النهايات والاشتقاق

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

4 النهايات والاشتقاق

فيما سبق:

درستُ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن:

- أقدِّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدِّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات:

النهاية من جهة واحدة

one-sided limit

النهاية من جهتين

two-sided limit

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@Hudali_math

4 النهايات والاشتقاق

لماذا ؟

هل هناك نهايات للأرقام المسجَّلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجَّل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة 5.05 m. ويمكن استعمال الدالة:

$f(x) = \dfrac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129\,x}}$ لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1900 م ، يمكنك استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب x من المالانهاية؛ للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

4 النهايات والاشتقاق

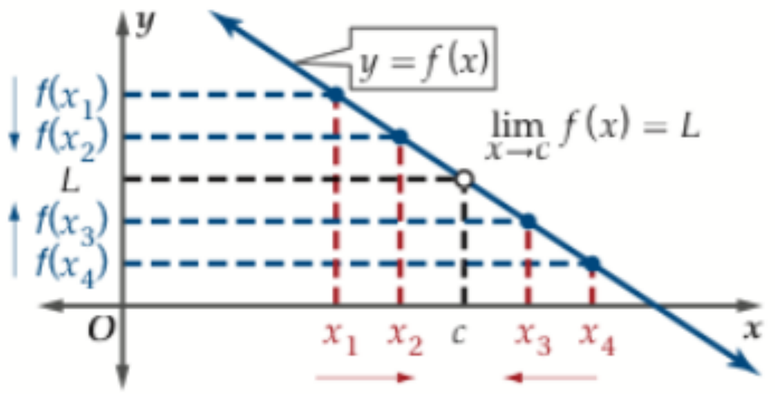
تقدير النهايات عند قيم محددة: يتمحور علمُ التفاضلِ والتكاملِ حول مسألتين أساسيتين:

- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x.

وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.

تعلمت في الدرس 3-1 أنه إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L، كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L، وتكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c؛ أي $\lim_{x \to c} f(x)$، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيًّا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.



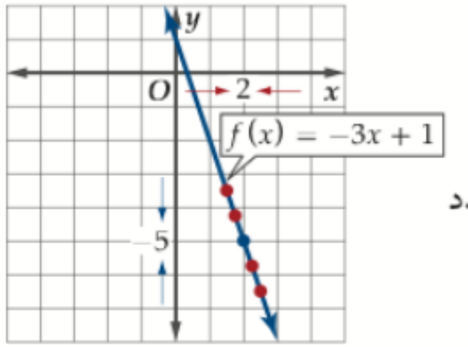
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

مثال 1 تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x\to 2}(-3x+1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًّا: مثِّل الدالة الخطية $y=-3x+1$ بيانيًّا باستعمال النقطتين $(2,-1)$, $(1,0)$.

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=-3x+1$، أنه كلما اقتربت x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد -5؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:



$$\lim_{x\to 2}(-3x+1)=-5$$

التعزيز عدديًّا: كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ← | → x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997		−5.003	−5.03	−5.3

يبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد -5، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تاريخ الرياضيات

ثابت بن قرة

(221هـ–288هـ)

من أوائل من فكروا بعلم التفاضل والتكامل، حيث أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران القطع المكافئ حول محوره.

