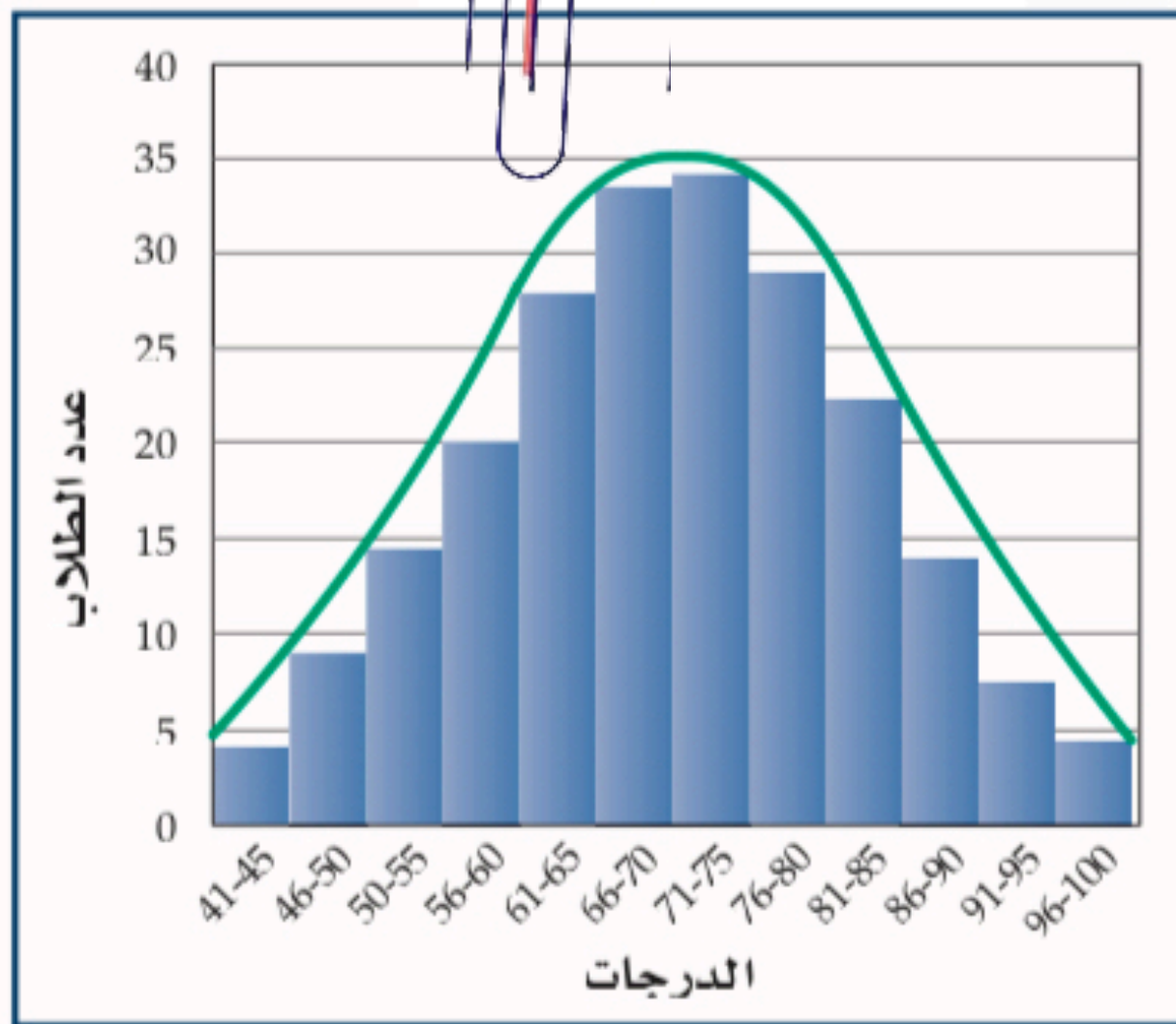


التوزيع الطبيعي

فيما سبق :
درست التوزيعات الاحتمالية.

والآن :

- أحد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزعة طبيعياً أو ملتوياً.
- أستعمل القانون التجريبي لأجد الاحتمالات .



