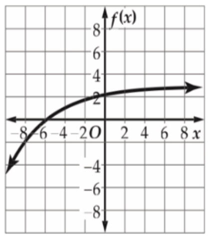
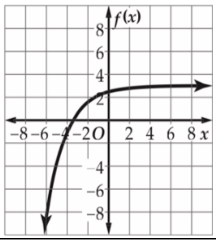
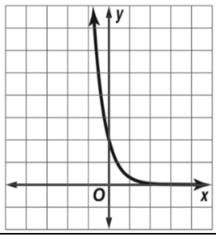
المدى: $\{y \mid y < 2\}$

الانعكاس حول محور y **لا يؤثر** على المدى

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 التمثيل البياني الصحيح للدالة $y = 2(\frac{1}{6})^x$ هو :

A		B		C		D	
A		B		C		D	

2 مجال الدالة $f(x) = 2^{x+1} + 3$ هو :

A	B	C	D
R	$(3, \infty)$	$(-\infty, 3)$	$(-3, 3)$

3 مدى الدالة $f(x) = 2(\frac{2}{3})^{x-3} - 4$ هو :

A	B	C	D
R	$(-4, \infty)$	$(4, \infty)$	$(-\infty, 4)$

أكمل الفراغات التالية :

1 إذا كانت $y = 2(8)^x$ فإن قيمة $2(8)^{-0.5}$ تساوي ....

2 التحويلات التي حدثت للدالة الأم $f(x) = 3^x$ فأصبحت $g(x) = 3^{x-2} + 4$ هي
....

أوجد حل ما يلي:

سيارة كان سعرها 80000 ريال ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة.

- أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها ثم قدر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها .

المعادلة الأسية

هي معادلة تتضمن متغيرات في موقع الأس .

خاصية المساواة للدوال الأسية

إذا كان $b \neq 1 , b > 0$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

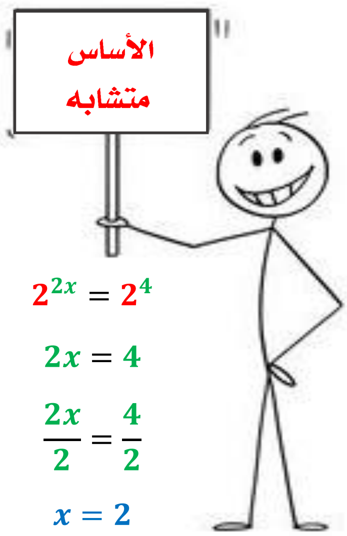
مثال: إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$ وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$

مثال

حل كل معادلة مما يأتي :

$2^{2x} = 2^4$ $\qquad$ $2^x = 8^3$

الحل :



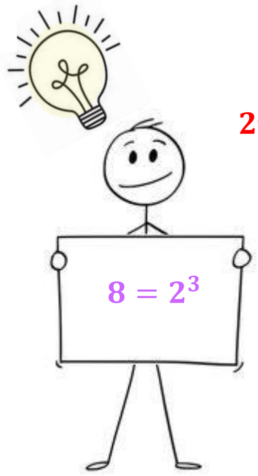
$$2^{2x} = 2^4$$

$$2x = 4$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

$$2^x = 8^3$$



$$2^x = (2^3)^3$$

$$2^x = 2^9$$

$$x = 9$$

الربح المركب

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

A المبلغ الكلي بعد t سنة ، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال

استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4.3% ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر . ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين ؟

الحل :

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 70000\left(1+\frac{0.043}{12}\right)^{(12)(7)}$$

$$A \approx 94533.78$$

المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر ، حيث الأساس موجب.

حل المتباينات الأسية

لدالة النمو

إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$
إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$
وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$

لدالة الاضمحلال

إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$
إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$
وإذا كان $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$

مثال

حل المتباينة :

$$10^{5b+2} > 1000$$

الحل :

$$10^{5b+2} > 10^3$$

$$5b+2 > 3$$

$$5b > 1$$

$$b > \frac{1}{5}$$

حل المتباينة :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$$

الحل :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3t+5)} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{5(t-6)}$$

$$2(3t+5) \leq 5(t-6)$$

$$6t+10 \leq 5t-30$$

$$t \leq -40$$

$3^2 = 9$

$3^5 = 243$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	قيمة x في المعادلة $3^{5x} = 27^{2x-4}$ هي :							
	A	$x = 10$	B	$x = 12$	C	$x = -8$	D	$x = -3$
2	حل المتباينة الأسية $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$:							
	A	$y \geq \frac{3}{5}$	B	$y \leq \frac{3}{5}$	C	$y \leq \frac{-3}{5}$	D	$y \geq \frac{-3}{5}$

أكمل الفراغات التالية :

1	قيمة x في المعادلة $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$ ....
2	حل المتباينة الأسية $10^{5b+2} > 1000$ ....

أوجد حل ما يلي:

استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 2.25% ، بحيث تضاف الارباح الى رأس المال مرتين شهريًا.

- ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات ، إلى أقرب منزلتين عشريتين .

اللوغاريتم للأساس b

اللوغاريتم : هو الأس y الذي يجعل المعادلة $x = b^y$ صحيحة .

فإذا كان b , x عددين موجبين و $b \neq 1$ تكتب على الصورة $y = \log_b x$

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية

$x , b > 0 , b \neq 1$

$$\log_b x = y \qquad b^y = x$$

التحويل من ...

الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

$\log_4 16 = 2$

$4^2 = 16$

مثال

الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

$125^{\frac{1}{3}} = 5$

$\log_{125} 5 = \dfrac{1}{3}$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد قيمة ما يلي :

$\log_3 81$

الحل :

$\log_3 81 = y$

$3^y = 81$

$3^y = 3^4$

$y = 4$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0 , b \neq 1$

x عدد حقيقي فإن :

1

$\log_b 1 = 0$

التبرير :

$b^0 = 1$

مثال :

$\log_6 1 = 0$

2

$\log_b b = 1$

التبرير :

$b^1 = b$

مثال :

$\log_{10} 10 = 1$

3

$\log_b b^x = x$

التبرير :

$b^x = b^x$

مثال :

$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

4

$b^{\log_b x} = x , x > 0$

التبرير :

$\log_b x = \log_b x$

مثال :

$3^{\log_3 1} = 1$

ملاحظات

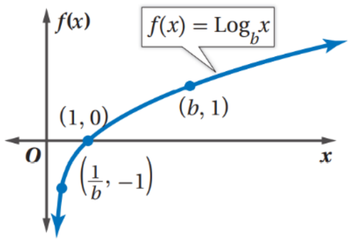
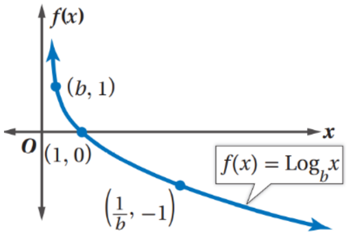
- لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$
- $\log_b 0$ غير معرف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x

الدالة اللوغاريتمية

هي دالة تكتب على الصورة : $f(x) = \log_b x$

حيث $b \neq 1$ و $b > 0 , x$

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

<table>
<tr><th colspan="2">الدوال الرئيسة " الأم "</th></tr>
<tr><td colspan="2">صورتها</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \log_b x \quad , b > 1$</td><td>$f(x) = \log_b x \quad , 0 < b < 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">تمثيلها البياني</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">خصائص منحنى الدالة</td></tr>
<tr><td>متصل – متباين – متزايد</td><td>متصل – متباين – متناقص</td></tr>
<tr><td colspan="2">المجال</td></tr>
<tr><td>مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+</td><td>مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+</td></tr>
<tr><td colspan="2">المدى</td></tr>
<tr><td>مجموعة الأعداد الحقيقية R</td><td>مجموعة الأعداد الحقيقية R</td></tr>
<tr><td colspan="2">خط التقارب</td></tr>
<tr><td>المحور y</td><td>المحور y</td></tr>
<tr><td colspan="2">مقطع المحور x</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

مثال

مثل الدالة $f(x) = \log_5 x$ بيانياً :

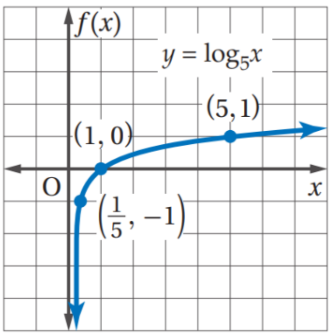
الحل :

$\frac{1}{b}$	-1
1	0
b	1

الأساس $b = 5 > 1$

$\frac{1}{5}$	-1
1	0
5	1

المنحنى متصل ومتزايد.



مثال

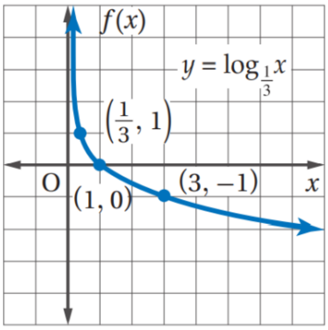
مثل الدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ بيانياً :

الحل :

-1	$\frac{1}{b}$
0	1
1	b

الأساس $b = \frac{1}{3},\ 0 < \frac{1}{3} < 1$

-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$



المنحنى متصل ومتناقص.

ملاحظة

يمكن تطبيق التحويلات الهندسية لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً تماماً كما في الدوال الأسية .

إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

لابد أن تكون الدالة متباينة .

نستبدل x بـ y والعكس .

نحول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية ونجعل y في طرف .

مثال

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$

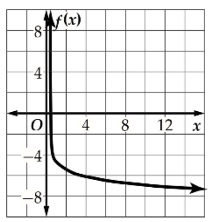
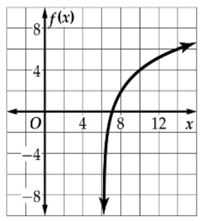
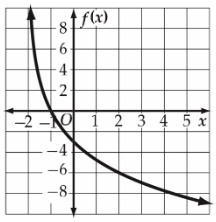
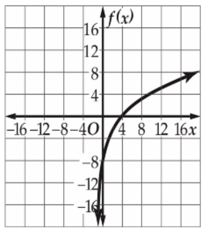
الحل :

$y = 0.5^x$ متباينة فإن لها دالة عكسية

$$x = 0.5^y$$

$$y = \log_{0.5} x$$

اختبر نفسك

	اختر الإجابة الصحيحة :							
1	الصورة الأسية للمعادلة اللوغاريتمية $\log_5 625 = 4$:							
	A	$5^4 = 625$	B	$4^5 = 625$	C	$4^{625} = 5$	D	$5^{625} = 4$
2	التمثيل الصحيح البياني للدالة $f(x) = 4\log_4(x-6)$ هو :							
	A		B		C		D	
3	قيمة $\log_{27} 3$ هي :							
	A	$\frac{1}{9}$	B	3	C	$\frac{1}{3}$	D	9

	أكمل الفراغات التالية :
1	الصورة اللوغاريتمية للمعادلة الأسية $6^{-3} = \frac{1}{216}$ ....
2	قيمة $\log_{10} 0.01$ ....

أوجد حل ما يلي:

تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصور .

أعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر ولكن الجو كان غائماً.

- إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟

خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

إذا كان b عدداً موجباً حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

خصائص اللوغاريتمات

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

لوغاريتم حاصل الضرب هو **مجموع** لوغاريتمات عوامله .

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

مثال :

استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$

الحل :

$$\log_4 32 = \log_4(16 \times 2)$$
$$= \log_4(4^2 \times 2)$$
$$= \log_4 4^2 + \log_4 2$$
$$= 2 + 0.5$$
$$= 2.5$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم **مطروحاً** منه لوغاريتم المقسوم عليه.

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال:

استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$

الحل :

$$\log_3 4.5 = \log_3 \left(\frac{9}{2}\right)$$
$$= \log_3 9 - \log_3 2$$
$$= \log_3 3^2 - \log_3 2$$
$$= 2 - 0.63$$
$$= 1.37$$

خاصية لوغاريتم القوة

لوغاريتم القوة يساوي حاصل **ضرب** الأس في لوغاريتم أساسها.

لأي عدد حقيقي m وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال:

استعمل $\log_3 7 \approx 1.7712$ فقرب قيمة $\log_3 49$

الحل :

$$\log_3 49 = \log_3 (7)^2$$
$$= 2 \log_3 7$$
$$= 2\,(1.7712)$$
$$= 3.5424$$

ملاحظة

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات .

$$\log_a (x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$$

تبسيط العبارات اللوغاريتمية

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، احسب قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$

الحل :

بما أن الأساس 6 نعبر عن $\sqrt[3]{36}$ على صورة قوة 6

$$\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 36^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_6 (6^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_6 (6)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \log_6 6$$

$$= \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

كتابة العبارات اللوغاريتمية

مثال

الصورة المطولة

اكتب العبارة بالصورة المطولة :

$$\log_{13} 6a^3bc^4$$

الحل :

$$= \log_{13} 6 + \log_{13} a^3 + \log_{13} b + \log_{13} c^4$$

$$= \log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$$

الصورة المختصرة

اكتب العبارة بالصورة المختصرة :

$$= -5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$$

الحل :

$$= \log_2 (x+1)^{-5} + \log_2 (6x)^3$$

$$= \log_2 (x+1)^{-5}(6x)^3$$

$$\log_2 \frac{(6x)^3}{(x+1)^5}$$

$$\log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	قيمة $4\log_2\sqrt{8}$:							
	A	2	B	4	C	8	D	6
2	كتابة العبارة اللوغاريتمية $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3(8c)$ بالصورة المختصرة :							
	A	$\log_3 \frac{a^7b}{64c^2}$	B	$\log_3 \frac{a^7b}{16c^2}$	C	$\log_3 \frac{64c^2}{a^7b}$	D	$64\log_3 \frac{a^7b}{c^2}$
3	العبارة المختلفة عن العبارات الأخرى هي : $\log_b 24 =$							
	A	$\log_b 4 + \log_b 6$	B	$\log_b 20 + \log_b 4$	C	$\log_b 2 + \log_b 12$	D	$\log_b 3 + \log_b 8$

أكمل الفراغات التالية :	
1	إذا كانت قيمة $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ فإن قيمة $\log_4 15$ ....
2	كتابة العبارة اللوغاريتمية $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$ بالصورة المطولة ....

أوجد حل ما يلي:

يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع ، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} p)$ ، حيث p الضغط بالباسكال .

- أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه .

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

حل المعادلات اللوغاريتمية

1

تحتوي على لوغاريتم واحد .
تحول إلى الصيغة الأسية ثم نوجد الحل .

مثال

حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$

الحل :

$$9^{\frac{3}{2}} = x$$

$$(3)^{2\left(\frac{3}{2}\right)} = x$$

$$x = 27$$

2

تحتوي على لوغاريتمات في كلا الطرفين .
تستخدم خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية للمساواة
ثم نوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

مثال

حل المعادلة $\log_2 x^3 = \log_2 8$

الحل :

$$x^3 = 8$$

$$x^3 = 2^3$$

$$x = 2$$

3

تحتوي على أكثر من لوغاريتم في الطرف الواحد .
نختصرها باستخدام خصائص اللوغاريتمات ثم تحول
إلى الصورة الأسية ونوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

مثال

حل المعادلة $2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

الحل :

$$\log_7 x^2 = \log_7 (27)(3)$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \pm 9$$

$x = 9$ و نستبعد $x = -9$ لأنه لا يوجد لوغاريتم لعدد سالب .

حل المتباينات اللوغاريتمية

1 تحتوي على لوغاريتم واحد .
إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$
فإن $x > b^y$

مثال أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$

الحل :

$x \geq 4^3$

$x \geq 64$

مجموعة الحل :
$\{x |\ x \geq 64 , x \in R\}$

عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرفًا

2 تحتوي على لوغاريتمات في كلا الطرفين .
إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$
إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال أوجد مجموعة حل المتباينة

$$\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$$

الحل :

1

$2x > 6x - 8$

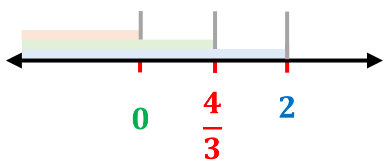
$-4x > -8$

$\frac{-4x}{-4} < \frac{-8}{-4}$

$x < 2$

2 لتحديد الفترة كاملة

- $2x \leq 0$
  $x \leq 0$
- $6x - 8 \leq 0$
  $6x \leq 8$
  $x \leq \frac{4}{3}$



3 مجموعة الحل :

$$\left\{x \middle|\ \frac{4}{3} < x < 2 , x \in R\right\}$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :	
1	حل المعادلة $\log_x 32 = \frac{5}{2}$:
	A: 2 — B: 4 — C: 8 — D: 6
2	حل المتباينة $\log_8 x \le -2$:
	A: $\{x \mid 0 \le x \le \frac{1}{64}\}$ — B: $\{x \mid 1 < x \le \frac{1}{64}\}$ — C: $\{x \mid 0 < x \le 64\}$ — D: $\{x \mid 0 < x \le \frac{1}{64}\}$
أكمل الفراغات التالية :	
1	حل المعادلة $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ ....
2	حل المتباينة $\log_2(4x-6) > \log_2(2x+8)$ ....
أوجد حل ما يلي:	

يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $\mathrm{L} = 10\log_{10}\mathrm{R}$ ، حيث R هي شدة الصوت .

- احسب شدة الصوت لمنبه ارتفاع صوته 80 ديسبل .

اللوغاريتمات العشرية

هو لوغاريتم أساسه 10

تكتب دون كتابة الأساس 10

$$\log_{10} x = \log x \quad , \quad x > 0$$

إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log\ x$ كونه أمرًا أساسيًا

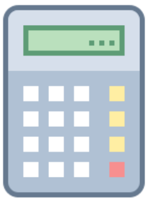
ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

مثال

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة ما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

$\log 7$

الحل :



اضغط على المفاتيح : = ENTER 7 LOG

$$\log 7 \approx 0.8451$$

خصائص اللوغاريتمات العشرية

1	$10^y = x$	$\log x = y$
2	$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
3	$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
4	$10^m = 10^m$	$\log 10^m = m$

حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسية بدلالة الأساس نفسه ، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين .

مثال

حل المعادلة $3^x = 15$ وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$3^x = 15$$

$$\log 3^x = \log 15$$

$$x \log 3 = \log 15$$

$$x = \frac{\log 15}{\log 3}$$

$$x \approx 2.4650$$

حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

يمكن استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسية لحل متباينات أسية .