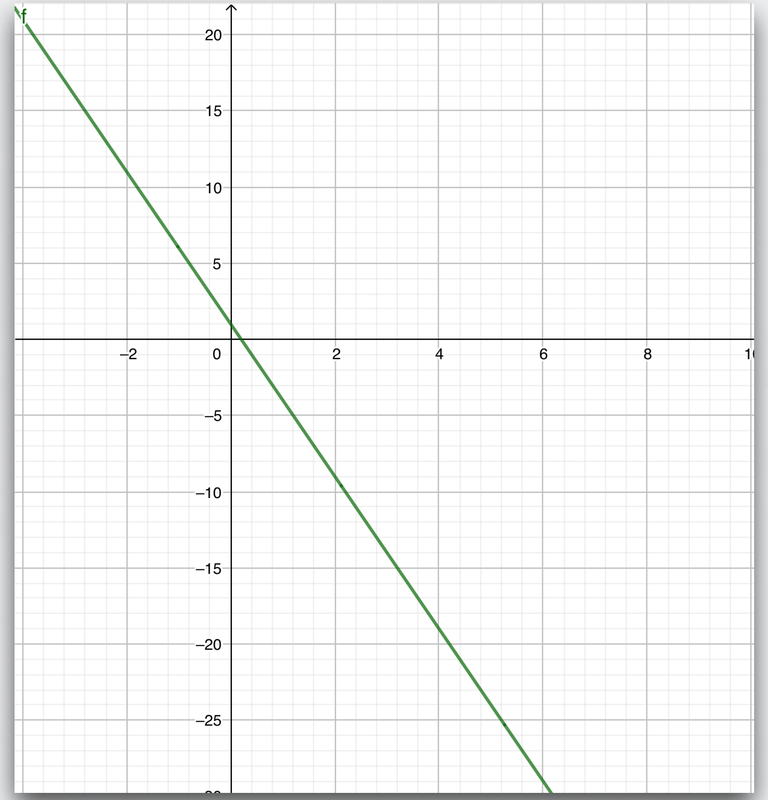
في المثال 1، لاحظ أن $\lim_{x\to 2}(-3x+1)$ هي نفسها $f(2)$، إلا أن نهاية الدالة لا تساوي دائمًا قيمة الدالة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

4 النهايات والاشتقاق

تحقق من فهمك :

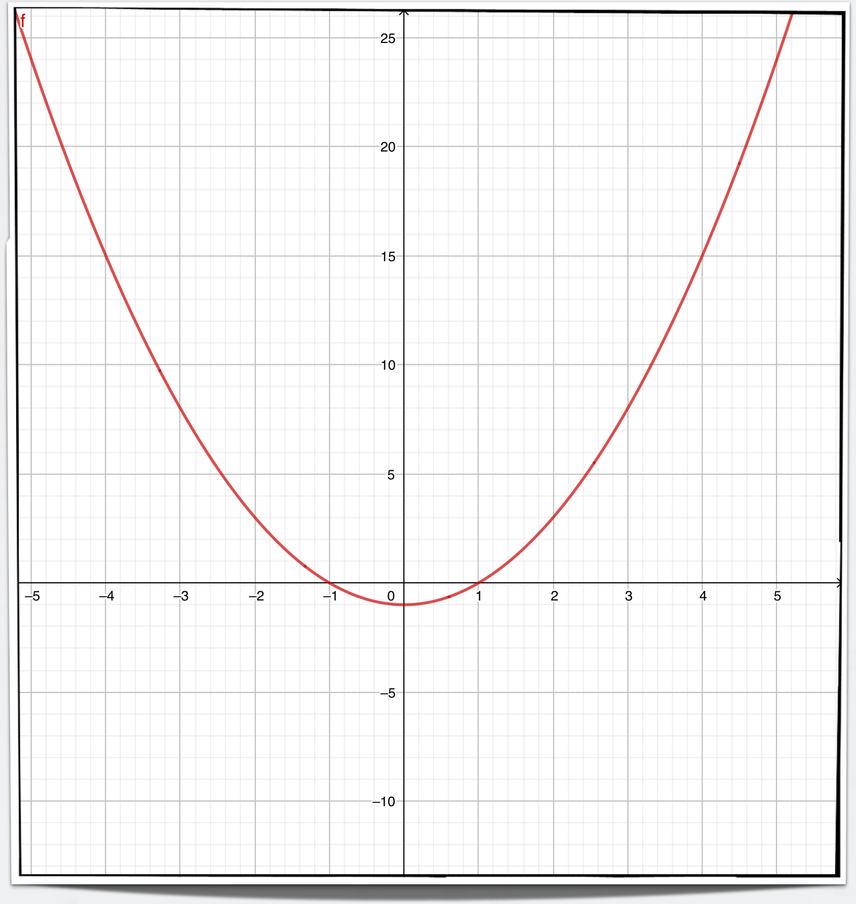
قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم.