لماذا؟

مثّل المعلم عبدالعزيز درجات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانياً كما هو مبين في الشكل المجاور. لاحظ أن هناك تجمعاً لدرجات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع الدرجات يشبه الجرس تقريباً. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعاً طبيعياً.

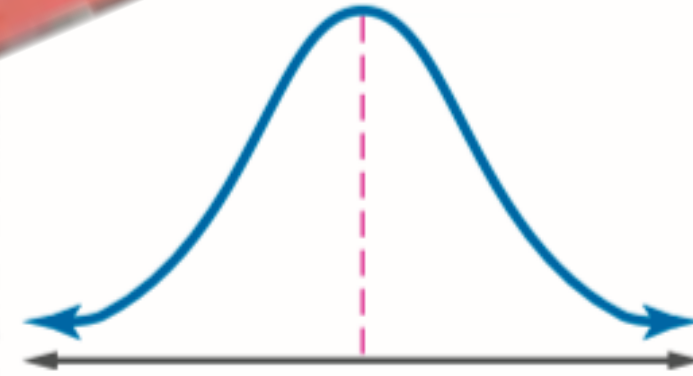
أسئلة التعزيز :

- ما نسبة الطلاب الذين تزيد درجاتهم عن 80 درجة؟
- ما نسبة الطلاب الذين تقع درجاتهم بين 80-60 ؟

التوزيعات الطبيعية والملتوية في التوزيع الاحتمالي المتصل والذي هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ومثال ذلك أطوال أشخاص وأوزانهم، ومستوى الدهون عند الأشخاص البالغين. وأفضل مثال على التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو التوزيع الطبيعي.

مفهوم أساسي

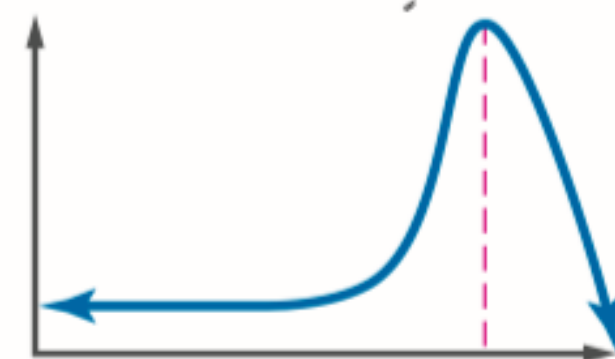
خصائص التوزيع الطبيعي



المتوسط = الوسيط = المنوال

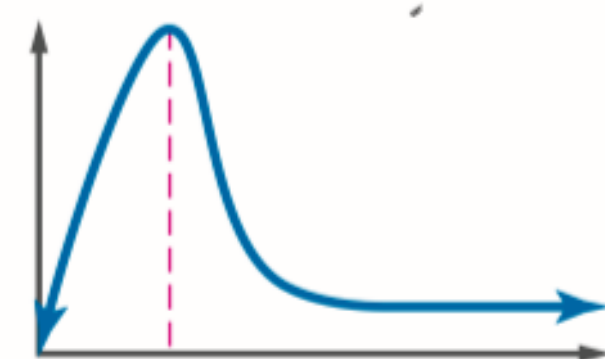
- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسّه.

التواء سالب
(ملتو إلى اليسار)



معظم البيانات تتركز في اليمين وقليل منها في اليسار.

التواء موجب
(ملتو إلى اليمين)



معظم البيانات تتركز في اليسار وقليل منها في اليمين.