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{2x} \geq 6^{x+1}$
وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1}$$

$$2x \log 3 \geq (x+1)\log 6$$

$$2x \log 3 \geq x \log 6 + \log 6$$

$$2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$$

$$x(2\log 3 - \log 6) \geq \log 6$$

$$x \geq \frac{\log 6}{2\log 3 - \log 6}$$

$$\{x | x \geq 4.4190 , x \in R\}$$

عند الضرب أو القسمة على عدد سالب يتغير اتجاه إشارة التباين . لذا لابد قبل القسمة على المقدار $2\log 3 - \log 6$ معرفة إذا كان موجبًا أم سالبًا .

هنا المقدار موجب لذا تبقى إشارة التباين كما هي .

صيغة تغيير الأساس

هي صيغة تستخدم لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف .

لأي أعداد موجبة n, b, a ، حيث $a \neq 1$ ، $b \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$\log_b n$ ← لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b

$\log_b a$ ← لوغاريتم الأساس القديم للأساس b

مثال :

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

مثال

اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري ، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$\log_6 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} = \frac{\log 8}{\log 6}$$

$$\approx 1.1606$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	قيمة $\log 3.2$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :							
	A	0.4312	B	0.7621	C	0.5051	D	0.0621
2	حل المعادلة $6^x = 40$ مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف هو :							
	A	0.7328	B	1.2365	C	3.7531	D	2.0588
أكمل الفراغات التالية :								
1	كتابة اللوغاريتم $\log_3 7$ بدلالة اللوغاريتم العشري .... وقيمته							
2	حل المتباينة $5^{4n} > 33$							
أوجد حل ما يلي:								

اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال . افترض أن $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ ، حيث t الزمن بالسنوات التي مرت منذ الشراء ، p سعر الشراء ، V السعر الحالي ، r المعدل السنوي لانخفاض السعر .

- إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال ، وانخفض سعرها بمعدل 15% سنوياً ، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة ؟
- إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال ، وانخفض سعرها بمعدل 10% سنوياً ، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة ؟

	اختر الإجابة الصحيحة:							
1	منحنى الدالة الأسية $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ يقطع محور y في النقطة ..							
	A	$(0,0)$	B	$(0,1)$	C	$(1,0)$	D	$(1,1)$
2	إذا كانت $3^{x-1} = 27$ فإن قيمة x هي :							
	A	$x = 6$	B	$x = 5$	C	$x = 4$	D	$x = 3$
3	ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$:							
	A	-1	B	0	C	1	D	2
4	إذا كان $3^x \geq 9$ فإن قيمة x هي :							
	A	$x \leq 9$	B	$x < 2$	C	$x \geq 2$	D	$x > 2$
5	ما قيمة x التي تحقق المتباينة $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{8} < 0$							
	A	$x < -8$	B	$x < -3$	C	$x > \frac{1}{2}$	D	$x > 3$
6	إذا كان $\log_2 x = 3$ فإن x تساوي :							
	A	2	B	3	C	5	D	8
7	الصورة الأسية المكافئة للصورة اللوغاريتمية $\log_x 8 = 3$ هي :							
	A	$x^3 = 8$	B	$3^x = 8$	C	$8^3 = x$	D	$x^8 = 3$
8	منحنى الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_b x$ يقطع محور x في النقطة ...							
	A	$(0,0)$	B	$(0,1)$	C	$(1,1)$	D	$(1,0)$
9	ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_2(x+1) + 3$							
	A	3	B	2	C	1	D	0
10	ما قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$							
	A	6	B	1	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{2}{3}$
11	مجال الدالة $f(x) = \log_2 x$ يساوي ...							
	A	R	B	$[2,\infty)$	C	R^+	D	W
12	مدى الدالة $f(x) = \log_3 x$ يساوي							
	A	R	B	$[3,\infty)$	C	R^+	D	W
13	ما قيمة المقدار $\log_3 13 - \log_3 5$							
	A	$\log_5 13$	B	$\log_3 \frac{13}{5}$	C	$\log_{13} 5$	D	$\frac{13}{5}$
14	ما قيمة $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$							
	A	1	B	2	C	3	D	6
15	قيمة العبارة $\log_2(\log_2 x^{24}) - \log_2(\log_2 x^3)$							
	A	2	B	3	C	4	D	8

اختر الإجابة الصحيحة:

16	الصورة المختصرة للمقدار $3\log_5 x - 4\log_5 y + 2\log_5 z$							
	A	$\log_5 \frac{x^3z^2}{y^4}$	B	$\frac{x^3z^2}{y^4}$	C	$\log_5 \frac{x^2y^4}{z^2}$	D	$\log_5 x^3y^4z^2$
17	حل المعادلة $\log_2(x^2-4) = \log_2 3x$							
	A	4	B	2	C	-1	D	-2
18	ما قيمة $\log_{100} 10$							
	A	1	B	-1	C	$\frac{1}{2}$	D	2
19	إذا كانت $f(x) = \log x$ بحيث $1 \le x \le 10$ فإن :							
	A	$1 \le f(x) \le 10$	B	$0 \le f(x) \le 1$	C	$0 \le f(x) \le 10$	D	$10 \le f(x) \le 100$
20	أي مما يلي حلًا للمعادلة $\log_4 x - \log_4(x-1) = \frac{1}{2}$							
	A	$-\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{2}$	C	-2	D	2
21	إذا كان $\log_4 x \ge 2$ فإن :							
	A	$x \ge 2$	B	$x \ge 4$	C	$x \ge 8$	D	$x \ge 16$
22	ما مقطع y للدالة $y = 4^x - 1$							
	A	4	B	1	C	-1	D	0
23	إذا كان $\log_2 3 = b$ و $\log_2 5 = a$ ، أوجد قيمة $\log_2 \frac{25}{9}$							
	A	$\frac{a^2}{b^2}$	B	$\frac{2a}{b}$	C	$\frac{b}{a}$	D	$2(a-b)$
24	إذا كان $\log_4 5 = 1.16$ ، فإن $\log_4 100$ هو :							
	A	3.32	B	4	C	25	D	2.32
25	ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$							
	A	-5	B	$\frac{-1}{5}$	C	$\frac{1}{5}$	D	5
26	إذا كان $\left(\frac{1}{5}\right)^x \le 125$ ، فإن قيمة x هي :							
	A	$x \le 5$	B	$x \le -3$	C	$x \ge -3$	D	$x = 3$
27	أوجد حل المعادلة $\log_4(\log_2(\log_2(2x+8))) = \frac{1}{2}$							
	A	$\frac{1}{2}$	B	2	C	4	D	8
28	إذا كان $\log_2 x^4 = (\log_2 x)^2$ ، أوجد قيمة x							
	A	2	B	4	C	16	D	24
29	ما قيمة $\log_{125} 5$							
	A	3	B	2	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{1}{3}$

المتطابقة

هي معادلة يتساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها .

مثال:

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x

المتطابقة المثلثية

هي متطابقة تحوي دوالًا مثلثية .

مثال:

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$$

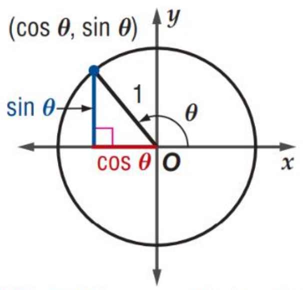
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$



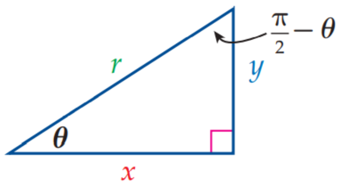
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

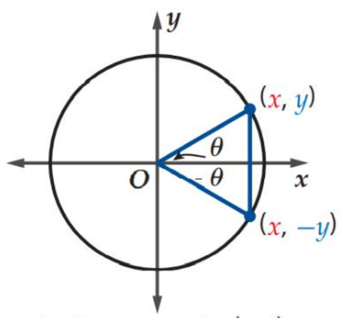
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



$\sin\theta = y$ $\quad \sin(-\theta) = -y$

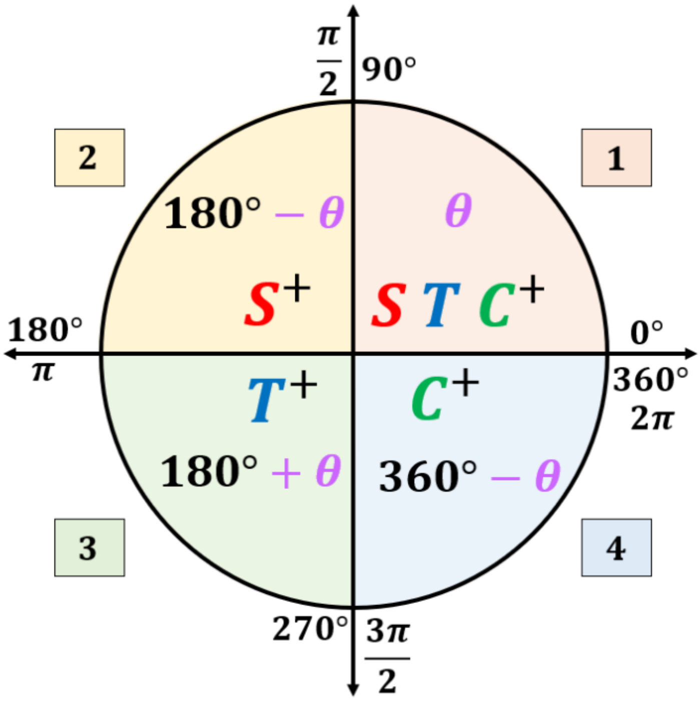
$\cos\theta = x$ $\quad \cos(-\theta) = x$

دائرة الوحدة والإشارات والزوايا المرجعية

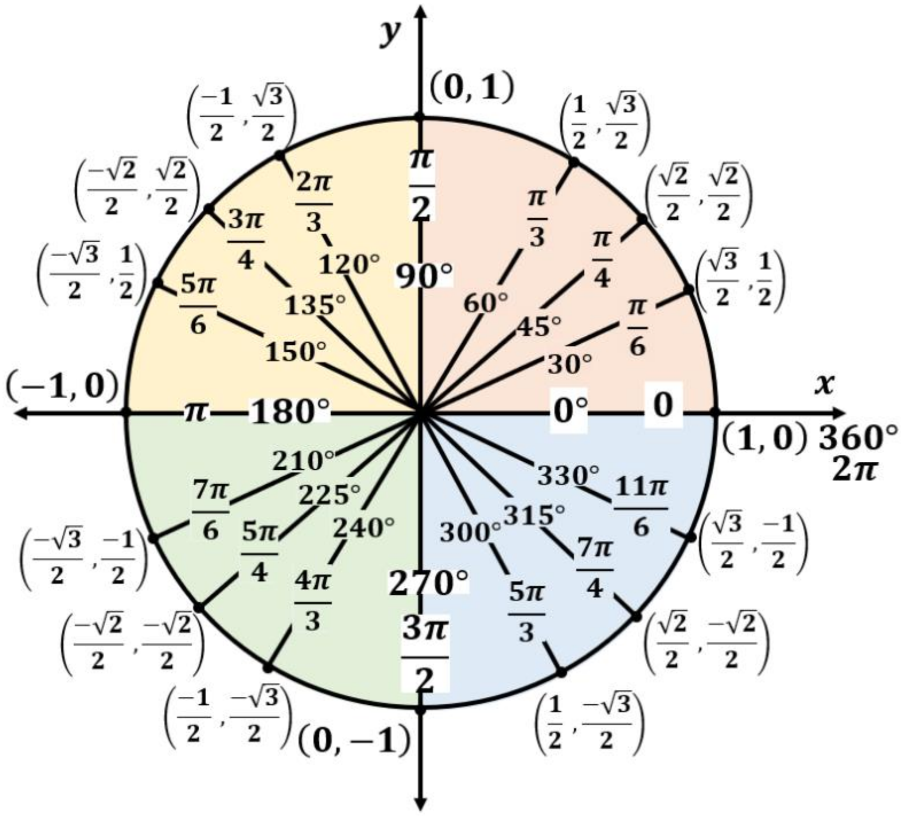
$S = \sin$

$C = \cos$

$T = \tan$



حساب الدوال المثلثية للزوايا من خلال دائرة الوحدة



حساب الدوال المثلثية للزوايا المشهورة بدون آلة حاسبة

	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

	$0°$	$90°$
sin	0	1
cos	1	0
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{0} =$ غير معرف

	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	-1	0
cos	-1	0	1
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{0}{-1} = 0$	$\frac{-1}{0} =$ غير معرف	$\frac{0}{1} = 0$

استعمال المتطابقات المثلثية

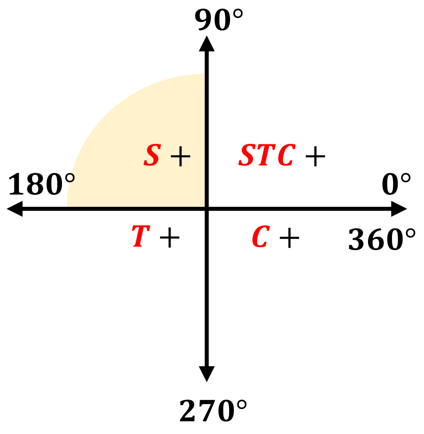
يمكن استعمال المتطابقات الأساسية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية .

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$90° < \theta < 180°$

الحل :



$\cos\theta$ سالبة

لأنها في الربع الثاني

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$$

تبسيط العبارات المثلثية

يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط إن أمكن .

مثال

بسط العبارة : $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$

الحل :

من الأسهل عادة أن تكتب حدود العبارة جميعها بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

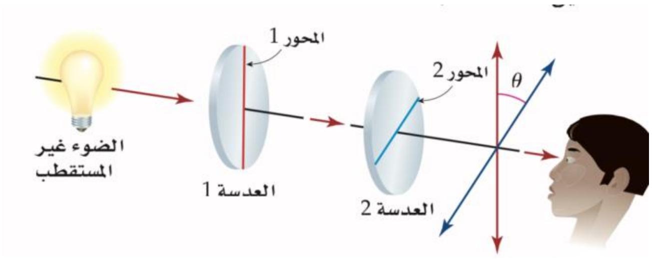
$$= \cot^2\theta$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	إذا كانت $270° < \theta < 360°$ ، $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، فإن القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ تساوي :							
	A	$\frac{13}{12}$	B	$-\frac{12}{13}$	C	$\frac{12}{13}$	D	$-\frac{13}{12}$
2	تبسيط العبارة $\csc^2\theta - \cot^2\theta$:							
	A	$\sin\theta\cos\theta$	B	$\cos^2\theta$	C	$\sin^2\theta$	D	1
3	إذا كانت $0° < \theta < 90°$ ، $\cot\theta = 2$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\tan\theta$ تساوي :							
	A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{4}$	C	$-\frac{1}{2}$	D	$-\frac{1}{4}$
أكمل الفراغات التالية :								
1	تبسيط العبارة $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$							
2	إذا كانت $180° < \theta < 270°$ ، $\cot\theta = \frac{1}{2}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$							
أوجد حل ما يلي:								

عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف ثم إذا مر الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى يمكن إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الاولى المستقطبة ، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية ، θ الزاوية بين محوري العدستين .

- بسط الصيغة بدلالة $\cos\theta$



إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين ، وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta = 1$

الحل :

نبدأ من الطرف الأيسر ⟵ $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta$

$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

ونصل إلى الطرف الأيمن ⟵ $= 1$

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تحول كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta \tan\theta$

الحل :

$\cot\theta \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= 1$$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= 1$$

بعد فك كل طرف بشكل منفصل نصل إلى نفس النتيجة .

اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

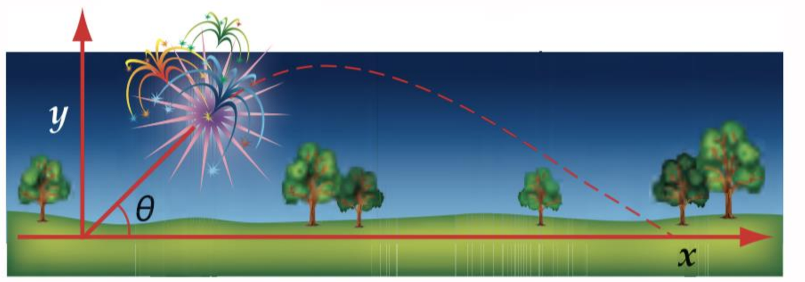
- بسط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها .
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب وجيب التمام فقط ثم بسط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة ، لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	المتطابقة $1+\sec^2\theta\sin^2\theta$ تكافئ :							
	A	$\sec^2\theta$	B	$\cot^2\theta$	C	$\tan^2\theta$	D	$\sin^2\theta$
2	أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$:							
	A	$\tan^2\theta$	B	$\cos^2\theta$	C	$\sin^2\theta$	D	$\csc^2\theta$
3	قيمة العبارة $(\sec^2\theta+\csc^2\theta)-(\tan^2\theta+\cot^2\theta)$							
	A	1	B	2	C	-1	D	-2
أكمل الفراغات التالية :								
1	عند تبسيط العبارة $\cos^2\theta+\tan^2\theta\cos^2\theta$ تصبح :							
2	عند تبسيط العبارة $(\sin\theta-1)(\tan\theta+\sec\theta)$ تصبح :							
أوجد حل ما يلي:								

عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة : $y=\frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}+\frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$ حيث v_0 السرعة الابتدائية للمقذوفات ، θ زاوية الإطلاق ، g تسارع الجاذبية الأرضية .

- أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$.



متطابقات المجموع

1

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$

الحل :

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$

$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 105°$

الحل :

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°)$$

$$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 105°$

الحل :

$$\tan 105° = \tan(60° + 45°)$$

$$= \frac{\tan 60° + \tan 45°}{1 - \tan 60° \tan 45°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-(\sqrt{3})(1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}}{1-3}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$= -2-\sqrt{3}$$

متطابقات الفرق

1 $$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$

الحل :

$$\sin 15° = \sin(60° - 45°)$$
$$= \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2 $$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 15°$

الحل :

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$$
$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3 $$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 120°$

الحل :

$$\tan 120° = \tan(180° - 60°)$$
$$= \frac{\tan 180° - \tan 60°}{1+\tan 180° \tan 60°}$$
$$= \frac{0-\sqrt{3}}{1+(0)(\sqrt{3})}$$
$$= \frac{-\sqrt{3}}{1}$$
$$= -\sqrt{3}$$

قائمة بقياسات بعض الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين

$(A - B)$	A	B
$15°$	$60°$	$45°$
$15°$	45	$30°$
$120°$	$180°$	$60°$
$150°$	$180°$	30

$(A + B)$	A	B
$75°$	$45°$	$30°$
$105°$	$60°$	$45°$
$120°$	$90°$	$30°$
$135°$	$90°$	$45°$

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال

أثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$

الحل :

الطرف الأيسر ⟵ $\sin(90° - \theta)$

$$= \sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta$$

$$= 1 \ \cos\theta - 0 \sin\theta$$

$= \cos\theta$ ⟵ الطرف الأيمن

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	القيمة الدقيقة لـ $\cos 165°$:							
	A	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	C	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	D	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
2	القيمة الدقيقة لـ $\sin(-210°)$:							
	A	$\frac{1}{2}$	B	$-\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{4}$	D	$-\frac{1}{4}$
3	$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=$							
	A	$-\csc\theta$	B	$\csc\theta$	C	$\cot\theta$	D	$-\cot\theta$

أكمل الفراغات التالية :

1	القيمة الدقيقة لـ $\tan 195°$ ....
2	$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ تساوي ....