$$\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$$ **(1A**

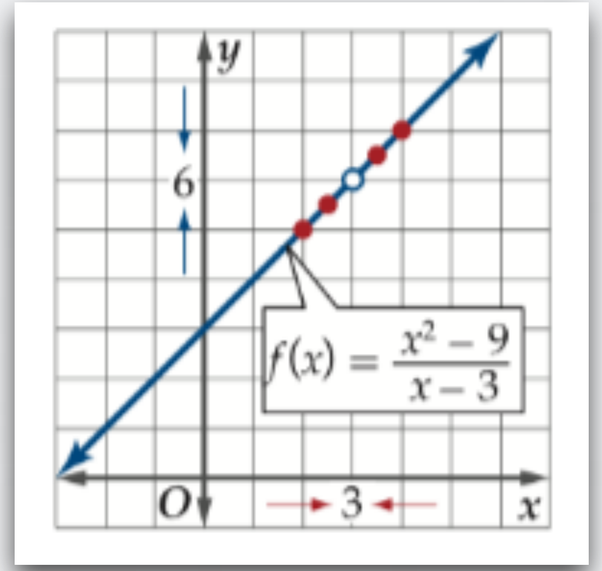
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

النهايات والاشتقاق



$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) \quad \textbf{(1B}$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



مثال 2 تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدولِ قيم.

التحليل بيانيًا:

مجال الدالة $\mathbb{R} - \{3\}$

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ المجاور، أنه كلما اقتربت x من العدد 3، فإن قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد 6؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

x تقترب من 3 ← | → x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يُبيّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 3، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

تحقق من فهمك :

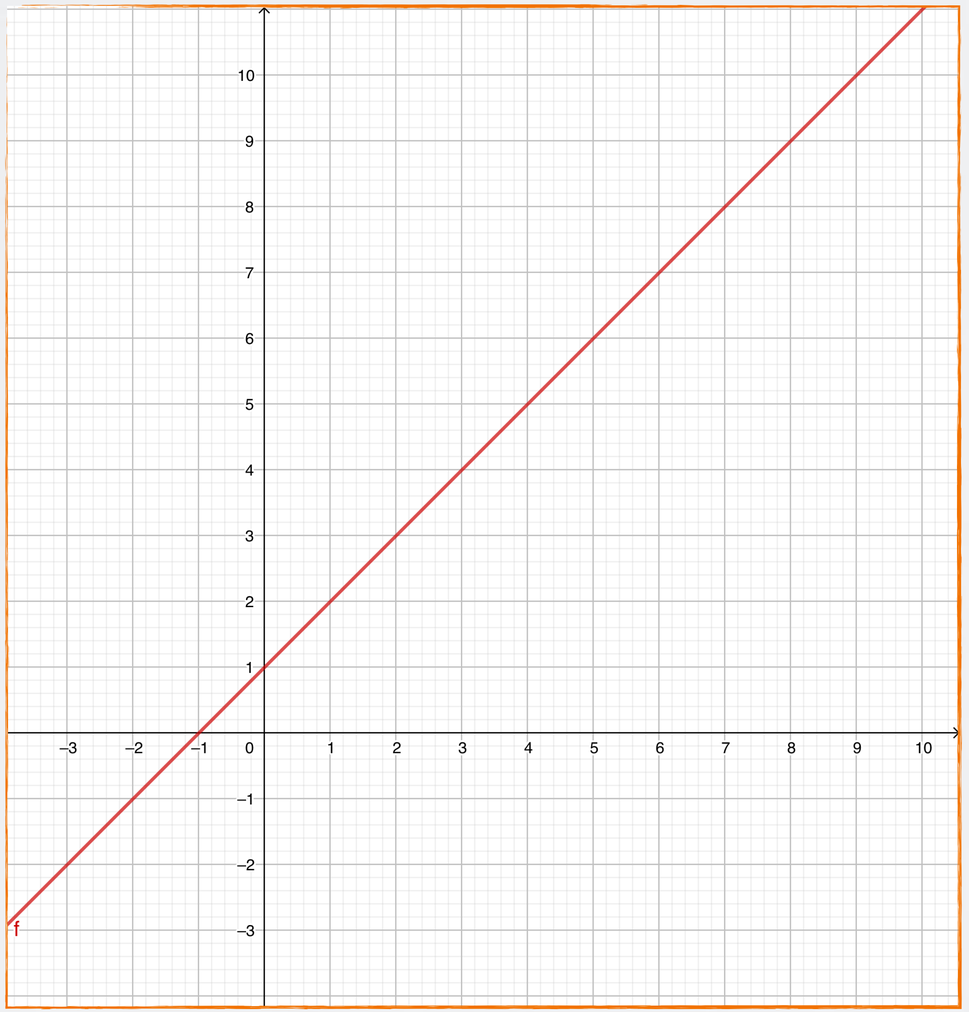
قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك من خلال جدول قيم.