3 الاحتمال والاحصاء

مقطعة توضيحي



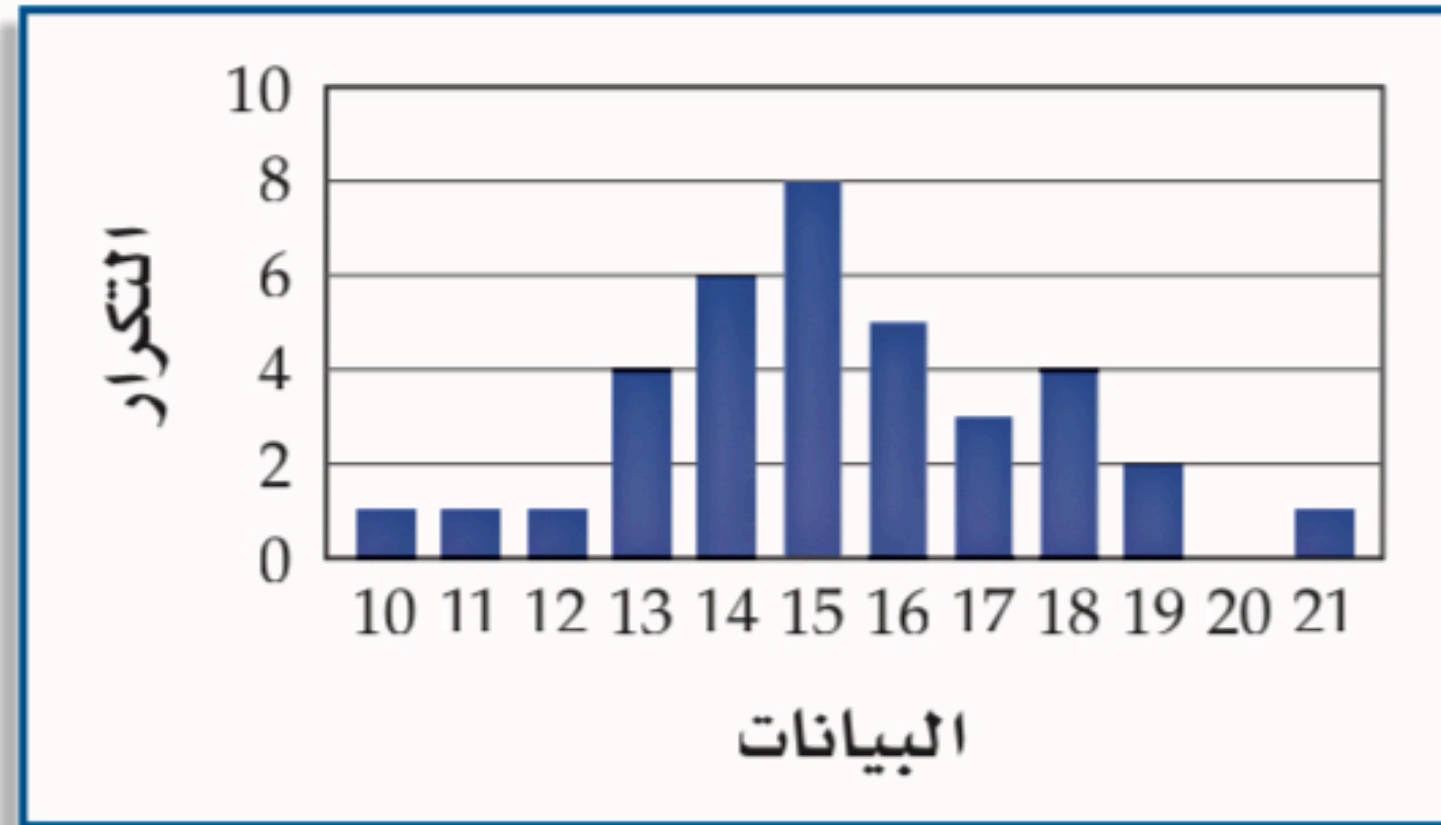
مثال 1

تصنيف بيانات التوزيع

حدّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجباً، أو التواءً سالباً، أو موزّعة توزيعاً طبيعياً:

البيانات	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
التكرار	1	1	1	4	6	8	5	3	4	2	1