أوجد حل ما يلي:

يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية ، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد ثانية t بالصيغة $c=2\sin(120°\,t)$.

- أعد كتابة الصيغة باستعمال مجموع زاويتين .
- استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{-1}{3}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

أولًا: نوجد $\sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2$

$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$

$\sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

θ تقع في الربع الثاني

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ثانيًا: نوجد $\sin 2\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)$

$= \frac{-4\sqrt{2}}{9}$

$\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -3$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2(-3)}{1-(-3)^2}$

$= \frac{-6}{-8}$

$= \frac{3}{4}$

$\cos 2\theta$

1

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$0° < \theta < 90°$

الحل :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{5}{9} - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{9}$$

2

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{-1}{3}$

$90° < \theta < 180°$

الحل :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{9}\right) - 1$$

$$= \frac{-7}{9}$$

3

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$90° < \theta < 180°$

الحل :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 1 - 2\left(\frac{16}{25}\right)$$

$$= \frac{-7}{25}$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$

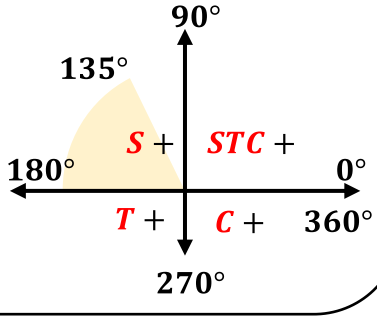
$270° < \theta < 360°$

الحل :

$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\sin\frac{\theta}{2}$ موجبة



$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

إنطاق المقام:

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$

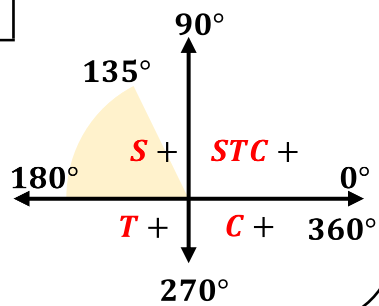
$270° < \theta < 360°$

الحل :

$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\cos\frac{\theta}{2}$ سالبة



$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

إنطاق المقام :

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$

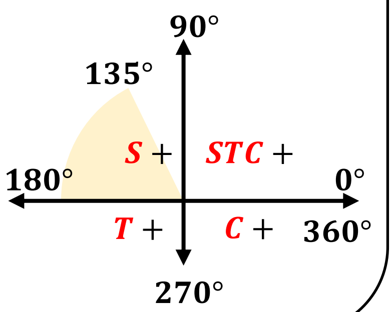
$270° < \theta < 360°$

الحل :

$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\tan\frac{\theta}{2}$ سالبة



$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

إثبات صحة المتطابقات

نستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما وكذلك المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات .

مثال

أثبت صحة المتطابقة :

$$\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

الحل :

الطرف الأيمن

$$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1-1+2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta$$

الطرف الأيسر

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	إذا كانت $90° < \theta < 180°$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ تساوي :							
	A	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	B	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	C	$\frac{-7}{25}$	D	$\frac{-24}{25}$
2	إذا كان $270° < \theta < 360°$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ هي :							
	A	$\frac{-2\sqrt{5}}{5}$	B	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	C	$\frac{-7}{25}$	D	$\frac{-24}{25}$
3	$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} =$							
	A	$\sin\theta$	B	$\tan\theta$	C	$\cos\theta$	D	$\cot\theta$

أكمل الفراغات التالية :

1	إذا كان $90° < \theta < 180°$, $\tan\theta = \frac{-8}{15}$ ، فإن قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$ يساوي ....
2	إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-15}{17}$ فإن قيمة $\cos 2\theta$ تساوي ....

أوجد حل ما يلي:

ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها $37°$ مع سطح الارض وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52ft/s إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة بالصيغة $d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$ حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 32ft/s^2 و v تمثل السرعة الابتدائية المتجهة

- بسط الصيغة مستعملا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية .
- ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسطة .

المعادلات المثلثية

هي **معادلات** تتضمن دوالًا **مثلثية** وتكون صحيحة عند **قيم محددة** للمتغير .

حل المعادلات على فترة معطاة

مثال

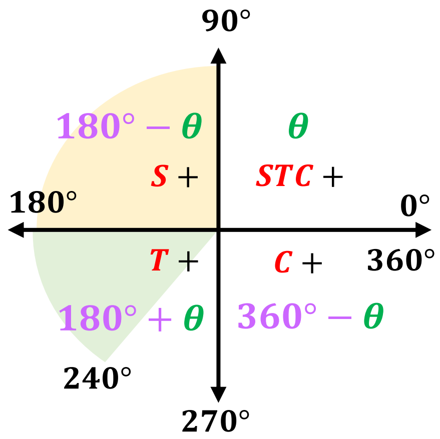
حل المعادلة :

$$\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \;;\; 0° \le \theta \le 240°$$

الحل :

cos سالبة

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



الزاوية θ تقع في

الربع الثاني والربع الثالث

$\theta = 30°$

نعوض بالزوايا المرجعية

في الفترات المحددة

نوجد الزوايا

في الفترة من خلال

الزوايا المرجعية

الربع الثاني	الربع الثالث	إذن :
$180° - \theta$	$180° + \theta$	حل المعادلة :
$180° - 30°$ $= 150°$	$180° + 30°$ $= 210°$	$150°\,,210°$

المعادلات المثلثية بدون فترة محددة

تحل **المعادلات المثلثية** عادة ، **لقيم المتغير** في الفترة $[0\,, 2\pi]$ بالراديان أو $[0°\,, 360°]$ بالدرجات . كما توجد **حلول** أخرى تقع **خارج** الفترات المحددة لذلك فالحلول **تختلف** باختلاف الفترات .

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

مثال

حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان .

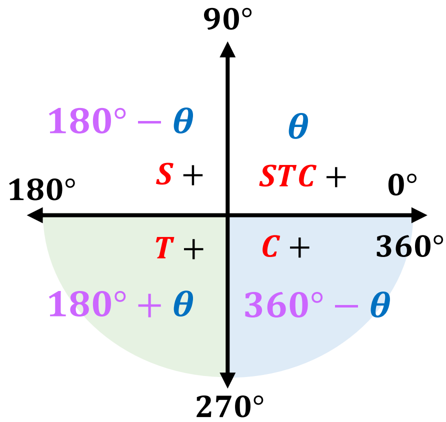
الحل :

$$\frac{2\sin\theta}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

sin سالبة

$$\theta = 30°$$



إذن الزاوية θ تقع في الربع الثالث و الربع الرابع

نعوض بالزوايا المرجعية في الفترات المحددة

نوجد الزوايا في الفترة من خلال الزوايا المرجعية

الربع الثالث	الربع الرابع	
$180° + \theta$	$360° - \theta$	ولأنها بدون فترة فلها عدد لانهائي من الحلول وتكتب بالقاعدة :
$180° + 30° = 210°$	$360° - 30° = 330°$	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$
نحولها لـ الراديان	نحولها لـ الراديان	$\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$
$210° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{7\pi}{6}$	$330° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{11\pi}{6}$	$k \in Z$

الحلول الدخيلة

بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل مثل المعادلة : $\cos\theta = 4$ ليس لها حل ، لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1 , 1]$.

كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية ، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة .

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

مثال

حُل المعادلة : $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

الحل :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 4 - 3$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

متطابقة

لها عدد لا نهائي من الحلول

لأن جميع قيم θ تمثل حلولًا لها.

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

مثال

حُل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات

$$\sin\theta \ \cot\theta - \cos^2\theta = 0$$

الحل :

$$\sin\theta \ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \cos^2\theta = 0$$

$$\cos\theta - \cos^2\theta = 0$$

$$\cos\theta \ (1 - \cos\theta) = 0$$

$1 - \cos\theta = 0$ أو $\cos\theta = 0$

$$\cos\theta = 0$$

إذن $\theta = 90°, 270°$

$$1 - \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 1$$

إذن $\theta = 0°, 360°$

وكلاهما حلان دخيلان ، لأن $\cot\theta$ عندها غير معرفة .

حل المعادلة :

$$90° + 180°\,k$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	إذا كانت $0° < \theta < 360°$, $-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta$ فإن حل المعادلة هو :							
	A	$180°$	B	$30°, 150°$	C	$60°, 180°$	D	$30°$
2	حل المعادلة $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ :							
	A	$\frac{\pi}{2} + \pi k$	B	$\frac{\pi}{3} + \pi k$	C	$\frac{2\pi}{3} + \pi k$	D	$\frac{\pi}{5} + \pi k$
أكمل الفراغات التالية :								
1	إذا كان قياس θ بالراديان فإن حل المعادلة $2\cos^2\theta = 1$							
2	إذا كان قياس θ بالدرجات فإن حل المعادلة $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$							
أوجد حل ما يلي:								
إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$ حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس . • في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}h$ تمامًا؟								

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :								
1	إذا كانت $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، فما هو الربع الذي تقع فيه زاوية θ							
	A	الأول	B	الثاني	C	الثالث	D	الرابع
2	قيمة $\cos(90° - \theta)$							
	A	$\sin\theta$	B	$-\sin\theta$	C	$\cos\theta$	D	$\sec\theta$
3	تبسيط العبارة : $\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$							
	A	$\sin\theta$	B	$\tan\theta$	C	$\cot\theta$	D	$\sec\theta$
4	أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة : $\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$							
	A	$\sin^2\theta$	B	$\tan^2\theta$	C	$\cot^2\theta$	D	$\csc^2\theta$
5	القيمة الدقيقة لـ $\cos 105°$							
	A	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	C	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	D	$\frac{2+\sqrt{6}}{4}$
6	ما قيمة $\sin 20° \cos 10° + \cos 20° \sin 10°$							
	A	$\frac{1}{2}$	B	30	C	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	D	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
7	ما قيمة $\sin^2 22.5 + \cos^2 22.5$							
	A	2	B	1	C	$\sqrt{2}$	D	-1
8	إذا كان $\tan\theta = 2$ ، أوجد $\tan 2\theta$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$							
	A	1	B	$\frac{3}{4}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	D	$-\frac{4}{3}$
9	إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، أوجد $\cos 2\theta$ ، حيث θ في الربع الأول							
	A	1	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D	$-\frac{1}{2}$
10	إذا كان $0° < \theta < 90°$ ، $\cos\theta = \frac{1}{2}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ تساوي							
	A	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	B	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	$\frac{4\pi}{3}$	D	$\frac{3\pi}{4}$
11	حل المعادلة $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، حيث $0 \le \theta \le 360°$							
	A	$30°, 150°$	B	$30°, 45°$	C	$60°, 120°$	D	$30°, 120°$
12	أي مما يأتي ليس حلًا للمعادلة : $\sin\theta + \cos\theta \tan^2\theta = 0$							
	A	$\frac{5\pi}{2}$	B	$\frac{7\pi}{4}$	C	2π	D	$\frac{3\pi}{4}$
13	الزاوية التي تشترك مع الزاوية $420°$ في ضلع الانتهاء هي :							
	A	$30°$	B	$45°$	C	$60°$	D	$120°$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

#	A	B	C	D
14	إذا كانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$ و $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ فأوجد $\sin\theta$			
	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
15	القيمة الدقيقة لـ $\cos 75^\circ$ تساوي			
	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$
16	المتطابقة $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ تكافئ المتطابقة ...			
	$\cos 4\theta$	$\sin 4\theta$	$\cos 2\theta$	$\sin 2\theta$
17	إذا كان $m\angle\theta = 300^\circ$ ، فإن قياس زاويتها المرجعية تساوي ...			
	15°	30°	45°	60°
18	أي من الزوايا التالية يكون الجيب والظل لها سالبين ؟			
	65°	310°	120°	256°
19	إذا كان $\tan\theta = -2$ و $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، فإن الضلع النهائي للزاوية θ يقع في الربع			
	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
20	المقدار $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$ يكون سالبًا في الربعين			
	الأول والثاني	الثاني والثالث	الثالث والرابع	الرابع والأول
21	طول دورة الدالة $f(x) = k\ \cos kx$ يساوي $\frac{\pi}{2}$ ، فإن سعتها تساوي			
	1	2	4	8
22	قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$			
	0	1	$\cos 2x$	$2\ \sin^2 x$
23	ما قيمة $\sec^2\theta - \tan^2\theta$			
	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
24	إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ وكان $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، أوجد $\sin 2\theta$			
	$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	$-\frac{\sqrt{2}}{9}$
25	حل المعادلة $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ هو ..			
	30°	30° أو 210°	150° أو 210°	لا يوجد لها حل
26	حل المعادلة $3\ \cos^2\theta - 4\ \cos\theta = 0$ و $0^\circ < \theta \le 180^\circ$ هو ..			
	30°	90°	30° أو 330°	لا يوجد لها حل

4-1	القطوع المكافئة
	الدرس
	اختبر نفسك

4-2	القطوع الناقصة والدوائر
	الدرس
	اختبر نفسك

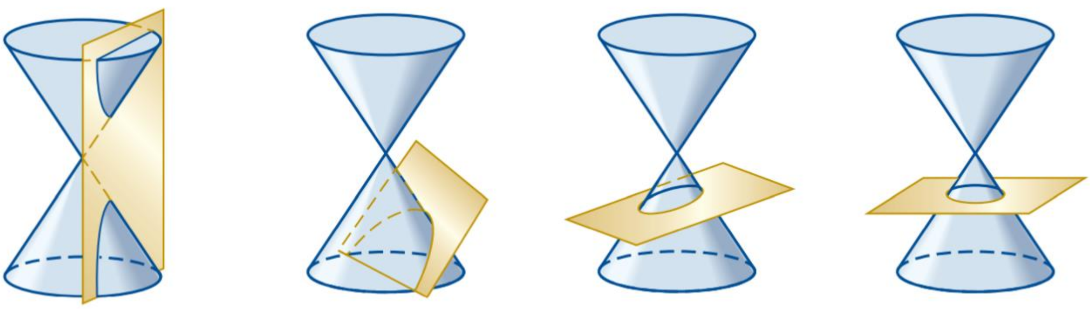
4-3	القطوع الزائدة
	الدرس
	اختبر نفسك

4-4	تحديد أنواع القطوع المخروطية
	الدرس
	اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

القطوع المخروطية

هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس .



القطع الزائد   القطع المكافئ   القطع الناقص   الدائرة

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

حيث C , B , A أعداد ليست جميعها أصفارًا.

وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي .

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا

المحل الهندسي هو الشكل الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة .

القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة (البؤرة) مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل .

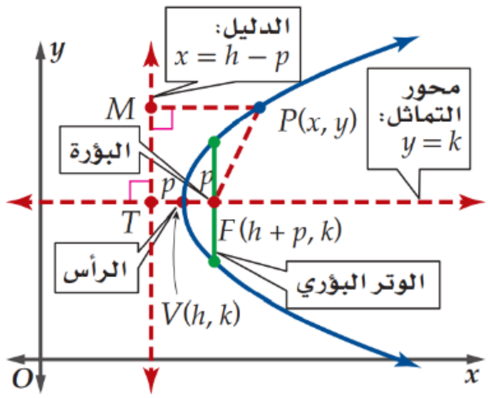
البؤرة هي نقطة ثابتة تقع على محور التماثل للقطع ، وتبعد عن الرأس مسافة $|c|$ وتكون مساوية لبعد الرأس عن مستقيم ثابت يسمى الدليل.

الدليل هو مستقيم عمودي على محور التماثل بحيث يكون بعده عن أي نقطة تقع على القطع مساويًا لبعد هذه النقطة عن البؤرة .

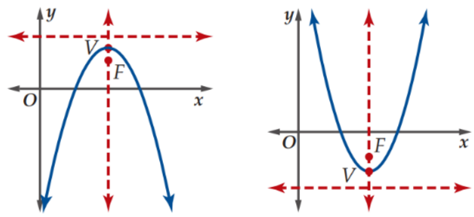
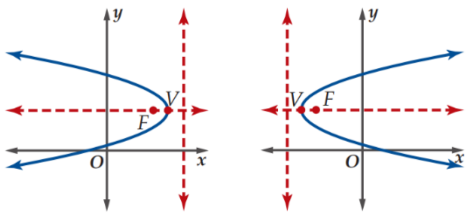
محور التماثل هو المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة .

الرأس هو نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل .

الوتر البؤري هو القطعة المستقيمة المار بالبؤرة والعمودية على محور التماثل ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ ويساوي $|4c|$ حيث c المسافة بين البؤرة والرأس.