(2A $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

4

النهايات والاشتقاق



$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$$ (2B

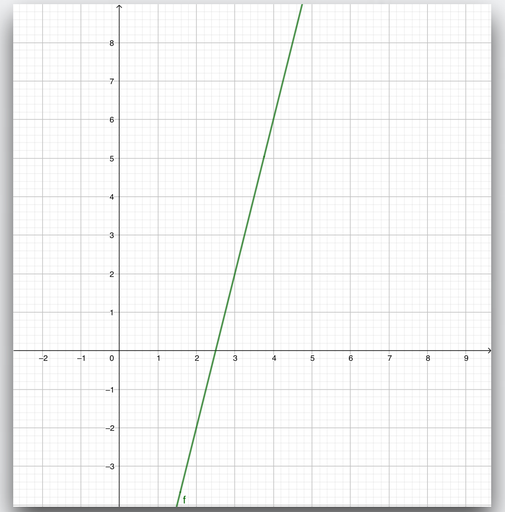
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@Hudali_math

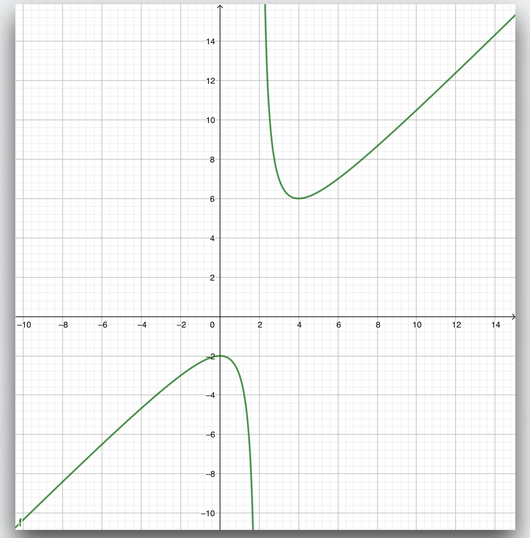
تدرب

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. إرشاد:" يمكنك استعمال الآلة البيانية للتمثيل البياني". (المثالان 1, 2)

1) $\lim_{x \to 5} (4x - 10)$



4) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

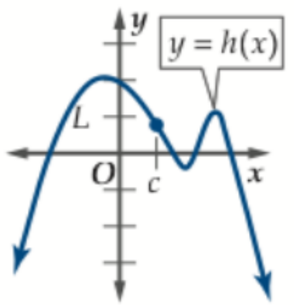
في المثال 2 ، لاحظ أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 عند اقتراب قيم x من العدد 3، على الرغم من أن $f(3) \neq 6$.
فالعبارة $\frac{x^2-9}{x-3}$ غير معرّفة عندما $x = 3$. وهذه الملاحظة توضِّح مفهومًا مهمًّا في النهايات.

مفهوم أساسي

عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

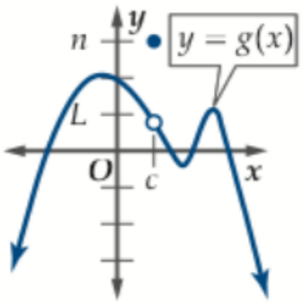
التعبير اللفظي: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.

الأمثلة:



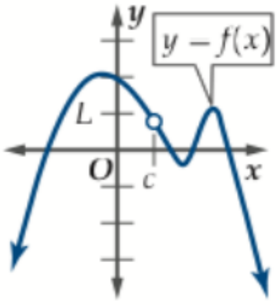
$\lim_{x \to c} h(x) = L$

$h(c) = L$



$\lim_{x \to c} g(x) = L$

$g(c) = n$



$\lim_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرفة

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

4 النهايات والاشتقاق

لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من c من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهةٍ واحدة**.