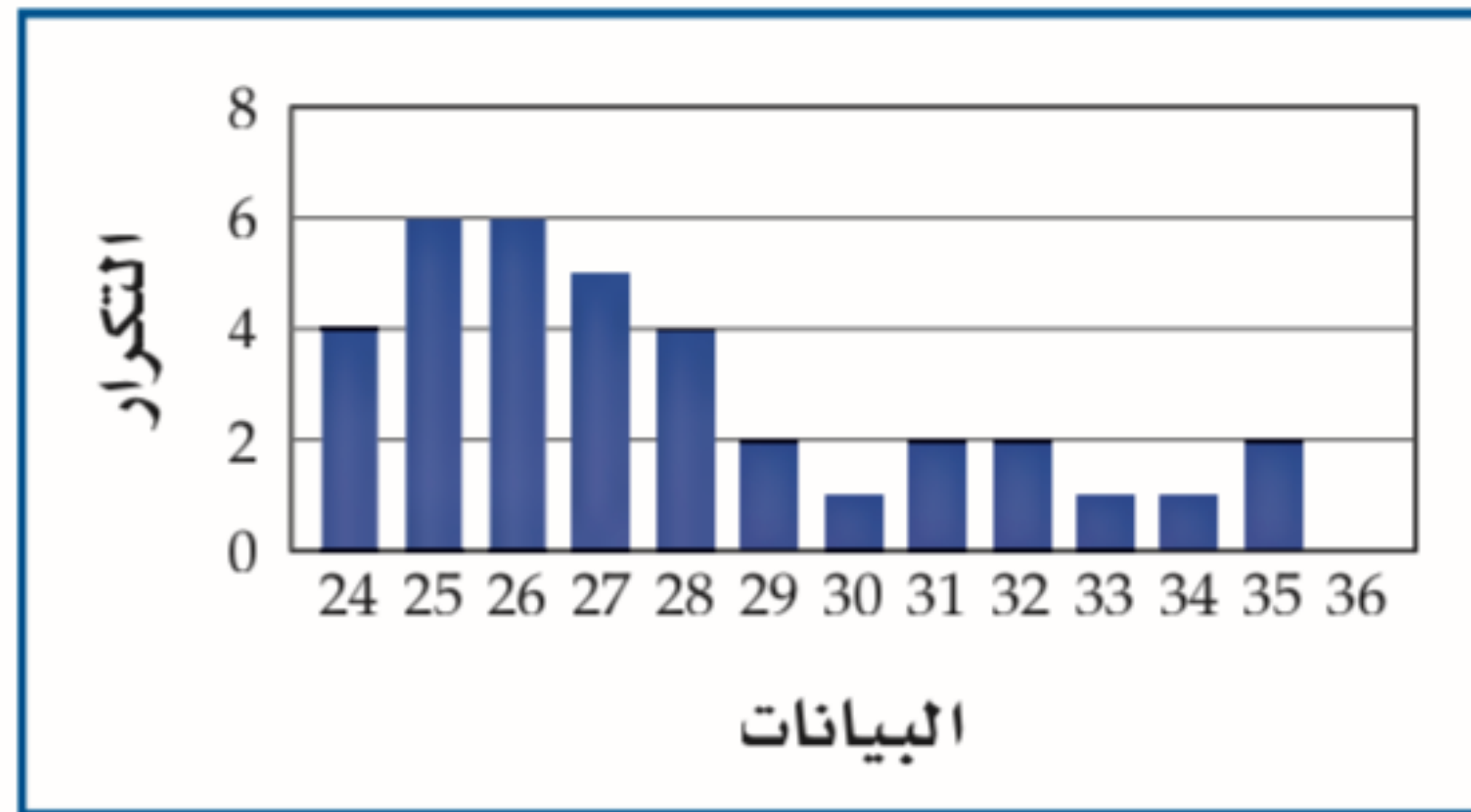
(a)



استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في الوسط، ويبدو كأنه إلى حد ما متماثل حول المتوسط، فإن البيانات تُعتبر موزّعة توزيعاً طبيعياً.

حدّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجباً، أو التواءً سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً:

البيانات	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
التكرار	4	6	6	5	4	2	1	2	2	1	1	2



استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في جهة اليسار ومنخفض في كل من الوسط وعلى اليمين، فإن التوزيع يبدو كأنه ملتبس إلى اليمين (التواء موجب).

تحقق من فهمك

(1) حدّد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواءً موجباً، أو التواءً سالباً، أو موزّعة توزيعاً طبيعياً.

قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1

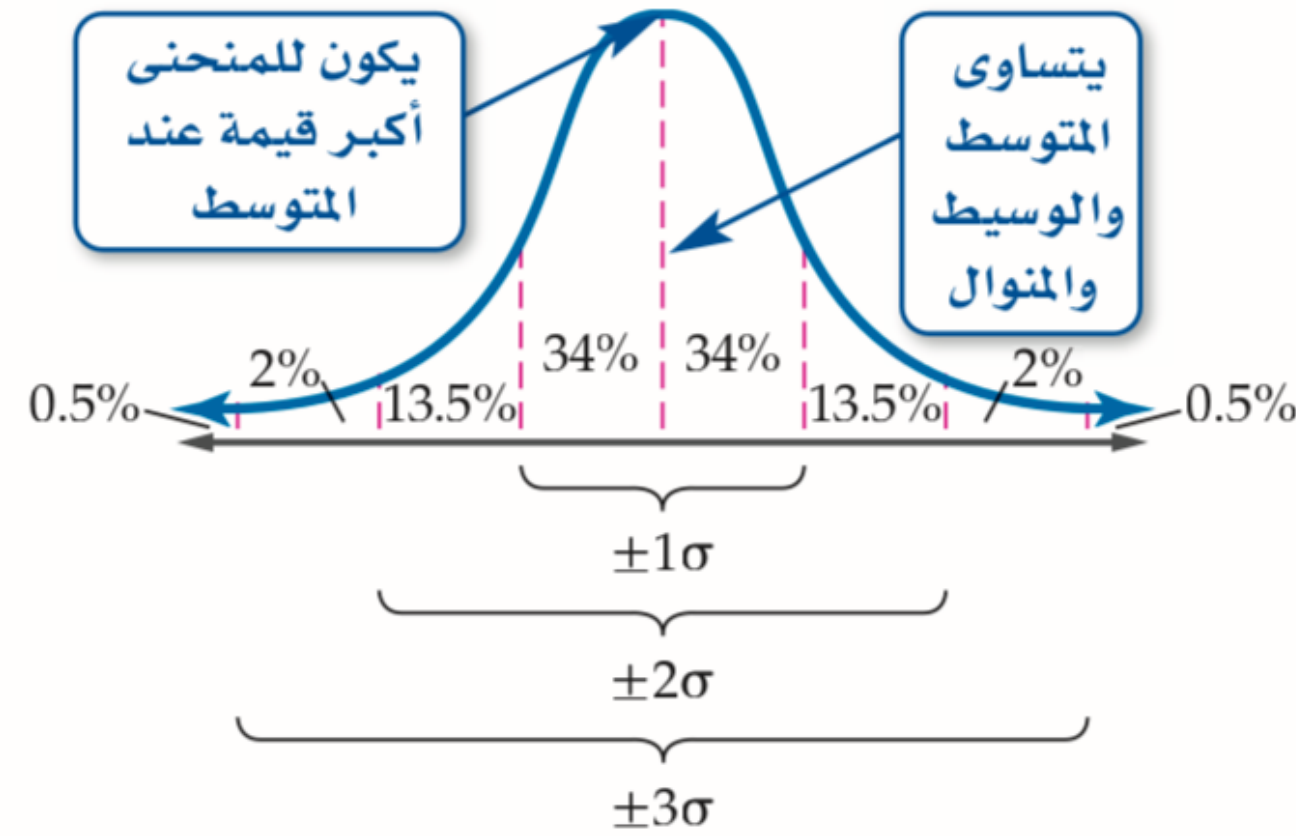
تدريب

(1) درجات: يوضح الجدول أدناه نتائج أحد الاختبارات (النهاية العظمى للاختبار 40). حدّد ما إذا كانت البيانات تظهر التواء موجباً، أو التواء سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً. (مثال 1)

فئات الدرجات	عدد الطلاب
13-15	12
16-18	27
19-21	29
22-24	19
25-27	8
28-31	1
32-35	1

القانون التجريبي إن المساحة بين قيمتين من البيانات تمثل نسبة البيانات التي تقع بين هاتين القيمتين. ويمكن أن يستعمل القانون التجريبي لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي، والتي تقع ضمن انحراف أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط.

مفهوم أساسي القانون التجريبي



يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

- يقع 68% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

وهذا يعني أن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 95% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

وهذا يعني أن الغالبية العظمى من البيانات (95%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 99% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

وهذا يعني أن جميع البيانات تقريباً (99%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.