خصائص القطوع المكافئة

المعادلة	$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$	$(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$
التمثيل البياني	 $c > 0$ $c < 0$	 $c > 0$ $c < 0$
الاتجاه	رأسي	أفقي
الرأس	$(h\,,k)$	$(h\,,k)$
البؤرة	$(h\,,k+c)$	$(h+c\,,k)$
معادلة الدليل	$y = k - c$	$x = h - c$
معادلة محور التماثل	$x = h$	$y = k$
طول الوتر البؤري	$\lvert 4c \rvert$	$\lvert 4c \rvert$

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$$

h $\quad$ $+$ $\quad$ $\frac{\cancel{4}c}{\cancel{4}}$ $\quad$ k

الاتجاه : رأسي .. أعلى (حسب الإشارة)

(+) أعلى ، (−) أسفل

البؤرة : $(h\,,k+c)$

معادلة الدليل : $y = k - c$

طول الوتر البؤري: $|4c|$

معادلة محور التماثل :

$x = h$

الرأس: $(h\,,k)$

مثال

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(x+1)^2 = -12\,(y-6)$$

الحل :

$k = 6$ $\qquad$ $c = \frac{-12}{4} = -3$

$h = -1$

الاتجاه : رأسي .. أسفل

البؤرة : $(-1\,,6+(-3))$

$(-1\,,3)$

معادلة الدليل : $y = 6-(-3)$

$y = 9$

طول الوتر البؤري: $|-12| = 12$

معادلة محور التماثل :

$x = -1$

الرأس: $(-1\,,6)$

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$$

k ، $+$ ، $\dfrac{\cancel{4}c}{\cancel{4}}$ ، h

الاتجاه : أفقي .. يمين (حسب الإشارة)

(+) يمين ، (−) يسار

البؤرة : $(h+c\,,k)$

معادلة الدليل : $x = h - c$

طول الوتر البؤري : $|4c|$

معادلة محور التماثل :

$y = k$

الرأس: $(h\,,k)$

مثال

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(y-4)^2 = 20\,(x+2)$$

الحل :

$h = -2$ $\qquad$ $c = \dfrac{20}{4} = 5$ $\qquad$ $k = 4$

الاتجاه : أفقي .. يمين

البؤرة : $(-2+5\,,4)$

$(3\,,4)$

معادلة الدليل : $x = -2 - 5$

$x = -7$

طول الوتر البؤري : $|20| = 20$

معادلة محور التماثل :

$y = 4$

الرأس: $(-2\,,4)$

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع المكافئ:

$$x^2 - 4y + 3 = 7$$

الحل :

$$x^2 = 7 + 4y - 3$$

$$x^2 = 4y + 4$$

$$x^2 = 4(y + 1)$$

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

معطى البؤرة والرأس

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-6 , 2)$ والرأس $(-6 , -1)$

الحل :

$$(x - h)^2 = 4c\ (y - k)$$

$$(x + 6)^2 = 12\ (y + 1)$$

البؤرة $(-6 , 2)$

الاختلاف بين الرأس والبؤرة في y

إذن المنحنى مفتوح رأسيًا

نوجد c

$k + c = 2$

$-1 + c = 2 \rightarrow c = 3 \rightarrow 4c = 12$

الرأس $(-6 , -1)$

(h , k)

معطى الرأس والدليل

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

الرأس $(9 , -2)$ والدليل $x = 12$

الحل :

$$(y-k)^2 = 4c\ (x-h)$$
$$(y+2)^2 = -12\ (x-9)$$

الدليل $x = 12$

الدليل رأسي

إذن المنحنى مفتوح أفقيًا

نوجد c

$$x = 12$$
$$h - c = 12$$
$$9 - c = 12 \rightarrow c = 9 - 12 = -3$$

الرأس $(9 , -2)$

(h , k)

معطى البؤرة واتجاه المنحنى ويمر بنقطة

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-3 , -4)$ والمنحنى مفتوح إلى أسفل ، ويمر بالنقطة $(5 , -10)$

الحل :

$$(x-h)^2 = 4c\ (y-k)$$
$$(x+3)^2 = -8\ (y+2)$$

المنحنى مفتوح إلى أسفل

إذن الاتجاه رأسي ، وعليه التغير في y

البؤرة $(-3 , -4)$

$$k + c = -4$$

الرأس $(-3 , -4 - c)$

(h , k)

لإيجاد c من الصورة القياسية للقطع :

$$(x-h)^2 = 4c\ (y-k)$$

نعوض عن

$x = 5 , y = -10 , h = -3 , k = -4 - c$

$$(5+3)^2 = 4c\ (-10 - (-4 - c))$$
$$64 = 4c(-6 + c)$$
$$64 = -24c + 4c^2$$
$$4c^2 - 24c - 64 = 0$$
$$c^2 - 6c - 16 = 0$$
$$(c-8)(c+2) = 0 \rightarrow c = 8 , c = -2$$

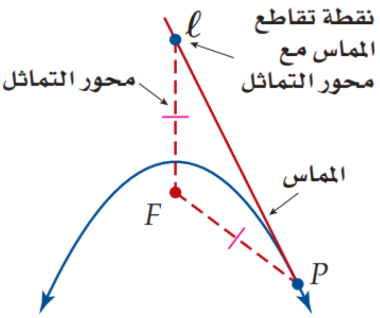
ولأن المنحنى مفتوح للأسفل إذن :

$$c = -2$$
$$4c = -8$$
$$k = -4 + 2$$
$$k = -2$$

مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون :

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين .
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني .



كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

- إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًا ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$
- إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًا ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

مثال

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $y = 4x^2 + 4$ عند النقطة $(-1, 8)$

الحل :

أولًا: نوجد إحداثيات البؤرة

المنحنى مفتوح رأسيًا

الصورة القياسية

$$x^2 = \frac{1}{4}(y - 4)$$

$$4c = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{1}{16} = 0.0625$$

الرأس $(0, 4)$

البؤرة $(0, 4.06)$

ثانيًا: نوجد d المسافة بين البؤرة والنقطة المعطاة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1 - 0)^2 + (8 - 4.06)^2}$$

$$d = 4.06$$

ثالثًا: نوجد إحداثيات النقطة وذلك بطرح المسافة من أحد احداثي البؤرة ولان القطع رأسيًا نطرح من y فتصبح

$$(0, 0)$$

رابعًا: نوجد الميل ونعوض في معادلة المستقيم

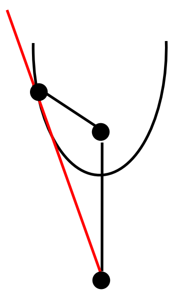
$$m = \frac{8 - 0}{-1 - 0} = -8$$

معادلة المستقيم المار بـ$(0, 0)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

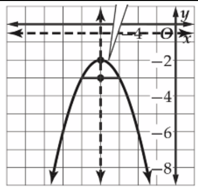
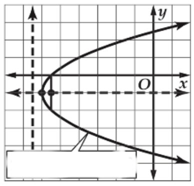
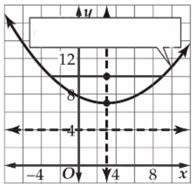
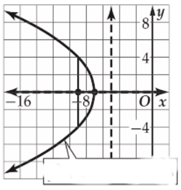
$$y - 0 = -8(x - 0)$$

$$y = -8x$$



اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	التمثيل البياني الصحيح للقطع المكافئ الذي معادلته $(x-3)^2 = 12(y-7)$:							
	A		B		C		D	
2	معادلة قطع المكافئ التي تحقق الخصائص التالية : البؤرة $(-9,-7)$ ، الرأس $(-9,-4)$ هي :							
	A	$(x+9)^2 = -12(y+4)$	B	$(x+9)^2 = 12(y+4)$	C	$(x-9)^2 = -12(y-4)$	D	$(x-9)^2 = 12(y-4)$
3	إذا كان دليل القطع المكافئ $y = 4$ و $c = -2$ فإن فتحة القطع المكافئ :							
	A	إلى اليسار	B	إلى اليمين	C	إلى الأعلى	D	إلى الأسفل

أكمل الفراغات التالية :

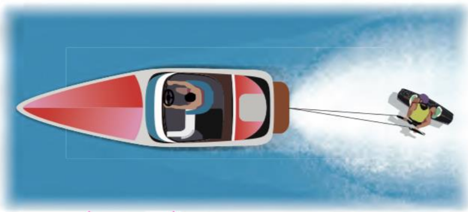
1	بؤرة القطع المكافئ $(y+5)^2 = 24(x-1)$ ....
2	معادلة محور التماثل للقطع المكافئ $-40(x+4) = (y-9)^2$ ....

أوجد حل ما يلي:

يبحر قارب في الماء تاركاً وراءه أثراً على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$

حيث x, y بالأقدام .

- اكتب معادلة القطع المكافئ بالصورة القياسية .
- ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق .



تحليل القطع الناقص وتمثيله بيانيًا

القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا وهو $2a$ حيث a هي البعد بين الرأس والمركز.

البؤرتان هما نقطتان تقعان على المحور الأكبر والمسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري ويكون مجموع بعديهما عن أي نقطة على منحنى القطع الناقص يساوي مقدارًا ثابتًا ، حيث c هي البعد بين إحدى البؤرتين والمركز .

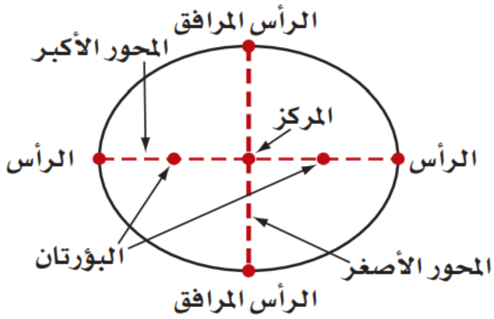
المحور الأكبر هو محور تماثل للقطع الناقص وهو القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين وتقع نهايتاها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2a$ حيث a البعد بين المركز وأحد الرأسين .

المحور الأصغر هو القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز والمتعامدة مع المحور الأكبر ، وتقع نهايتاها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2b$ ، حيث b هي البعد بين المركز وأحد الرأسين المرافقين .

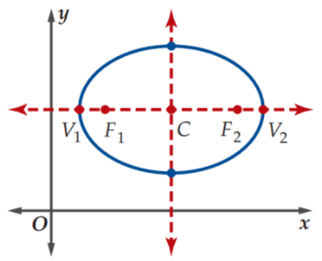
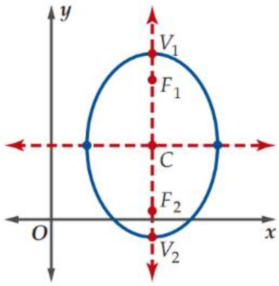
المركز هو نقطة المنتصف للمحورين الأكبر والأصغر والبؤرتين .

الرأسان هما نقطتا نهايتي المحور الأكبر .

الرأسان المرافقان هما نقطتا نهايتي المحور الأصغر.



خصائص القطع الناقص

نوع القطع	القطع الناقص	
التمثيل البياني		
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
إيجاد c " البعد بين المركز والبؤرة "	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	
a^2	هو العدد الأكبر	
تحديد الاتجاه	حسب اللي فوق العدد الأكبر a^2	
	أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2
$2a$	طول المحور الأكبر	
$2b$	طول المحور الأصغر	
$2c$	طول البعد البؤري	
المركز	$(h\,,k)$	
معادلة المحور	الأكبر $y=k$	الأكبر $x=h$
	الأصغر $x=h$	الأصغر $y=k$
الرأسان " a "	$(h\pm a\,,k)$	$(h\,,k\pm a)$
البؤرتان " c "	$(h\pm c\,,k)$	$(h\,,k\pm c)$
الرأسان المرافقان " b "	$(h\,,k\pm b)$	$(h\pm b\,,k)$
خطا التقارب	....	

تحديد خصائص القطع الناقص

مثال

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

الاتجاه : رأسي

الحل :

$h=-2\ ,\ k=0\ ,\ a=7\ ,\ b=3\ ,\ c=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}$

المركز $(-2\ ,\ 0)$

معادلة المحور الأصغر $y=0$

معادلة المحور الأكبر $x=-2$

الرأسان: $a=7$

$(-2\ ,\ 7)$

$(-2\ ,\ -7)$

طول المحور الأكبر $2a=14$

البؤرتان: $c=\sqrt{40}$

$(-2\ ,\ \sqrt{40})$

$(-2\ ,\ -\sqrt{40})$

طول البعد البؤري $2c=2\sqrt{40}$

الرأسان المرافقان: $b=3$

$(1\ ,\ 0)$

$(-5\ ,\ 0)$

طول المحور الأصغر $2b=6$

تحديد خصائص القطع الناقص

مثال

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

الاتجاه : أفقي

الحل :

$h=-4\ ,\ k=-3\ ,\ a=3\ ,\ b=2\ ,\ c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

المركز $(-4\ ,\ -3)$

معادلة المحور الأكبر $y=-3$

معادلة المحور الأصغر $x=-4$

الرأسان المرافقان: $b=2$

$(-4\ ,\ -1)$

$(-4\ ,\ -5)$

طول المحور الأصغر $2b=4$

البؤرتان: $c=\sqrt{5}$

$(-4+\sqrt{5}\ ,\ -3)$

$(-4-\sqrt{5}\ ,\ -3)$

طول البعد البؤري $2c=2\sqrt{5}$

الرأسان: $a=3$

$(-1\ ,\ -3)$

$(-7\ ,\ -3)$

طول المحور الأكبر $2a=6$

كتابة معادلة القطع الناقص بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والرأسان المرافقان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-6,-8),(-6,2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9,-3),(-3,-3)$

الحل :

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a=\sqrt{(-6+6)^2+(2+8)^2}=10$$

$$a=5 \rightarrow a^2=25$$

نستعمل المحور الأصغر لتحديد b من الرأسين المرافقين

$$2b=\sqrt{(-3+9)^2+(-3+3)^2}=6$$

$$b=3 \rightarrow b^2=9$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h,k)=\left(\frac{-6-6}{2},\frac{2+(-8)}{2}\right)=(-6,-3)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(y+3)^2}{25}+\frac{(x+6)^2}{9}=1$$

معطى الرأسان والبؤرتان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(6,4),(-4,4)$ ، والبؤرتان $(4,4),(-2,4)$

الحل :

طول المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a=\sqrt{(-4-6)^2+(4-4)^2}=10$$

$$a=5 \rightarrow a^2=25$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c=\sqrt{(-2-4)^2+(4-4)^2}=6$$

$$c=3$$

نوجد b^2

$$c^2=a^2-b^2$$

$$3^2=5^2-b^2$$

$$b^2=25-9$$

$$b^2=16$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h,k)=\left(\frac{-4+6}{2},\frac{4+4}{2}\right)=(1,4)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأكبر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:
البؤرتان $(-7\,,3)\,,(19\,,3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة

الحل :

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c=\sqrt{(19+7)^2+(3-3)^2}=26$$
$$c=13$$

طول المحور الأكبر $2a=30$

$$a=15\ \rightarrow\ a^2=225$$

نوجد b^2

$$c^2=a^2-b^2$$
$$13^2=15^2-b^2$$
$$b^2=225-169$$
$$b^2=56$$

مركز القطع هو نقطة منتصف البؤرتين

$$(h\,,k)=\left(\frac{19-7}{2},\frac{3+3}{2}\right)$$
$$=(6\,,3)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x-6)^2}{225}+\frac{(y-3)^2}{56}=1$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأصغر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-2\,,8)\,,(-2\,,-4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة

الحل :

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a=\sqrt{(-2+2)^2+(-4-8)^2}=12$$
$$a=6$$
$$a^2=36$$

طول المحور الأصغر $2b=10$

$$b=5$$
$$b^2=25$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

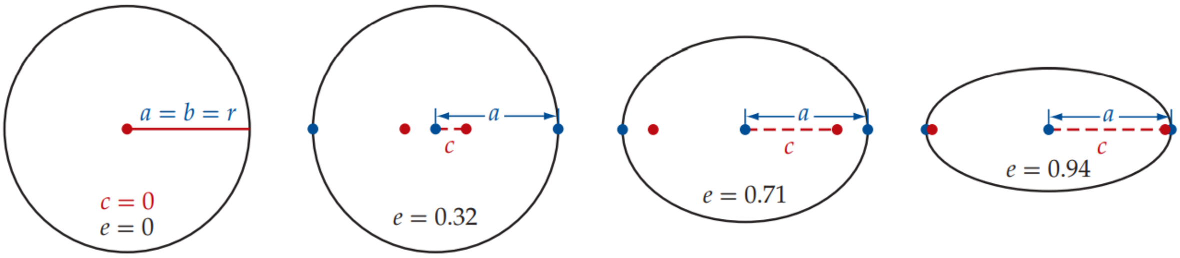
$$(h\,,k)=\left(\frac{-2-2}{2},\frac{-4+8}{2}\right)$$
$$=(-2\,,2)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

هو نسبة c إلى a وتقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدد مدى دائرية أو اتساع القطع الناقص .



الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$

$$0 < e < 1$$

مثال

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$$

الحل :

$$a^2 = 19 \ , a = \sqrt{19}$$

أولًا: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{19 - 17}$$

$$c = \sqrt{2}$$

ثانيًا: نستعمل قيمتي c , a لإيجاد قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

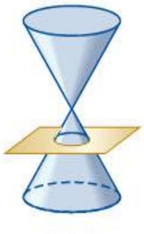
$$e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$$

$$e \approx 0.32$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



كتابة معادلة الدائرة

مثال

مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها 3

الحل :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=3^2$$

$$x^2+y^2=9$$

طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة
إذا كان طرفا قطر فيها $(1 , 5)$, $(3 , -3)$
نوجد المركز (h , k) باستخدام قانون نقطة المنتصف

الحل :

$$(h , k)=\left(\frac{3+1}{2},\frac{-3+5}{2}\right)$$

$$(h , k)=(2 , 1)$$

نوجد طول نصف القطر باستخدام قانون المسافة بين نقطتين

(بين المركز وإحدى نقاط طرفا القطر)

$$r=\sqrt{(2-3)^2+(1+3)^2}$$

$$r=\sqrt{17}$$

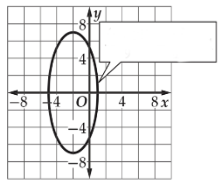
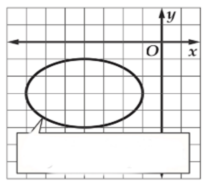
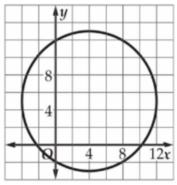
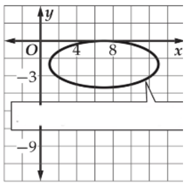
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{17}\right)^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=17$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	التمثيل البياني الصحيح للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$:							
	A		B		C		D	
2	معادلة القطع الناقص التي تحقق الخصائص التالية : الرأسان $(-7,-3),(13,-3)$ ، و البؤرتان $(-5,-3),(11,-3)$ هي :							
	A	$\frac{(x+3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$	B	$\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{100}=1$	C	$\frac{(x+3)^2}{100}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$	D	$\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$
3	الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x+5)^2}{72}+\frac{(y-3)^2}{54}=1$:							
	A	0.2	B	0.5	C	0.7	D	0.9

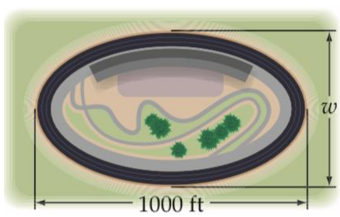
أكمل الفراغات التالية :

1	طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$ ....
2	معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المركز $(3,0)$ ونصف القطر 2 ....

أوجد حل ما يلي:

يوضح الشكل المجاور: مضمار سباق على شكل قطع ناقص ، اختلافه المركزي 0.75 .

- ما أقصى عرض w لمضمار السباق .
- اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار .



تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا

القطع الزائد هو المحل الهندسي لجمع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا هو $2a$ ، حيث a البعد بين المركز وأحد الرأسين .

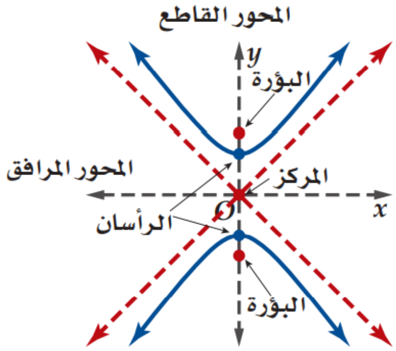
البؤرتان هما نقطتان تقعان على المحور القاطع و المسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري والفرق المطلق بين بعديهما عن أي نقطة من نقاط منحنى القطع الزائد يساوي مقدارًا ثابتًا.

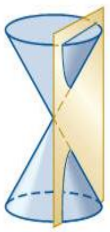
المركز هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين والرأسين .

الرأسان هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى .

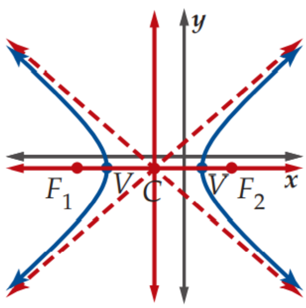
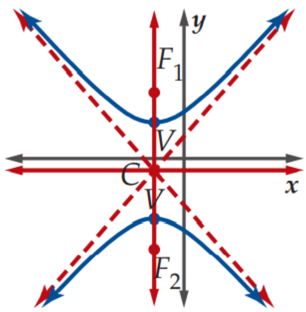
المحور القاطع هو أحد محوري تماثل القطع الزائد وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين ويمر بالمركز.

المحور المرافق هو أحد محوري تماثل القطع الزائد وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع ويمر بالمركز.





خصائص القطع الزائد

نوع القطع	القطع الزائد	
التمثيل البياني		
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
إيجاد c " البعد بين المركز والبؤرة "	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
a^2	هو العدد الأول	
تحديد الاتجاه	حسب اللي فوق العدد الأول a^2	
	أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2
$2a$	طول المحور القاطع	
$2b$	طول المحور المرافق	
$2c$	طول البعد البؤري	
المركز	$(h\,,k)$	
معادلة المحور	القاطع $y=k$	القاطع $x=h$
	المرافق $x=h$	المرافق $y=k$
الرأسان " a "	$(h\pm a\,,k)$	$(h\,,k\pm a)$
البؤرتان " c "	$(h\pm c\,,k)$	$(h\,,k\pm c)$
الرأسان المرافقان " b "	....	
خطا التقارب	$(y-k)=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$(y-k)=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

تحديد خصائص القطع الزائد

مثال

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{17}=1$

الاتجاه : رأسي

الحل :

$h=0\ ,k=0\ ,a=2\ ,b=\sqrt{17}\ ,c=\sqrt{4+17}=\sqrt{21}$

معادلة المحور المرافق $y=0$

المركز $(0\ ,0)$

معادلة المحور القاطع $x=0$

الرأسان
$a=2$
$(0\ ,2)$
$(0\ ,-2)$
طول المحور القاطع
$2a=4$

البؤرتان
$c=\sqrt{21}$
$(0\ ,\sqrt{21})$
$(0\ ,-\sqrt{21})$
طول البعد البؤري
$2c=2\sqrt{21}$

$b=\sqrt{17}$
طول المحور المرافق
$2b=2\sqrt{17}$

خطا التقارب : $y=\pm\frac{2}{\sqrt{17}}\ x$

$y=\pm\frac{2\sqrt{17}}{17}x$

تحديد خصائص القطع الزائد

مثال

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{36}=1$

الاتجاه : أفقي

الحل :

$h=1\ ,k=5\ ,a=3\ ,b=6\ ,c=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

معادلة المحور القاطع $y=5$

المركز $(1\ ,5)$

معادلة المحور المرافق $x=1$

$b=6$
طول المحور المرافق
$2b=12$

خطا التقارب: $y-5=\pm\frac{6}{3}\ (x-1)$

$y-5=\pm2\ (x-1)$

البؤرتان
$c=\sqrt{45}$
$(1+\sqrt{45}\ ,5)$
$(1-\sqrt{45}\ ,5)$
طول البعد البؤري
$2c=2\sqrt{45}$

الرأسان
$a=3$
$(4\ ,5)$
$(-2\ ,5)$
طول المحور القاطع
$2a=6$

كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع الزائد:

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$$

الحل :

تجميع المتشابهات

$$(4y^2 - 8y) + (-9x^2 - 36x) = 68$$

أخذ عوامل مشتركة

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 + 4x) = 68$$

اكمال المربع

$$4(y^2 - 2y + \square) - 9(x^2 + 4x + \square) = 68 + 4(\square) - 9(\square)$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 68 + 4(1) - 9(4)$$

تبسيط

$$4(y-1)^2 - 9(x+2)^2 = 36$$

بالقسمة والتبسيط

$$\frac{4(y-1)^2}{36} - \frac{9(x+2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$$

كتابة معادلة القطع الزائد بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والبؤرتان

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-3,2), (-3,-6)$ والبؤرتان $(-3,3), (-3,-7)$

الحل :

في الرأسين إحداثيي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right)$$

$$(h, k) = (-3, -2)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3+3)^2 + (-6+2)^2}$$

$$a = 4 \rightarrow a^2 = 16$$

نوجد c وهي المسافة بين أي من البؤرتين والمركز

$$= \sqrt{(-3+3)^2 + (3+2)^2}$$

$$c = 5 \rightarrow c^2 = 25$$

نوجد b^2 من القانون

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

المحور القاطع رأسي فإن a^2 يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

معطى الرأسان وخطا التقارب

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:
الرأسان $(-3, 0), (-9, 0)$ وخطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$

الحل :

في الرأسين إحداثيي y متساويان فإن المحور القاطع أفقي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

$$(h, k) = (-6, 0)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3+6)^2 + (0-0)^2}$$

$$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$$

ميلا خطي التقارب $\pm\frac{b}{a}$ نستخدم الميل الموجب لإيجاد b

$$\frac{b}{a} = 2 \rightarrow \frac{b}{3} = 2 \rightarrow b = 6$$

$$b^2 = 36$$

المحور القاطع أفقي فإن a^2 يرتبط بالحد x^2

$$\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$$

معطى الرأسان وطول المحور المرافق

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:
الرأسان $(3, 6), (3, 2)$ وطول المحور المرافق 10 وحدات

الحل :

في الرأسين إحداثيي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$$

$$(h, k) = (3, 4)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(3-3)^2 + (2-4)^2}$$

$$a = 2 \rightarrow a^2 = 4$$

طول المحور المرافق $2b = 10$

$$b = 5$$

$$b^2 = 25$$

المحور القاطع رأسي فإن a^2 يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

لأي قطع زائد $\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

حيث $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$

$$e > 1$$

مثال

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد :

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$$

الحل :

$$a^2 = 64 \ , a = 8$$

أولًا: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{64 + 80}$$

$$c = \sqrt{144} = 12$$

ثانيًا: نستعمل قيمتي c , a لإيجاد قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{12}{8}$$

$$e = \frac{3}{2} = 1.5$$

ملاحظة

الاختلاف المركزي للقطوع :

القطع الناقص $0 < e < 1$

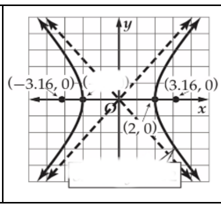
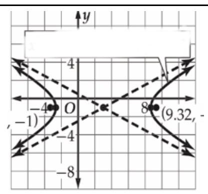
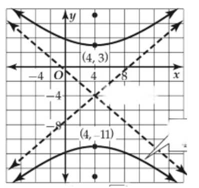
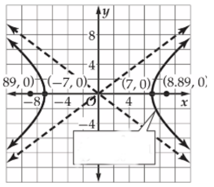
القطع الزائد $e > 1$

الدائرة $e = 0$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	التمثيل البياني الصحيح للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+4)^2}{49}-\frac{(x-4)^2}{64}=1$:

A		B		C		D	
A		B		C		D	

2	معادلة القطع الزائد التي تحقق الخصائص التالية : البؤرتان $(-1,9),(-1,-7)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحده هي :

A		B		C		D	
A	$\frac{(y+1)^2}{15}-\frac{(x-1)^2}{49}=1$	B	$\frac{(y-1)^2}{15}-\frac{(x+1)^2}{49}=1$	C	$\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-5)^2}{64}=1$	D	$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+5)^2}{64}=1$

3	الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-1)^2}{10}-\frac{(x-6)^2}{13}=1$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة :

A		B		C		D	
A	0.2	B	4.67	C	2.34	D	1.52

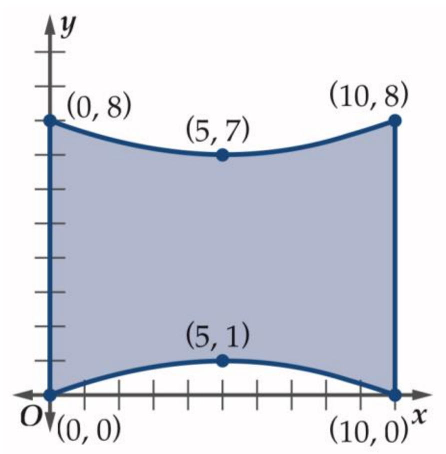
أكمل الفراغات التالية :

1	خطا التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{17}=1$ ....
2	رأسا القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{36}=1$ ....

أوجد حل ما يلي:

يبين الشكل المجاور : مخطط أرضية مكتب

- إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 15 ft . فما أقصر عرض لأرضية المكتب ؟



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

على أن لا تساوي A , B , C جميعها أصفارًا . ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصورة القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية

$$4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$$

ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله .

الحل :

تجميع المتشابهات مع أخذ عوامل

$$4(x^2 - 4x) + y^2 + 8y = 4$$

اكمال المربع

$$4(x^2 - 4x + \square\,) + (y^2 + 8y + \square\,) = 4 + 4(\square) + \square$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 4 + 4(4) + 16$$

تبسيط

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 36$$

تبسيط

$$4(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

قسمة وتبسيط

$$\frac{4(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$$

نوع القطع المخروطي : قطع ناقص

قطع مكافئ

$B^2 - 4AC = 0$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

الحل :

$A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , C = 6$

$B^2 - 4AC$

$(0)^2 - 4(0)(6) = 0$

قطع مكافئ

قطع ناقص

$B^2 - 4AC < 0 \,, A \neq C$ أو $B \neq 0$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

الحل :

$A = 1 \quad , \quad B = 0 \quad , C = 4$

$B^2 - 4AC$

$(0)^2 - 4(1)(4) = -16$

قطع ناقص

تحديد أنواع القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

باستعمال المميز

$$B^2 - 4AC$$

دائرة

$B^2 - 4AC < 0 \,, B = 0$ و $A = C$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

الحل :

$A = 8 \quad , \quad B = 0 \quad , C = 8$

$B^2 - 4AC$

$(0)^2 - 4(8)(8) = -256$

دائرة

قطع زائد

$B^2 - 4AC > 0$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

الحل :

$A = 4 \quad , \quad B = 3 \quad , C = 0$

$B^2 - 4AC$

$(3)^2 - 4(4)(0) = 9$

قطع زائد

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :							
1	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $4x^2 - 5y = 9x - 12$:						
	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D دائرة
2	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$:						
	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D دائرة
3	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $16xy + 8x^2 - 10y^2 - 18x + 8y = 13$						
	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D دائرة
أكمل الفراغات التالية :							
1	المعادلة $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$ على الصورة القياسية						
2	نوع القطع المخروطي $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$						
أوجد حل ما يلي:							

في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة ، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$ وقد حددت الأبعاد بالأقدام .

- حدد شكل منحنى القطع الذي يمثل مسار الطائرة ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية .
- إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$ ، فما المسافة الافقية التي تقطعها منذ بداية صعودها إلى نهاية هبوطها ؟
- ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة ؟

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :								
1	معادلة محور التماثل للقطع : $(y-3)^2 = -8x$							
	A	$y = 3$	B	$y = -2$	C	$x = 3$	D	$x = -3$
2	أي القطوع التالية رأسه $(2 , 1)$							
	A	$(x-2)^2 = 3(y-1)$	B	$(x+2)^2 = 3(y+1)$	C	$(y+2)^2 = 3(x-1)$	D	$(y-2)^2 = 3(x-2)$
3	ماهي معادلة الدليل للقطع : $y^2 = 24x$							
	A	$y = 6$	B	$y = -6$	C	$x = 6$	D	$x = -6$
4	ما هي معادلة القطع الذي معادله محور تماثله $y = 2$							
	A	$(x-2)^2 = 3(y-1)$	B	$(x+2)^2 = 3(y+1)$	C	$(y+2)^2 = 3(x-1)$	D	$(y-2)^2 = 3(x-2)$
5	معادلة القطع المكافئ الذي مركزه $(0 , 0)$ وطول الوتر البؤري 12 ومفتوح في x الموجبة هي :							
	A	$y^2 = 4x$	B	$y^2 = 12x$	C	$y^2 = 6(x+2)$	D	$x^2 = 12y$
6	في القطع المكافئ $(x+1)^2 = 12(y-3)$ المسافة بين البؤرة والرأس يساوي .... وحدات .							
	A	3	B	4	C	8	D	9
7	ما اتجاه القطع المكافئ $x^2 = 8(y-8)$							
	A	يمين	B	يسار	C	أسفل	D	أعلى
8	ما إحداثيات رأس القطع المكافئ $2(x-2)^2 = (y+3)$							
	A	$(-3 , 2)$	B	$(-2 , 3)$	C	$(2 , -3)$	D	$(3 , -2)$
9	معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0 , 0)$ ومحوره منطبق على محور y ويمر بالنقطة $(-2 , 4)$							
	A	$x^2 = 8y$	B	$y^2 = 8x$	C	$x^2 + 8y = 0$	D	$y^2 + 8x = 0$
10	طول الوتر البؤري للقطع المكافئ $(y-5)^2 = 8(x-3)$ هو .... وحدات .							
	A	3	B	5	C	8	D	10
11	للقطع الناقص $\frac{y^2}{9} + \frac{(x+2)^2}{4} = 1$ يكون طول المحور الأكبر يساوي :							
	A	9	B	8	C	13	D	6
12	الاختلاف المركزي للقطع الناقص : $\frac{(y-3)^2}{36} + \frac{(x-6)^2}{100} = 1$ هو :							
	A	0.8	B	8	C	0.6	D	0.4
13	في القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(y-7)^2}{20} + \frac{(x-5)^2}{12} = 1$ تكون معادلة المحور الأكبر							
	A	$y = 5$	B	$y = 7$	C	$x = 5$	D	$x = 7$
14	المسافة بين المركز والبؤرة للقطع $\frac{(y-7)^2}{25} + \frac{(x-5)^2}{36} = 1$ هي :							
	A	5	B	$\sqrt{11}$	C	11	D	6
15	ما هو مركز القطع الناقص الذي رأساه $(8 , 3)$, $(2 , 3)$							
	A	$(-6 , 0)$	B	$(10 , 6)$	C	$(-3 , 0)$	D	$(5 , 3)$
16	طول المحور الأصغر في القطع : $\frac{(y-7)^2}{25} + \frac{(x-5)^2}{36} = 1$ هو :							
	A	5	B	36	C	10	D	6

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :								
17	قطع ناقص المسافة بين البؤرتين 10 وطول المحور الأكبر 20 فإن معامل الاختلاف له هو :							
	A	2	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{10}$	D	$\frac{2}{5}$
18	أي المعادلات هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل							
	A	$x^2+y^2=4$	B	$(x-1)^2+(y+2)^2=4$	C	$5x^2+3y^2=1$	D	$x+y=1$
19	قيمة k في القطع الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{k}=1$ الذي إحدى بؤرتيه $(0,3)$							
	A	7	B	25	C	13	D	1
20	في القطع الناقص قيمة الاختلاف المركزي e تنحصر بين 0 و ...							
	A	-2	B	-1	C	1	D	2
21	القطع الناقص الذي اختلافه المركزي $e=0$ عبارة عن							
	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	دائرة	D	مربع
22	في القطع الزائد $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{4}=1$ البعد بين المركز والرأس هو :							
	A	2	B	4	C	6	D	5
23	في القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلتي خط التقارب هي :							
	A	$y=\pm\frac{4}{5}x$	B	$y=\pm5x$	C	$y=4x$	D	$y=\pm\frac{5}{4}x$
24	معامل الاختلاف المركزي للقطع $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$							
	A	$e=0$	B	$e=\frac{3}{5}$	C	$e=1$	D	$e=\frac{5}{3}$
25	مركز القطع $\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$							
	A	$(2,3)$	B	$(2,-3)$	C	$(3,2)$	D	$(12,16)$
26	للقطع الزائد $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$ الرأسان هما :							
	A	$(0,2),(0,-2)$	B	$(2,0),(-2,0)$	C	$(0,1),(1,-1)$	D	$(1,2),(1,-2)$
27	ما نوع القطع في المعادلة : $4x^2+2xy+3y^2=1$							
	A	قطع مكافئ	B	قطع ناقص	C	قطع زائد	D	دائرة
28	$6y^2-24y+28-x=0$ هي معادلة :							
	A	قطع مكافئ	B	قطع ناقص	C	قطع زائد	D	دائرة

ملحق الإجابات

الفصل الأول

تحليل الدوال

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 تكتب المجموعة $-31 < x \le 64$ باستعمال رمز الفترة :

A	B	C	D
$[-31, 64]$	$(-31, 64]$	$(-31, 64)$	$[-31, 64)$

2 مجال الدالة $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$ هو ....

A	B	C	D
$[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$	$[-\sqrt{6}, \infty)$	$R - [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$	$(-\infty, \sqrt{6}]$

3 أي من العلاقات التالية y تمثل دالة في x :

A

x	y
-2	-4
3	-1
3	4
5	6
7	9

B

x	y
-8	-5
-5	-4
0	-3
3	-2
6	-3

C

x	y
-6	-7
2	3
5	8
5	9
9	22

D

x	y
-1	6
2	3
3	8
9	5
9	1

أكمل الفراغات التالية :

1 إذا كانت $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$ فإن $g(3x)$ تساوي $18x^2 + 54x - 14$

2 تكتب المجموعة $x > 50$ باستعمال الصفة المميزة $\{x |\ x > 50 \ , x \in R\}$

3 إذا كانت :

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 & , \quad x < 3 \\ -x^3 & , \quad 3 \le x \le 8 \\ 3x^2 + 1 & , \quad x > 8 \end{cases}$$

فإن قيمة $f(-5)$ تساوي 23

أوجد حل ما يلي:

يعطى زمن الدورة T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9.8}}$

حيث l طول البندول ، فهل تمثل T دالة في l ؟

- إذا كانت كذلك فحدد مجالها ، وإذا لم تكن دالة فبين السبب .