مفهوم أساسي — **النهايات من جهة واحدة**

النهاية من اليمين

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين، فإن:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = L_1$ ، وتقرأ:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1

النهاية من اليسار

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار، فإن:

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2

يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين**، وما يعنيه كونها موجودة.

مفهوم أساسي — **النهاية عند نقطة**

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، أي أنه:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$ ،

إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) = L$

تنبيه!

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار للدالة

لمناقشة النهاية من اليمين لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرّفة على يمين c على فترة (c, b).

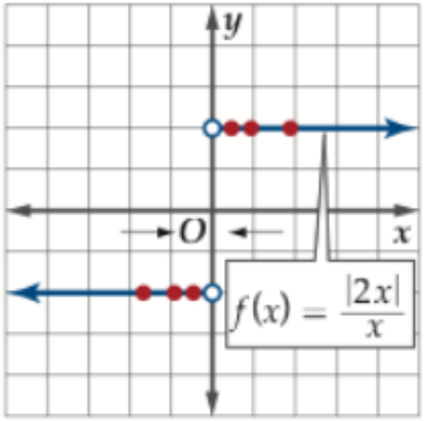
ولمناقشة النهاية من اليسار لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرّفة على يسار c على فترة (a, c).

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

مثال 3 تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

(a $\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$



يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين ، فإن $\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

إرشادات للدراسة

وصف النهاية

إذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين، فإننا نقول: إن النهاية غير موجودة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

4

النهايات والاشتقاق

تحقق من فهمك :

(3A حيث: ، $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \quad x < 1 \\ 2x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(3B حيث: ، $\lim_{x\to -2^-} g(x)$, $\lim_{x\to -2^+} g(x)$, $\lim_{x\to -2} g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \quad x < -2 \\ -x^2 & , \quad x \geq -2 \end{cases}$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@Hudali_math

4 النهايات والاشتقاق

إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

قراءة الرياضيات

السلوك غير المحدود

تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x \to c$، أنه باختيار قيمة لـ x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.

تنبيه!

النهايات غير المحدودة

من الضروري أن نفهم أن العبارتين

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

هما فقط وصف للحالة التي بسببها $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة، إذ لا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ عددين حقيقيين.

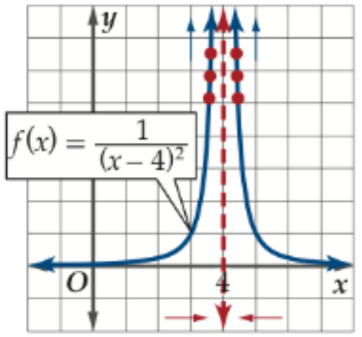
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$

التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{(x-4)^2}$ المجاور أن:



$$\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 4 ، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، وبما أن كلًّا من النهايتين من اليسار ومن اليمين ∞ . لذا فإن $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ لا تساوي عددًا حقيقيًّا، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين ∞ ، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty$.

التعزيز عدديًّا:

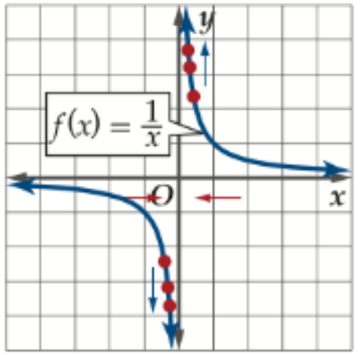
x تقترب من 4 ← | → x تقترب من 4

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 4 من اليسار أو من اليمين ، فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$



التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار ، قلّت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليمين.

إن كلتا النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين. لذا فإن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة ، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x = 0$ بعبارة واحدة ، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ ، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار .

التعزيز عدديًّا:

x تقترب من 0 ← | → x تقترب من 0

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

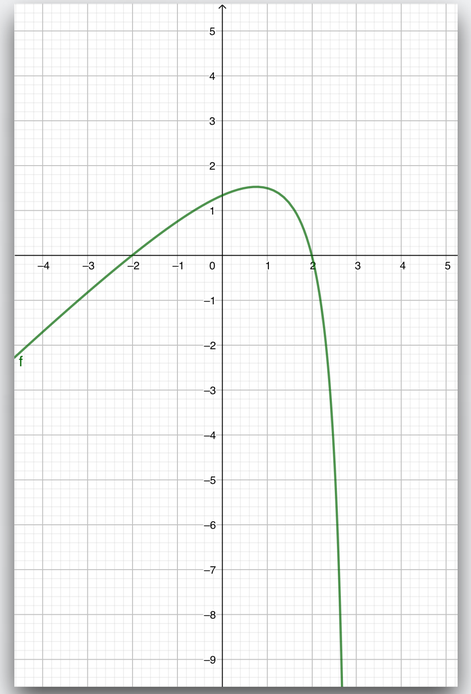
يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار أو من اليمين ، فإن قيم $f(x)$ إما أن تنقص أو تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