التوزيع الطبيعي

مثال 2

المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة X ثم اختيارها عشوائيًا في هذا التوزيع عن 24، (أي أوجد $P(X > 24)$).

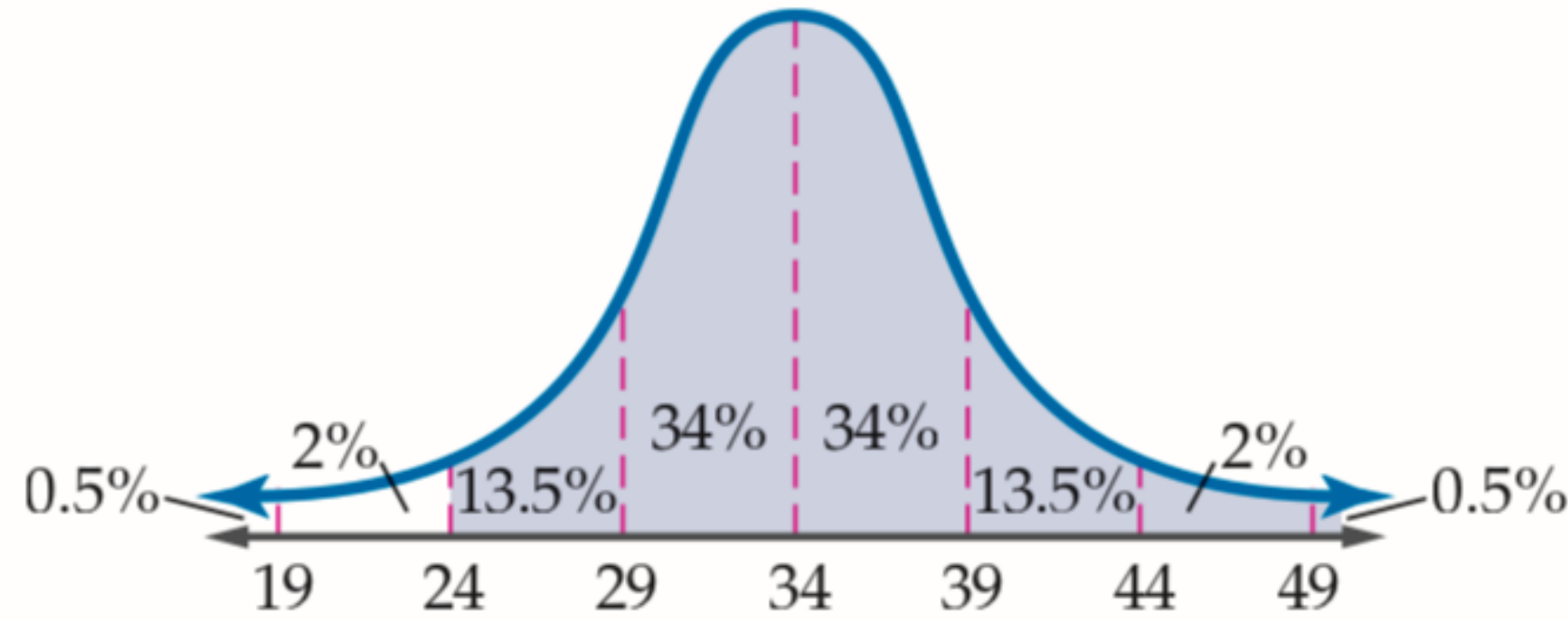
$$\mu = 34, \sigma = 5$$

الخطوة 1 أوجد القيم $\mu \pm \sigma, \mu \pm 2\sigma, \mu \pm 3\sigma$ (وهي المتوسط مضافاً إليه أو مطروحاً منه المضاعفات الثلاثة الأولى للانحراف المعياري).

$$\mu \pm \sigma = 34 \pm 5 = 29, 39$$

$$\mu \pm 2\sigma = 34 \pm 10 = 24, 44$$

$$\mu \pm 3\sigma = 34 \pm 15 = 19, 49$$



الخطوة 2 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، وحدد عليه المتوسط $\mu = 34$ والقيم السابقة.

الخطوة 3 ظل المنطقة التي تمثل الاحتمال المطلوب.