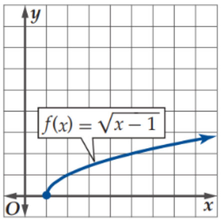
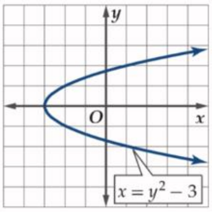
نعم ، لأن لكل قيمة للطول (l) توجد قيمة واحدة للزمن (T)

مجال الدالة هو : $[0, \infty)$

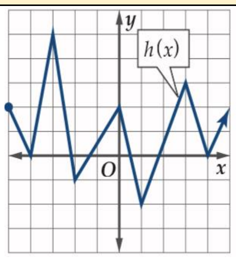
اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	مقطع y في الدالة $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 4$ يساوي							
	A	-4	B	0	C	4	D	6
2	في الشكل المجاور أصفار الدالة هي : 							
	A	-1	B	0	C	1	D	لا يوجد
3	الدالة $f(x) = x^2 + 6x + 10$ هي دالة :							
	A	زوجية	B	فردية	C	زوجية وفردية معًا	D	ليست زوجية وليست فردية
4	في الشكل المجاور الدالة متماثلة حول .... 							
	A	محور x	B	محور y	C	نقطة الأصل	D	لا شيء مما سبق

أكمل الفراغات التالية :



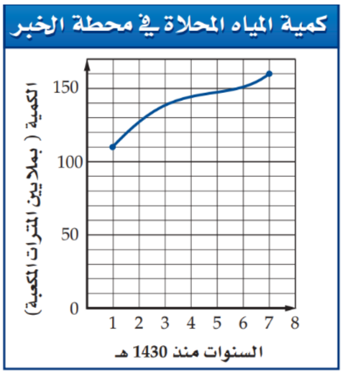
1	من الشكل المجاور: مجال الدالة هو $[-5, \infty)$
2	من الشكل المجاور: مدى الدالة هو $[-2, \infty)$

أوجد حل ما يلي:

إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر في الفترة 1431هـ إلى الفترة 1437 هـ معطى بالدالة

$$f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$$

- قدر كمية المياه المحلاة سنة 1435 هـ .
- قدر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني .

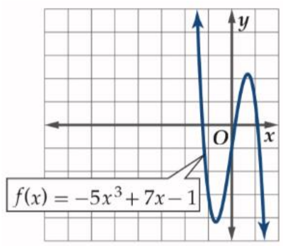


كمية المياه المحلاة سنة 1435 هـ يساوي 148 مليون متر مكعب.
السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب هي 1432 هـ .

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	نوع الدالة $f(x)=\frac{x}{x-1}$ عند $x=1$:							
	A	متصلة	B	عدم اتصال لا نهائي	C	عدم اتصال قفزي	D	عدم اتصال قابل للإزالة
2	الدالة الصحيحة لإعادة تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ لتصبح متصلة عند النقطة $x=-3$ هي :							
	A	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3} & , x\neq -3\\ 3 & , x=-3\end{cases}$	B	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3} & , x\neq -3\\ 6 & , x=-3\end{cases}$	C	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3} & , x\neq -3\\ -3 & , x=-3\end{cases}$	D	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3} & , x\neq -3\\ -6 & , x=-3\end{cases}$
3	الاعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الاصفار الحقيقية للدالة $f(x)=x^3-x^2-3$ في الفترة $[-2,4]$:							
	A	بين 0 و 1	B	بين 1 و 2	C	بين 1 و 3	D	بين 2 و 3
4	في الشكل المجاور : سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\lim_{x\to\infty} f(x)=$ 							
	A	∞	B	1	C	0	D	$-\infty$

أكمل الفراغات التالية :

1 الدالة $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ غير متصلة في الفترة $(-2,2)$

أوجد حل ما يلي:

تعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m)=\frac{p^2}{2m}$ حيث p الزخم (حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته المتجهة) ، m كتلة الجسم .

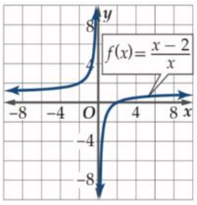
- اذا وضع رمل في شاحنة متحركة ، فماذا سيحدث اذا استمرت m في الزيادة ؟

عندما تتزايد كتلة الجسم m فإن طاقة السيارة الحركية تقترب من 0 .

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 في التمثيل المجاور الدالة متزايدة في الفترة :

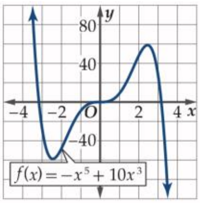


A	B	C	D
$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	$(0, \infty), (-\infty, 0)$	$(1, \infty)$

2 متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1$ في الفترة $[5, 9]$:

A	B	C	D
4430	4340	4500	4350

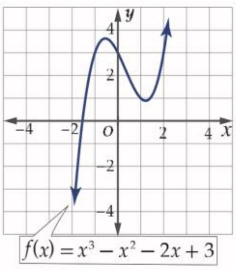
3 في التمثيل المجاور القيمة العظمى المطلقة للدالة عند .....



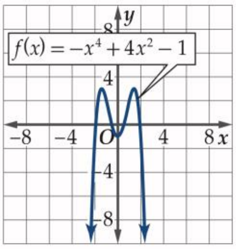
A	B	C	D
$x = 2$	$x = 2.5$	$x = 3$	لا توجد

أكمل الفراغات التالية :

1 ي التمثيل المجاور قدر الفترة التي تكون فيها الدالة متناقصة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة $(-0.5, 1)$

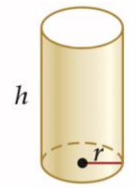


2 في التمثيل المجاور القيمة الصغرى المحلية عند $x = 0$ ومقدارها -1



أوجد حل ما يلي:

أوجد كلًا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور ليكون حجمها أكبر ما يمكن قرب إلى أقرب جزء من عشرة . (مساحة الأسطوانة $A = 2rh\pi + r^2\pi$ وحجم الأسطوانة $V = r^2h\pi$)



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة تساوي 20.5π بوصة مربعة

نصف القطر = 2.6 بوصة

الارتفاع = 2.6 بوصة

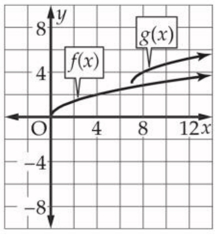
اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مدى الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ هو

A	B	C	D
R	$R-\{0\}$	W	Z

2 المعادلة التي تمثل الدالة $g(x)$ في التمثيل المجاور هي :

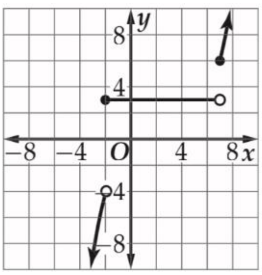


A	B	C	D
$\sqrt{x-7}+3$	$\sqrt{x+7}+3$	$\sqrt{x-7}-3$	$\sqrt{x+7}-3$

3 التحويلات التي حدثت للدالة الأم $f(x)=\|x\|$ فأصبحت $g(x)=\|x-1\|-2$:

A	B	C	D
انسحاب وحدة لليسار ووحدتين للأسفل	انسحاب وحدة لليسار ووحدتين للأعلى	انسحاب وحدة لليمين ووحدتين للأسفل	انسحاب وحدة لليمين ووحدتين للأعلى

4 الدالة المتعددة التعريف في التمثيل المجاور هي :



A	B
$f(x)=\begin{cases}-x^2 & , x<-2\\ 3 & , -2\le x<7\\ (x-5)^2+2 & , x\ge 7\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}3 & , x<-2\\ -x^2 & , -2\le x<7\\ (x-5)^2+2 & , x\ge 7\end{cases}$

C	D
$f(x)=\begin{cases}-x^2 & , x<-2\\ (x-5)^2+2 & , x\ge 7\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}(x-5)^2+2 & , x<-2\\ -x^2 & , -2\le x<7\\ 3 & , x\ge 7\end{cases}$

أكمل الفراغات التالية :

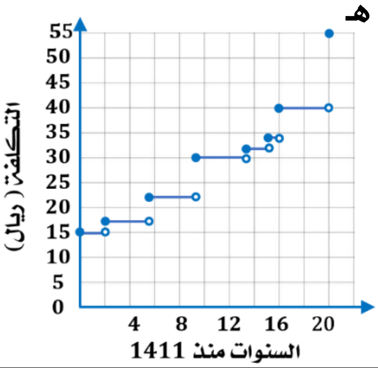
1 نوع الدالة $f(x)=x^3$ فردية متماثلة حول نقطة الأصل ومتزايدة في الفترة $(-\infty,\infty)$ والمنحنى يقطع المحورين عند النقطة $(0,0)$

أوجد حل ما يلي:

يبين الجدول سعر سلعة منذ عام 1411 هـ حتى 1431 هـ

- استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية .

العام	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55



اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	إذا كانت $f(x) = x^2 + 4, g(x) = \sqrt{x}$ فإن $(f \cdot g)(x)$ تساوي :							
	A	$x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$	B	$x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$	C	$x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$	D	$x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}}$
2	إذا كانت $f(x) = 2 + x^4, g(x) = -x^2$ فإن $[f \circ g](2)$ تساوي :							
	A	-254	B	250	C	256	D	258
3	إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 4$ ، فإن مجال $f \circ g(x)$ هو :							
	A	$R - \{\pm\sqrt{3}\}$	B	$R - \{\pm 3\}$	C	$R - \{-1\}$	D	R
أكمل الفراغات التالية :								
1	إذا كانت $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$ فإن الدالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [fog](x)$ ولا تكون أيًا منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ هما $f(x) = \sqrt{x} + 7$ و $g(x) = 4x + 2$							
2	إذا كانت $f(x) = x^2 + 5x + 6, g(x) = x + 2$ فإن $(f - g)(x) =$ $x^2 + 4x + 4$							
أوجد حل ما يلي:								

يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال .

افترض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$

- إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال ، فهل تمثل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$ ، برر إجابتك.
- أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص ، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة .

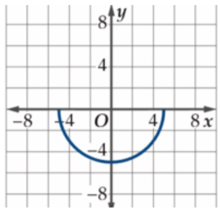
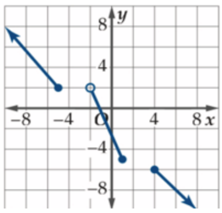
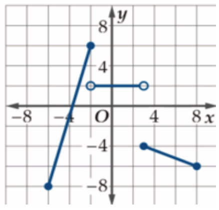
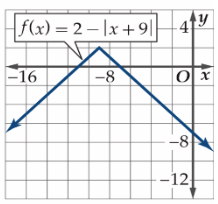
تمثل العمولة بالدالة $h[f(x)]$

لأن العمولة تحسب بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص ، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال تساوي 6000 ريال.

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	أي الدوال الآتية لها دالة عكسية :							
	A		B		C		D	
2	الدالة العكسية للدالة $f(x)=\sqrt{x+8}$ هي :							
	A	$f^{-1}(x) = x+8$	B	$f^{-1}(x) = x-8$	C	$f^{-1}(x) = x^2-8$	D	$f^{-1}(x) = x^2+8$
3	اذا كانت $f(x)=\frac{3x+1}{x-4}$ فإن مجال الدالة $f^{-1}(x)$ هو :							
	A	R	B	$R-\{4\}$	C	غير موجودة	D	$R-\{3\}$

أكمل الفراغات التالية :

1	إذا كانت $f(x)=4x+9$ فإن الدالة العكسية لها $f^{-1}(x)=\frac{x-9}{4}$
2	إذا كانت $g(x)=\frac{7}{\sqrt{x+3}}$ فإن مجال الدالة العكسية لها $(0,\infty)$

أوجد حل ما يلي:

تعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x)=0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلو جرام ، x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية .

- أوجد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$ وماذا يعني كل متغير فيها .
- أثبت ان كلاً من الدالتين $f(x), f^{-1}(x)$ التي حصلت عليها تمثل عكسية للأخرى .

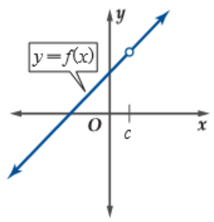
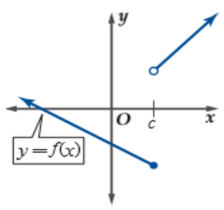
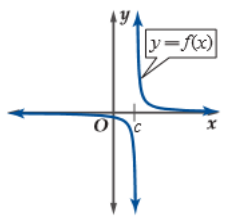
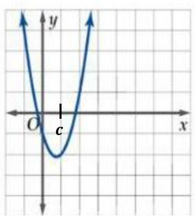
$$g(x)=\sqrt{\frac{2x}{m}}$$

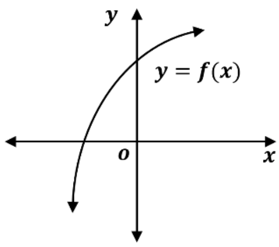
$g(x)$ هي سرعة المتر بالثانية ، x هي طاقة الحركة بالجول ، m الكتلة بالكيلو جرام .

كل دالة عكسية للأخرى لأن :

$$f[g(x)] = f(\sqrt{\frac{2x}{m}}) = \frac{1}{2}m(\sqrt{\frac{2x}{m}})^2 = \frac{1}{2}m\frac{2x}{m} = x$$

$$g[f(x)] = g(\frac{1}{2}mx^2) = (\sqrt{\frac{2\frac{1}{2}mx^2}{m}}) = \sqrt{x^2} = x$$

	اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
1	العدد الذي ينتمي إلى مجموعة الأعداد غير النسبية من بين الأعداد المعطاة هو :							
	A	-5	B	$\sqrt{15}$	C	$\sqrt{49}$	D	$\sqrt{\frac{9}{4}}$
2	مجال الدالة $f(x) = \frac{x-3}{2x-5}$:							
	A	R	B	$R-\{2\}$	C	$R-\left\{\frac{5}{2}\right\}$	D	$R-\{5\}$
3	إذا كان $f(x) = 4x^2 - 8$ فما قيمة $f(x-1)$:							
	A	$4x^2-8x-4$	B	$4x^2-8$	C	x^2-1	D	$x-1$
4	منحنى الدالة $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ يقطع محور y عند النقطة :							
	A	10	B	5	C	3	D	2
5	ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ إذا كان مجالها $-2 < x < 3$:							
	A	$5 < f(x) < 9$	B	$5 < f(x) < 10$	C	$1 < f(x) < 9$	D	$1 \leq f(x) < 10$
6	منحنى الدالة $f(x) = x^5 - 6x^3 + 10x$ متماثل حول :							
	A	محور x	B	محور y	C	نقطة الأصل	D	المستقيم $y = x + 3$
7	الدالة $f(x) = x^3 + 5x^2 - x$ هي دالة							
	A	زوجية	B	فردية	C	زوجية وفردية معًا	D	ليست زوجية وليست فردية
8	الدالة التي تمثل عدم اتصال لانهائي عند $x = c$ هي :							
	A		B		C		D	
9	إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ,x \geq 2 \\ ax+1 & ,x < 2 \end{cases}$ متصلة عند $x = 2$ فما قيمة a							
	A	2	B	-2	C	1	D	-1
10	الدالة $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ غير متصلة عند :							
	A	$x = 2$	B	$x = -2$	C	$x = 0$	D	$x = 4$
11	النهاية $\lim_{x\to\infty} \frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ تساوي :							
	A	15	B	10	C	5	D	2

	اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
12	في أي الفترات يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2-6} - 6$							
	A	$[6,7]$	B	$[7,8]$	C	$[8,9]$	D	$[9,10]$
13	في الشكل المجاور : الدالة $y = f(x)$ 							
	A	متزايدة	B	متناقصة	C	ثابتة	D	متذبذبة
14	أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^2 - 3x - 4$ في الفترة $[3,5]$							
	A	3	B	4	C	5	D	6
15	مدى الدالة $f(x) = [x]$ هو :							
	A	N	B	W	C	R	D	Z
16	إذا كان منحنى $g(x)$ ينتج من منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ بانسحاب وحدتين لليسار ثم انعكاس حول محور x ثم انسحاب ثلاث وحدات إلى الأسفل فأي مما يلي يمثل الدالة $g(x)$							
	A	$\sqrt{-x+2} - 3$	B	$-\sqrt{x+2} - 3$	C	$-\sqrt{x-2} + 3$	D	$\sqrt{x+2} - 3$
17	ما مدى الدالة $f(x) = \|x-2\| + 3$							
	A	$(0,\infty)$	B	$[3,\infty)$	C	$(2,\infty)$	D	$(1,\infty)$
18	إذا كان $g(x) = x - 3$ ، $f(x) = x^2 + 1$ ماهي النقطة التي تجعل $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$							
	A	$x = 1$	B	$x = -1$	C	$x = 2$	D	$x = -2$
19	إذا كان $g(2) = 5$, $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f(2) = 3$ فما قيمة $[f \circ g](3)$							
	A	2	B	3	C	4	D	5
20	معكوس الدالة $f(x) = 3x - 1$ هو $f^{-1}(x)$ وتساوي :							
	A	$3x + 1$	B	$-3x + 1$	C	$\frac{x+1}{3}$	D	$x + \frac{1}{3}$
21	لتكن $f(x)$ دالة متصلة على R ، ولها قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x = 3$ ، وقيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = -2$ ، أي التالي صحيح دائمًا ؟							
	A	القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية	B	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	C	للدالة صفر في الفترة $[-2,3]$	D	الدالة زوجية

ملحق الإجابات

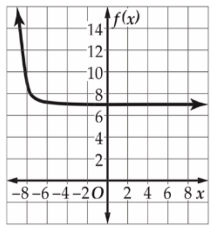
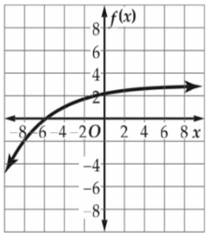
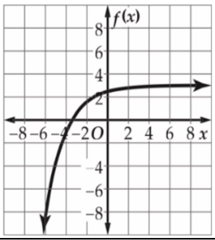
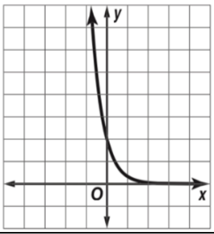
الفصل
الثاني

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 التمثيل البياني الصحيح للدالة $y = 2(\frac{1}{6})^x$ هو :

A		B		C		D	
							

2 مجال الدالة $f(x) = 2^{x+1} + 3$ هو :

A		B		C		D	
	R		$(3, \infty)$		$(-\infty, 3)$		$(-3, 3)$

3 مدى الدالة $f(x) = 2(\frac{2}{3})^{x-3} - 4$ هو :

A		B		C		D	
	R		$(-4, \infty)$		$(4, \infty)$		$(-\infty, 4)$

أكمل الفراغات التالية :

1 إذا كانت $y = 2(8)^x$ فإن قيمة $2(8)^{-0.5}$ تساوي 0.707

2 التحويلات التي حدثت للدالة الأم $f(x) = 3^x$ فأصبحت $g(x) = 3^{x-2} + 4$ هي انسحاب وحدتين لليمين و 4 وحدات للأعلى .