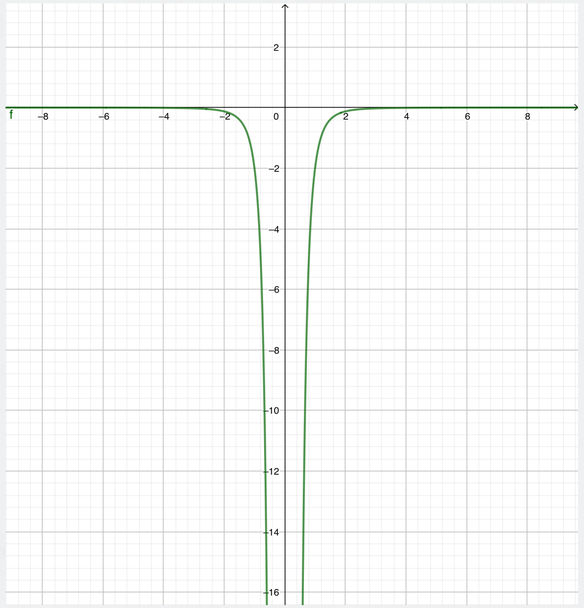
تحقق من فهمك :

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

(4A $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$



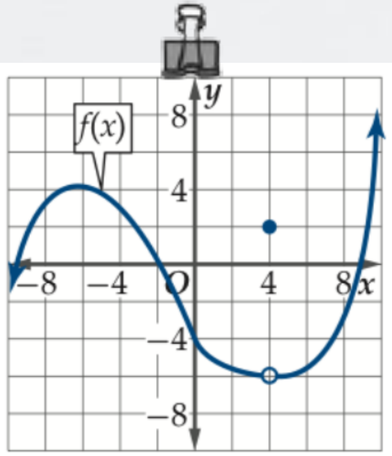
(4B $\lim_{x \to 0} -\frac{2}{x^4}$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



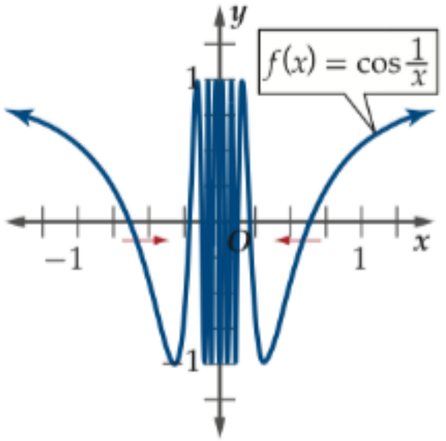
21) $\lim_{x \to -4} f(x)$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

لا تكون النهاية موجودة أيضًا عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c.

مثال 5 النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ إذا كانت موجودة.



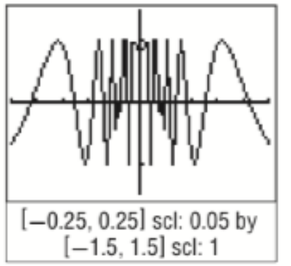
يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ المجاور أن قيم $f(x)$ تتذبذبُ بشكل مستمر بين العددين -1 ، 1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0 ، مما يعني أنه لأي قيمة x_1 قريبة من الصفر ، بحيث $f(x_1) = 1$ ، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًّا من الصفر مثل x_2 ، بحيث $f(x_2) = -1$ ، وبالمثل لأي قيمة قريبة من الصفر x_3 ، بحيث $f(x_3) = -1$ ، يمكنك إيجاد قيمة مثل x_4 قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4) = 1$.

أي أن $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ غير موجودة.