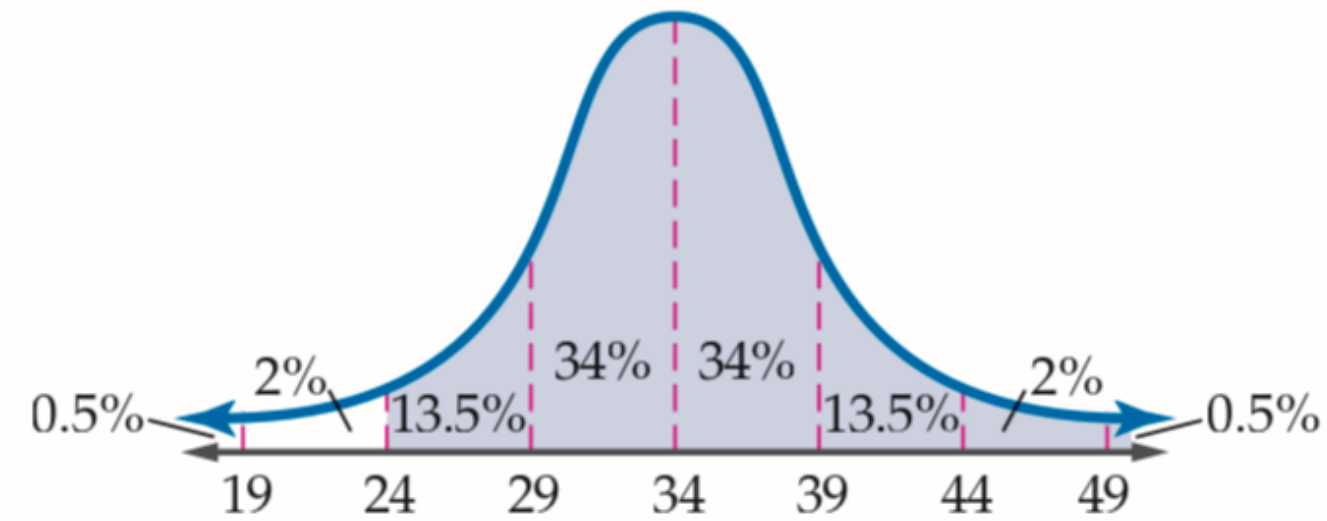
الخطوة 4 احسب الاحتمال المطلوب:

$$P(X > 24) = (13.5 + 34 + 34 + 13.5 + 2 + 0.5)\% = 97.5\%$$

إذن: $P(X > 24) \approx 97.5\%$

تحقق من فهمك

(2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائياً في التوزيع الوارد في المثال 2 أقل من 49.



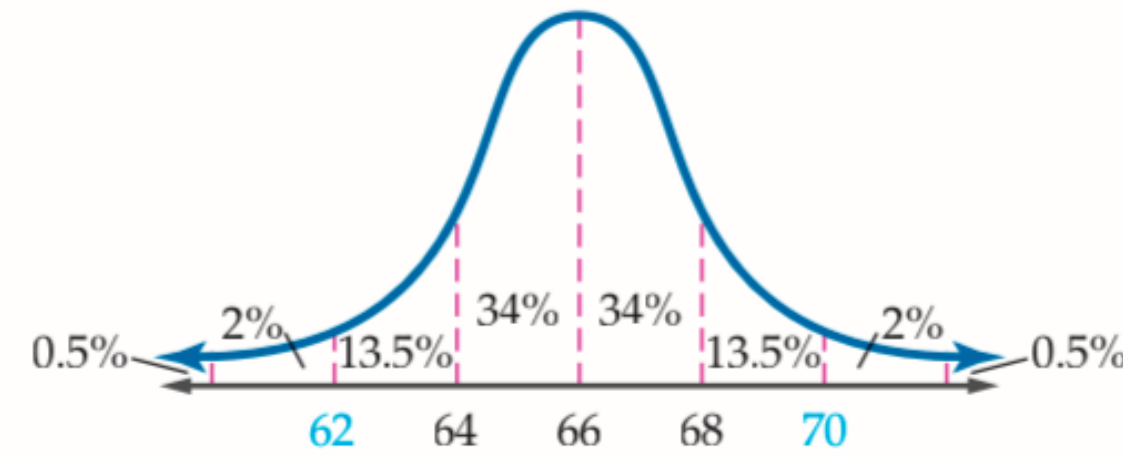
(3) تتوزع مجموعة بيانات توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 161،
وانحراف معياري 12، أوجد أن يتم اختيار قيمة لـ X عشوائياً من هذا
التوزيع، بحيث تكون أقل من 149، أي أوجد $P(X < 149)$.
(مثال 2)