أوجد حل ما يلي:

سيارة كان سعرها 80000 ريال ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة.

- أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها ثم قدر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها .

$y = 80000(0.85)^t$

بعد 20 سنة يكون ثمنها 3100 ريال تقريباً.

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :							
1	قيمة x في المعادلة $3^{5x} = 27^{2x-4}$ هي :						
	A	$x = 10$	B	$x = 12$	C	$x = -8$	D $x = -3$
2	حل المتباينة الأسية $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$:						
	A	$y \geq \frac{3}{5}$	B	$y \leq \frac{3}{5}$	C	$y \leq \frac{-3}{5}$	D $y \geq \frac{-3}{5}$
أكمل الفراغات التالية :							
1	قيمة x في المعادلة $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$ $x = \frac{1}{7}$						
2	حل المتباينة الأسية $10^{5b+2} > 1000$ $b > \frac{1}{5}$						
أوجد حل ما يلي:							

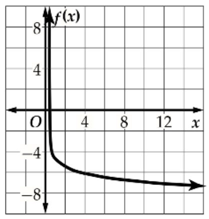
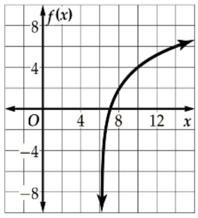
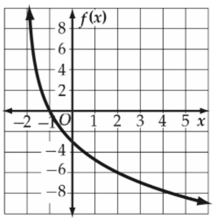
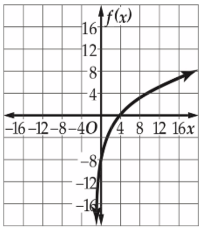
استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 2.25% ، بحيث تضاف الارباح الى رأس المال مرتين شهريًا.

- ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات ، إلى أقرب منزلتين عشريتين .

57223.22 ريال تقريبًا.

اختبر نفسك

اختبر نفسك

	اختر الإجابة الصحيحة :							
1	الصورة الأسية للمعادلة اللوغاريتمية $\log_5 625 = 4$:							
	A	$5^4 = 625$	B	$4^5 = 625$	C	$4^{625} = 5$	D	$5^{625} = 4$
2	التمثيل الصحيح البياني للدالة $f(x) = 4\log_4(x-6)$ هو :							
	A		B		C		D	
3	قيمة $\log_{27} 3$ هي :							
	A	$\frac{1}{9}$	B	3	C	$\frac{1}{3}$	D	9
	أكمل الفراغات التالية :							
1	الصورة اللوغاريتمية للمعادلة الأسية $6^{-3} = \frac{1}{216}$ $\log_6 \frac{1}{216} = -3$							
2	قيمة $\log_{10} 0.01$ -2							
	أوجد حل ما يلي:							

تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصور .

أعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر ولكن الجو كان غائماً.

- إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟

درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة هي 2 .

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	قيمة $4\log_2\sqrt{8}$:							
	A	2	B	4	C	8	D	6
2	كتابة العبارة اللوغاريتمية $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3(8c)$ بالصورة المختصرة :							
	A	$\log_3 \frac{a^7 b}{64c^2}$	B	$\log_3 \frac{a^7 b}{16c^2}$	C	$\log_3 \frac{64c^2}{a^7 b}$	D	$64\log_3 \frac{a^7 b}{c^2}$
3	العبارة المختلفة عن العبارات الأخرى هي : $= \log_b 24$							
	A	$\log_b 4 + \log_b 6$	B	$\log_b 20 + \log_b 4$	C	$\log_b 2 + \log_b 12$	D	$\log_b 3 + \log_b 8$

أكمل الفراغات التالية :

1	إذا كانت قيمة $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ فإن قيمة $\log_4 15$ 1.9535
2	كتابة العبارة اللوغاريتمية $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$ بالصورة المطولة $\log_{11} a - 4\log_{11} b + 12\log_{11} c + 7\log_{11} d$

أوجد حل ما يلي:

يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع ، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} p)$ ، حيث p الضغط بالباسكال .

- أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه .

إفرست 26855.44 باسكال.
تر يسوني 34963.34 باسكال.
بو نيتي 36028.42 باسكال.

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	حل المعادلة $\log_x 32 = \frac{5}{2}$:							
	A	2	B	4	C	8	D	6
2	حل المتباينة $\log_8 x \leq -2$:							
	A	$\{x\vert 0 \leq x \leq \frac{1}{64}\}$	B	$\{x\vert 1 < x \leq \frac{1}{64}\}$	C	$\{x\vert 0 < x \leq 64\}$	D	$\{x\vert 0 < x \leq \frac{1}{64}\}$

أكمل الفراغات التالية :

1	حل المعادلة $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ $n = 8$
2	حل المتباينة $\log_2(4x - 6) > \log_2(2x + 8)$ $\{x\vert x > 7\}$

أوجد حل ما يلي:

يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $\mathrm{L} = 10\log_{10}\mathrm{R}$ ، حيث R هي شدة الصوت .

- احسب شدة الصوت لمنبه ارتفاع صوته 80 ديسبل .

شدة الصوت لمنبه ارتفاع صوته 80 ديسبل يساوي 10^8

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	قيمة $\log 3.2$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :							
	A	0.4312	B	0.7621	C	0.5051	D	0.0621
2	حل المعادلة $6^x = 40$ مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف هو :							
	A	0.7328	B	1.2365	C	3.7531	D	2.0588
أكمل الفراغات التالية :								
1	كتابة اللوغاريتم $\log_3 7$ بدلالة اللوغاريتم العشري $\frac{\log 7}{\log 3}$ وقيمته 1.7712							
2	حل المتباينة $5^{4n} > 33$ $\{n \mid n > 0.5431\}$							
أوجد حل ما يلي:								

اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال . افترض أن $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ ، حيث t الزمن بالسنوات التي مرت منذ الشراء ، p سعر الشراء ، V السعر الحالي ، r المعدل السنوي لانخفاض السعر .

- إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال ، وانخفض سعرها بمعدل 15% سنوياً ، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة ؟
- إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال ، وانخفض سعرها بمعدل 10% سنوياً ، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة ؟

إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال ، وانخفض سعره بمعدل 15% سنوياً ، فإن الزمن الذي مر منذ شرائها هو سنتان .

إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال ، وانخفض سعرها بمعدل 10% سنوياً ، فإن الزمن الذي مر منذ شرائها هو 5 سنوات .

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة:								
1	منحنى الدالة الأسية $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ يقطع محور y في النقطة ..							
	A	$(0,0)$	B	$(0,1)$	C	$(1,0)$	D	$(1,1)$
2	إذا كانت $3^{x-1} = 27$ فإن قيمة x هي :							
	A	$x = 6$	B	$x = 5$	C	$x = 4$	D	$x = 3$
3	ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$:							
	A	-1	B	0	C	1	D	2
4	إذا كان $3^x \geq 9$ فإن قيمة x هي :							
	A	$x \leq 9$	B	$x < 2$	C	$x \geq 2$	D	$x > 2$
5	ما قيمة x التي تحقق المتباينة $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{8} < 0$							
	A	$x < -8$	B	$x < -3$	C	$x > \frac{1}{2}$	D	$x > 3$
6	إذا كان $\log_2 x = 3$ فإن x تساوي :							
	A	2	B	3	C	5	D	8
7	الصورة الأسية المكافئة للصورة اللوغاريتمية $\log_x 8 = 3$ هي :							
	A	$x^3 = 8$	B	$3^x = 8$	C	$8^3 = x$	D	$x^8 = 3$
8	منحنى الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_b x$ يقطع محور x في النقطة ...							
	A	$(0,0)$	B	$(0,1)$	C	$(1,1)$	D	$(1,0)$
9	ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_2(x+1) + 3$							
	A	3	B	2	C	1	D	0
10	ما قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$							
	A	6	B	1	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{2}{3}$
11	مجال الدالة $f(x) = \log_2 x$ يساوي ...							
	A	R	B	$[2,\infty)$	C	R^+	D	W
12	مدى الدالة $f(x) = \log_3 x$ يساوي							
	A	R	B	$[3,\infty)$	C	R^+	D	W
13	ما قيمة المقدار $\log_3 13 - \log_3 5$							
	A	$\log_5 13$	B	$\log_3 \frac{13}{5}$	C	$\log_{13} 5$	D	$\frac{13}{5}$
14	ما قيمة $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$							
	A	1	B	2	C	3	D	6
15	قيمة العبارة $\log_2(\log_2 x^{24}) - \log_2(\log_2 x^3)$							
	A	2	B	3	C	4	D	8

اختر الإجابة الصحيحة:								
16	الصورة المختصرة للمقدار $3\log_5 x - 4\log_5 y + 2\log_5 z$							
	A	$\log_5 \frac{x^3z^2}{y^4}$	B	$\frac{x^3z^2}{y^4}$	C	$\log_5 \frac{x^2y^4}{z^2}$	D	$\log_5 x^3y^4z^2$
17	حل المعادلة $\log_2(x^2-4) = \log_2 3x$							
	A	4	B	2	C	-1	D	-2
18	ما قيمة $\log_{100} 10$							
	A	1	B	-1	C	$\frac{1}{2}$	D	2
19	إذا كانت $f(x) = \log x$ بحيث $1 \le x \le 10$ فإن :							
	A	$1 \le f(x) \le 10$	B	$0 \le f(x) \le 1$	C	$0 \le f(x) \le 10$	D	$10 \le f(x) \le 100$
20	أي مما يلي حلًا للمعادلة $\log_4 x - \log_4(x-1) = \frac{1}{2}$							
	A	$-\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{2}$	C	-2	D	2
21	إذا كان $\log_4 x \ge 2$ فإن :							
	A	$x \ge 2$	B	$x \ge 4$	C	$x \ge 8$	D	$x \ge 16$
22	ما مقطع y للدالة $y = 4^x - 1$							
	A	4	B	1	C	-1	D	0
23	إذا كان $\log_2 3 = b$ و $\log_2 5 = a$ ، أوجد قيمة $\log_2 \frac{25}{9}$							
	A	$\frac{a^2}{b^2}$	B	$\frac{2a}{b}$	C	$\frac{b}{a}$	D	$2(a-b)$
24	إذا كان $\log_4 5 = 1.16$ ، فإن $\log_4 100$ هو :							
	A	3.32	B	4	C	25	D	2.32
25	ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$							
	A	-5	B	$\frac{-1}{5}$	C	$\frac{1}{5}$	D	5
26	إذا كان $\left(\frac{1}{5}\right)^x \le 125$ ، فإن قيمة x هي :							
	A	$x \le 5$	B	$x \le -3$	C	$x \ge -3$	D	$x = 3$
27	أوجد حل المعادلة $\log_4(\log_2(\log_2(2x+8))) = \frac{1}{2}$							
	A	$\frac{1}{2}$	B	2	C	4	D	8
28	إذا كان $\log_2 x^4 = (\log_2 x)^2$ ، أوجد قيمة x							
	A	2	B	4	C	16	D	24
29	ما قيمة $\log_{125} 5$							
	A	3	B	2	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{1}{3}$

ملحق الإجابات

الفصل
الثالث

المتطابقات
والمعادلات المثلثية

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	إذا كانت $270° < \theta < 360°$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، فإن القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ تساوي :							
	A	$\frac{13}{12}$	B	$-\frac{12}{13}$	C	$\frac{12}{13}$	D	$-\frac{13}{12}$
2	تبسيط العبارة $\csc^2\theta - \cot^2\theta$:							
	A	$\sin\theta\cos\theta$	B	$\cos^2\theta$	C	$\sin^2\theta$	D	1
3	إذا كانت $0° < \theta < 90°$, $\cot\theta = 2$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\tan\theta$ تساوي :							
	A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{4}$	C	$-\frac{1}{2}$	D	$-\frac{1}{4}$

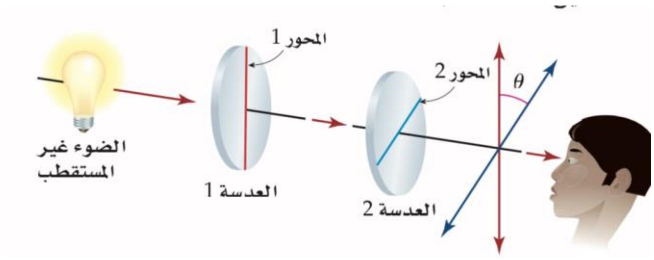
أكمل الفراغات التالية :		
1	تبسيط العبارة $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$	$\sec^3\theta$
2	إذا كانت $180° < \theta < 270°$, $\cot\theta = \frac{1}{2}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$

أوجد حل ما يلي:

عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف ثم إذا مر الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى يمكن إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الاولى المستقطبة ، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية ، θ الزاوية بين محوري العدستين .

- بسط الصيغة بدلالة $\cos\theta$

$$I = I_0\cos^2\theta$$



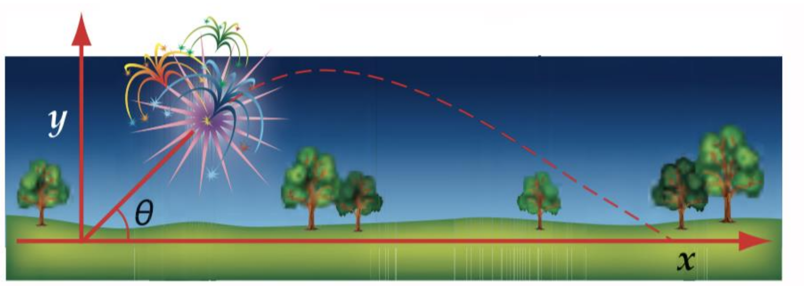
اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	المتطابقة $1 + \sec^2\theta \sin^2\theta$ تكافئ :							
	A	$\sec^2\theta$	B	$\cot^2\theta$	C	$\tan^2\theta$	D	$\sin^2\theta$
2	أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$:							
	A	$\tan^2\theta$	B	$\cos^2\theta$	C	$\sin^2\theta$	D	$\csc^2\theta$
3	قيمة العبارة $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$							
	A	1	B	2	C	-1	D	-2
أكمل الفراغات التالية :								
1	عند تبسيط العبارة $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$ تصبح : 1							
2	عند تبسيط العبارة $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta)$ تصبح : $-\cos\theta$							
أوجد حل ما يلي:								

عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة : $y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$ حيث v_0 السرعة الابتدائية للمقذوفات ، θ زاوية الإطلاق ، g تسارع الجاذبية الأرضية .

- أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$.



بعد إعادة كتابة العلاقة تصبح :

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2\theta) + x\tan\theta$$

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	القيمة الدقيقة لـ $\cos 165°$:							
	A	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	C	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	D	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
2	القيمة الدقيقة لـ $\sin(-210°)$:							
	A	$\frac{1}{2}$	B	$-\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{4}$	D	$-\frac{1}{4}$
3	$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=$							
	A	$-\csc\theta$	B	$\csc\theta$	C	$\cot\theta$	D	$-\cot\theta$
أكمل الفراغات التالية :								
1	القيمة الدقيقة لـ $\tan 195°$ $\quad 2-\sqrt{3}$							
2	$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ تساوي $-\sin\theta$							
أوجد حل ما يلي:								

يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية ، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c=2\sin(120°\,t)$.

- أعد كتابة الصيغة باستعمال مجموع زاويتين .
- استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

بعد إعادة كتابة الصيغة باستعمال مجموع زاويتين تصبح :
$c=2\sin(90°t+30°t)$

القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة تساوي $\sqrt{3}$ أمبير.

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	إذا كان $90° < \theta < 180°$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ تساوي :							
	A	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	B	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	C	$\frac{-7}{25}$	D	$\frac{-24}{25}$
2	إذا كان $270° < \theta < 360°$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ هي :							
	A	$\frac{-2\sqrt{5}}{5}$	B	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	C	$\frac{-7}{25}$	D	$\frac{-24}{25}$
3	$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} =$							
	A	$\sin\theta$	B	$\tan\theta$	C	$\cos\theta$	D	$\cot\theta$

أكمل الفراغات التالية :

1	إذا كان $90° < \theta < 180°$ ، $\tan\theta = \frac{-8}{15}$ ، فإن قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$ يساوي $\frac{4\sqrt{17}}{17}$
2	إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-15}{17}$ فإن قيمة $\cos 2\theta$ تساوي $-\frac{161}{289}$

أوجد حل ما يلي:

ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها $37°$ مع سطح الارض وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52ft/s إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة بالصيغة $d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$ حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 32ft/s^2 و v تمثل السرعة الابتدائية المتجهة

- بسط الصيغة مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية .
- ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسطة .

عند تبسيط الصيغة مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية تصبح : $d = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$

المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسطة تساوي 81ft تقريبًا.

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	إذا كانت $0° < \theta < 360°$, $-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta$ فإن حل المعادلة هو :							
	A	$180°$	B	$30°, 150°$	C	$60°, 180°$	D	$30°$
2	حل المعادلة $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ :							
	A	$\frac{\pi}{2} + \pi k$	B	$\frac{\pi}{3} + \pi k$	C	$\frac{2\pi}{3} + \pi k$	D	$\frac{\pi}{5} + \pi k$

أكمل الفراغات التالية :	
1	إذا كان قياس θ بالراديان فإن حل المعادلة $2\cos^2\theta = 1$ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$
2	إذا كان قياس θ بالدرجات فإن حل المعادلة $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$ $90° + 180°\,k$

أوجد حل ما يلي:

إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$

حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس .

- في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}h$ تماماً؟

عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات ويكون ذلك بعد 213 أو 335 يوماً بعد 21 مارس

وهذا يعني أنه في يوم 20 أكتوبر أو 19 فبراير ستكون عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات .

اختبر نفسك

	اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
1	إذا كانت $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، فما هو الربع الذي تقع فيه زاوية θ							
	A	الأول	B	الثاني	C	الثالث	D	الرابع
2	قيمة $\cos(90° - \theta)$							
	A	$\sin\theta$	B	$-\sin\theta$	C	$\cos\theta$	D	$\sec\theta$
3	تبسيط العبارة : $\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$							
	A	$\sin\theta$	B	$\tan\theta$	C	$\cot\theta$	D	$\sec\theta$
4	أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة : $\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$							
	A	$\sin^2\theta$	B	$\tan^2\theta$	C	$\cot^2\theta$	D	$\csc^2\theta$
5	القيمة الدقيقة لـ $\cos105°$							
	A	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	C	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	D	$\frac{2+\sqrt{6}}{4}$
6	ما قيمة $\sin20°\cos10° + \cos20°\sin10°$							
	A	$\frac{1}{2}$	B	30	C	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	D	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
7	ما قيمة $\sin^2 22.5 + \cos^2 22.5$							
	A	2	B	1	C	$\sqrt{2}$	D	-1
8	إذا كان $\tan\theta = 2$ ، أوجد $\tan 2\theta$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$							
	A	1	B	$\frac{3}{4}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	D	$-\frac{4}{3}$
9	إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، أوجد $\cos 2\theta$ ، حيث θ في الربع الأول							
	A	1	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D	$-\frac{1}{2}$
10	إذا كان $0° < \theta < 90°$ ، $\cos\theta = \frac{1}{2}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ تساوي							
	A	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	B	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	$\frac{4\pi}{3}$	D	$\frac{3\pi}{4}$
11	حل المعادلة $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، حيث $0 \le \theta \le 360°$							
	A	$30°, 150°$	B	$30°, 45°$	C	$60°, 120°$	D	$30°, 120°$
12	أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة : $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$							
	A	$\frac{5\pi}{2}$	B	$\frac{7\pi}{4}$	C	2π	D	$\frac{3\pi}{4}$
13	الزاوية التي تشترك مع الزاوية $420°$ في ضلع الانتهاء هي :							
	A	$30°$	B	$45°$	C	$60°$	D	$120°$

	اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
14	إذا كانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$ و $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ فأوجد $\sin\theta$							
	A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	D	$-\frac{1}{2}$
15	القيمة الدقيقة لـ $\cos 75^\circ$ تساوي							
	A	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	C	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	D	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$
16	المتطابقة $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ تكافئ المتطابقة ...							
	A	$\cos 4\theta$	B	$\sin 4\theta$	C	$\cos 2\theta$	D	$\sin 2\theta$
17	إذا كان $m\angle\theta = 300^\circ$ ، فإن قياس زاويتها المرجعية تساوي ...							
	A	15°	B	30°	C	45°	D	60°
18	أي من الزوايا التالية يكون الجيب والظل لها سالبين ؟							
	A	65°	B	310°	C	120°	D	256°
19	إذا كان $\tan\theta = -2$ و $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، فإن الضلع النهائي للزاوية θ يقع في الربع							
	A	الأول	B	الثاني	C	الثالث	D	الرابع
20	المقدار $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$ يكون سالبًا في الربعين							
	A	الأول والثاني	B	الثاني والثالث	C	الثالث والرابع	D	الرابع والأول
21	طول دورة الدالة $f(x) = k\ \cos kx$ يساوي $\frac{\pi}{2}$ ، فإن سعتها تساوي							
	A	1	B	2	C	4	D	8
22	قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{vmatrix}$							
	A	0	B	1	C	$\cos 2x$	D	$2\ \sin^2 x$
23	ما قيمة $\sec^2\theta - \tan^2\theta$							
	A	0	B	$\frac{1}{2}$	C	1	D	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
24	إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ وكان $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، أوجد $\sin 2\theta$							
	A	$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$	B	$\frac{3}{5}$	C	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	D	$-\frac{\sqrt{2}}{9}$
25	حل المعادلة $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ هو ..							
	A	30°	B	30° أو 210°	C	150° أو 210°	D	لا يوجد لها حل
26	حل المعادلة $3\ \cos^2\theta - 4\ \cos\theta = 0$ و $0^\circ < \theta \le 180^\circ$ هو ..							
	A	30°	B	90°	C	30° أو 330°	D	لا يوجد لها حل

أسئلة تحصيلي

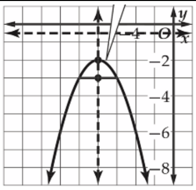
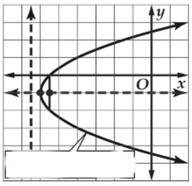
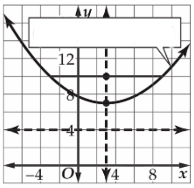
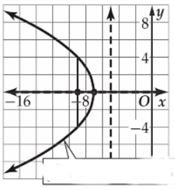
ملحق الإجابات

الفصل الرابع

القطوع المخروطية

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	التمثيل البياني الصحيح للقطع المكافئ الذي معادلته $(x-3)^2 = 12(y-7)$:							
	A		B		C		D	
2	معادلة قطع المكافئ التي تحقق الخصائص التالية : البؤرة $(-9,-7)$ ، الرأس $(-9,-4)$ هي :							
	A	$(x+9)^2 = -12(y+4)$	B	$(x+9)^2 = 12(y+4)$	C	$(x-9)^2 = -12(y-4)$	D	$(x-9)^2 = 12(y-4)$
3	إذا كان دليل القطع المكافئ $y=4$ و $c=-2$ فإن فتحة القطع المكافئ :							
	A	إلى اليسار	B	إلى اليمين	C	إلى الأعلى	D	إلى الأسفل

أكمل الفراغات التالية :

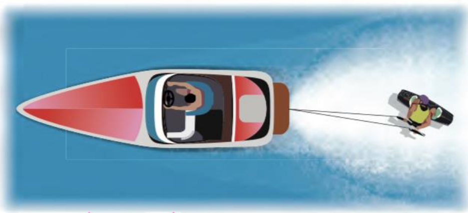
1	بؤرة القطع المكافئ $(y+5)^2 = 24(x-1)$ $\quad (7,-5)$
2	معادلة محور التماثل للقطع المكافئ $-40(x+4) = (y-9)^2$ $\quad y=9$

أوجد حل ما يلي:

يبحر قارب في الماء تاركاً وراءه أثراً على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$

حيث x, y بالأقدام .

- اكتب معادلة القطع المكافئ بالصورة القياسية .
- ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق .



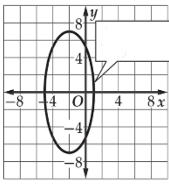
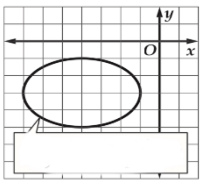
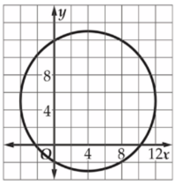
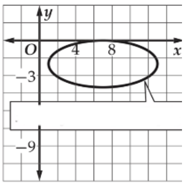
معادلة القطع المكافئ بالصورة القياسية هي :

$(y+5)^2 = 180(x-3)$

طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق يساوي $45\ \text{ft}$

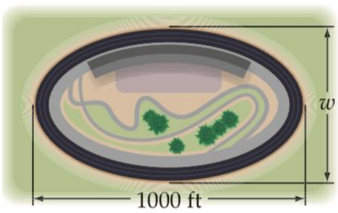
اختبر نفسك

اختبر نفسك

	اختر الإجابة الصحيحة :							
1	التمثيل البياني الصحيح للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$:							
	A		B		C		D	
2	معادلة القطع الناقص التي تحقق الخصائص التالية : الرأسان $(-7,-3),(13,-3)$ ، و البؤرتان $(-5,-3),(11,-3)$ هي :							
	A	$\frac{(x+3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$	B	$\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{100}=1$	C	$\frac{(x+3)^2}{100}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$	D	$\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$
3	الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x+5)^2}{72}+\frac{(y-3)^2}{54}=1$:							
	A	0.2	B	0.5	C	0.7	D	0.9
	أكمل الفراغات التالية :							
1	معادلة المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$	$y=-3$						
2	معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المركز $(3,0)$ ونصف القطر 2	$(x-3)^2+y^2=4$						
	أوجد حل ما يلي:							

يوضح الشكل المجاور: مضمار سباق على شكل قطع ناقص ، اختلافه المركزي 0.75 .

- ما أقصى عرض w لمضمار السباق .
- اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار .



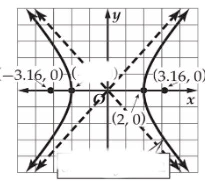
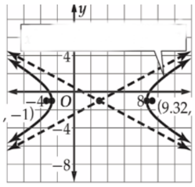
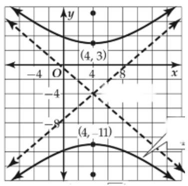
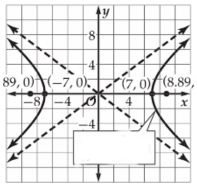
أقصى عرض w لمضمار السباق يساوي 661.44 ft

معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار هي :

$$\frac{x^2}{250000}+\frac{y^2}{109375}=1$$

اختبر نفسك

اختبر نفسك

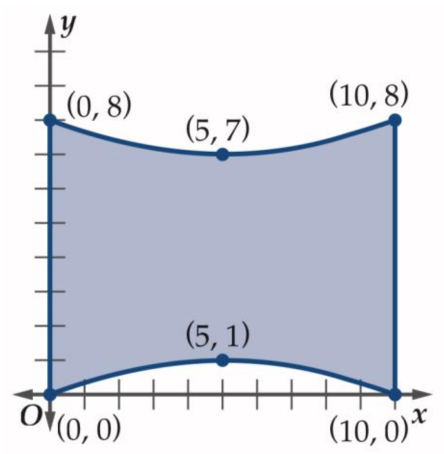
	اختر الإجابة الصحيحة :							
1	التمثيل البياني الصحيح للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$:							
	A		B		C		D	
2	معادلة القطع الزائد التي تحقق الخصائص التالية : البؤرتان $(-1,9), (-1,-7)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحده هي :							
	A	$\frac{(y+1)^2}{15} - \frac{(x-1)^2}{49} = 1$	B	$\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$	C	$\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1$	D	$\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+5)^2}{64} = 1$
3	الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة :							
	A	0.2	B	4.67	C	2.34	D	1.52

	أكمل الفراغات التالية :	
1	خطا التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$	$y = \pm 2\frac{\sqrt{17}}{17}x$
2	رأسا القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$	$(4,5), (-2,5)$

أوجد حل ما يلي:

يبين الشكل المجاور : مخطط أرضية مكتب

- **إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 15 ft . فما أقصر عرض لأرضية المكتب ؟**



أقصر عرض لأرضية المكتب يساوي 90 ft

اختبر نفسك

اختبر نفسك

								اختر الإجابة الصحيحة :
1	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $4x^2 - 5y = 9x - 12$:							
	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D	دائرة
2	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$:							
	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D	دائرة
3	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $16xy + 8x^2 - 10y^2 - 18x + 8y = 13$							
	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D	دائرة
								أكمل الفراغات التالية :
1	المعادلة $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$ على الصورة القياسية $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$							
2	نوع القطع المخروطي $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$ دائرة							
								أوجد حل ما يلي:

في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة ، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$ وقد حددت الأبعاد بالأقدام .

- حدد شكل منحنى القطع الذي يمثل مسار الطائرة ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية .
- إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$ ، فما المسافة الافقية التي تقطعها منذ بداية صعودها إلى نهاية هبوطها ؟
- ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة ؟

شكل منحنى القطع الذي يمثل مسار الطائرة قطع مكافئ

معادلته : $(x - 660)^2 = -\frac{125}{3}(y - 10500)$

المسافة الافقية التي تقطعها منذ بداية صعودها إلى نهاية هبوطها تساوي 1320 ft

أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة يساوي 10500 ft

	اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
1	معادلة محور التماثل للقطع : $(y-3)^2 = -8x$							
	A	$y = 3$	B	$y = -2$	C	$x = 3$	D	$x = -3$
2	أي القطوع التالية رأسه $(2\ ,1)$							
	A	$(x-2)^2 = 3(y-1)$	B	$(x+2)^2 = 3(y+1)$	C	$(y+2)^2 = 3(x-1)$	D	$(y-2)^2 = 3(x-2)$
3	ماهي معادلة الدليل للقطع : $y^2 = 24x$							
	A	$y = 6$	B	$y = -6$	C	$x = 6$	D	$x = -6$
4	ما هي معادلة القطع الذي معادله محور تماثله $y = 2$							
	A	$(x-2)^2 = 3(y-1)$	B	$(x+2)^2 = 3(y+1)$	C	$(y+2)^2 = 3(x-1)$	D	$(y-2)^2 = 3(x-2)$
5	معادلة القطع المكافئ الذي مركزه $(0\ ,0)$ وطول الوتر البؤري 12 ومفتوح في x الموجبة هي :							
	A	$y^2 = 4x$	B	$y^2 = 12x$	C	$y^2 = 6(x+2)$	D	$x^2 = 12y$
6	في القطع المكافئ $(x+1)^2 = 12(y-3)$ المسافة بين البؤرة والرأس يساوي .... وحدات .							
	A	3	B	4	C	8	D	9
7	ما اتجاه القطع المكافئ $x^2 = 8(y-8)$							
	A	يمين	B	يسار	C	أسفل	D	أعلى
8	ما إحداثيات رأس القطع المكافئ $2(x-2)^2 = (y+3)$							
	A	$(-3\ ,2)$	B	$(-2\ ,3)$	C	$(2\ ,-3)$	D	$(3\ ,-2)$
9	معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0\ ,0)$ ومحوره منطبق على محور y ويمر بالنقطة $(4\ ,-2)$							
	A	$x^2 = 8y$	B	$y^2 = 8x$	C	$x^2 + 8y = 0$	D	$y^2 + 8x = 0$
10	طول الوتر البؤري للقطع المكافئ $(y-5)^2 = 8(x-3)$ هو .... وحدات .							
	A	3	B	5	C	8	D	10
11	للقطع الناقص $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ يكون طول المحور الأكبر يساوي :							
	A	9	B	8	C	13	D	6
12	الاختلاف المركزي للقطع الناقص : $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$ هو :							
	A	0.8	B	8	C	0.6	D	0.4
13	في القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x-5)^2}{12} + \frac{(y-7)^2}{20} = 1$ تكون معادلة المحور الأكبر							
	A	$y = 5$	B	$y = 7$	C	$x = 5$	D	$x = 7$
14	المسافة بين المركز والبؤرة للقطع $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$ هي :							
	A	5	B	$\sqrt{11}$	C	11	D	6
15	ما هو مركز القطع الناقص الذي رأساه $(8\ ,3)$, $(2\ ,3)$							
	A	$(-6\ ,0)$	B	$(10\ ,6)$	C	$(-3\ ,0)$	D	$(5\ ,3)$
16	طول المحور الأصغر في القطع : $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$ هو :							
	A	5	B	36	C	10	D	6

	اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
17	قطع ناقص المسافة بين البؤرتين 10 وطول المحور الأكبر 20 فإن معامل الاختلاف له هو :							
	A	2	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{10}$	D	$\frac{2}{5}$
18	أي المعادلات هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل							
	A	$x^2+y^2=4$	B	$(x-1)^2+(y+2)^2=4$	C	$5x^2+3y^2=1$	D	$x+y=1$
19	قيمة k في القطع الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{k}=1$ الذي إحدى بؤرتيه $(0\,,3)$							
	A	7	B	25	C	13	D	1
20	في القطع الناقص قيمة الاختلاف المركزي e تنحصر بين 0 و ...							
	A	-2	B	-1	C	1	D	2
21	القطع الناقص الذي اختلافه المركزي $e=0$ عبارة عن							
	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	دائرة	D	مربع
22	في القطع الزائد $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{4}=1$ البعد بين المركز والرأس هو :							
	A	2	B	4	C	6	D	5
23	في القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{25}=1$ معادلتي خط التقارب هي :							
	A	$y=\pm\frac{4}{5}x$	B	$y=\pm5x$	C	$y=4x$	D	$y=\pm\frac{5}{4}x$
24	معامل الاختلاف المركزي للقطع $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$							
	A	$e=0$	B	$e=\frac{3}{5}$	C	$e=1$	D	$e=\frac{5}{3}$
25	مركز القطع $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x-2)^2}{12}=1$							
	A	$(2,3)$	B	$(2\,,-3)$	C	$(3\,,2)$	D	$(12\,,16)$
26	للقطع الزائد $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{4}=1$ الرأسان هما :							
	A	$(0\,,2)\,,(0\,,-2)$	B	$(2\,,0)\,,(-2\,,0)$	C	$(0\,,1)\,,(1\,,-1)$	D	$(1\,,2)\,,(1\,,-2)$
27	ما نوع القطع في المعادلة : $4x^2+2xy+3y^2=1$							
	A	قطع مكافئ	B	قطع ناقص	C	قطع زائد	D	دائرة
28	$6y^2-24y+28-x=0$ هي معادلة :							
	A	قطع مكافئ	B	قطع ناقص	C	قطع زائد	D	دائرة

المراجع

- الرياضيات ٥ : المستوى الخامس المسار العلمي/ وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٩هـ

- العبد الكريم ، ناصر عبد العزيز ناصر

التحصيلي للتخصصات العلمية – بنين وبنات ./ ناصر عبد العزيز ناصر العبدالكريم - ط٥ - الرياض ، ١٤٤٠هـ

- عبدالحليم ، عماد شوقي محمد

المعاصر في التحصيلي / عماد شوقي محمد عبدالحليم - الدمام ، ١٤٤٠هـ

- البابطين ، فهد عبدالله

تحصيلي علمي المساعد في اختبارات التحصيل بنين – بنات

للأقسام العلمية ./ فهد عبدالله البابطين – ط٢.. – الرياض ، ١٤٣٦هـ

- الصور التعبيرية www. pinterest. com

جميع الحقوق محفوظة

التصميم والتنسيق :

ندى محمد الناصر

تصمم الغلاف :

الأستاذ: توفيق علي زكري

المؤلفتان :

ندى محمد الناصر

@nada_mn_

جواهر حمدان العنزي

@Jwaher_H5

المراجع :

الأستاذ : سامي محمد المعيلي

@apo_roba

الفهرس

الفصل الأول
تحليل الدوال

الفصل الثاني
العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفهرس

الفصل الثالث
المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل الرابع
القطوع المخروطية