عينة موزعة توزيعاً طبيعياً

مثال 3 من واقع الحياة

أطوال: توزع أطوال 1800 يافع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 66 in ، وانحراف معياري يساوي 2 in .

(a) ما العدد التقريبي لليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

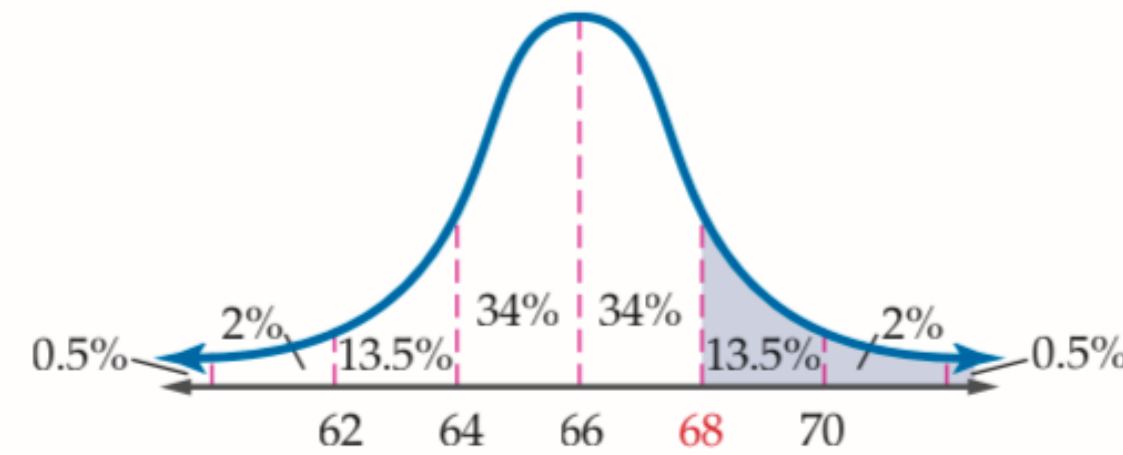


ارسم منحنى التوزيع الطبيعي.

تبعد كل من 62, 70 عن المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ لذا فإن 95% من البيانات واقعة بين الطولين 62, 70.

ولأن $1800 \times 95\% = 1710$ ، لذا يوجد 1710 يافعين تقريباً تقع أطوالهم بين 62 in و 70 in .

(b) ما احتمال أن يتم اختيار أحد اليافعين عشوائياً، بحيث يزيد طوله على 68 in ؟



من الشكل المجاور، القيمة الأكبر من 68 تبعد أكثر من انحراف معياري واحد عن المتوسط الحسابي، وتتوزع الأطوال على النحو الآتي: 13.5% بين انحراف معياري واحد وانحرافين معياريين، 2% بين انحرافين معياريين وثلاثة انحرافات معيارية، 0.5% فوق 3 انحرافات معيارية.

لذا فاحتمال اختيار يافع يكون طوله أكبر من 68 in

$$(13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$$

إذن الاحتمال المطلوب يساوي 16% تقريباً

تحقق من فهمك

درجات: إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلوجراماً، وانحراف معياري 10 كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :

(3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلوجراماً؟ **68 موظفاً تقريباً**

(3B) ما احتمال أن يتم اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجراماً؟ **97.5% تقريباً**

تدريب

(8) **مدارس:** أعطى عمران اختباراً قصيراً لطلبته البالغ عددهم (50) طالباً، وكانت الدرجات موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 21، وانحراف معياري 2.

(a) ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 19، 23؟

(b) ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و 25؟

3

الاحتمال والاحصاء

الواجب المنزلي