إرشاد تقني

التذبذب اللانهائي

خاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية تفيد غالبًا في توقع قيمة النهاية للدالة، إلا أنه لا يمكنك الاعتماد عليها دائمًا. فهي تعتمد على عدد محدود من النقاط في تمثيل المنحنى، كما في المثال 5 المبيَّن تمثيله أدناه.



فالتمثيل بالحاسبة البيانية لم يظهر أن للدالة عددًا لا نهائيًا في التذبذبات بالقرب من الصفر.

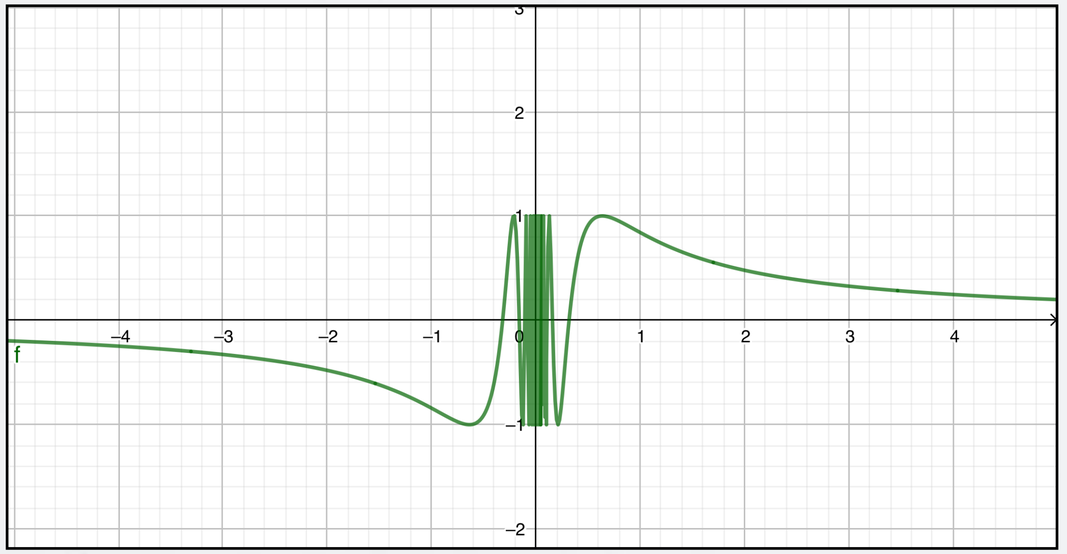
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

4

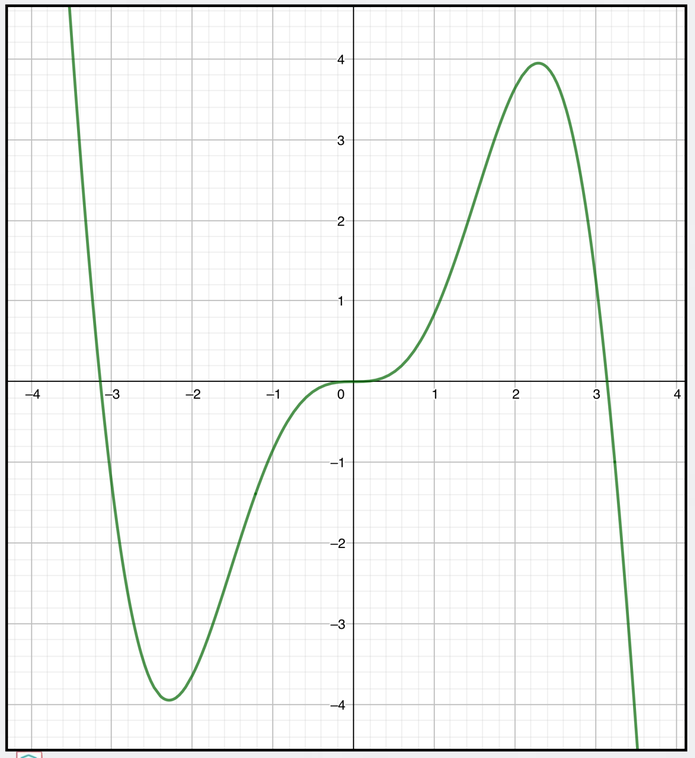
النهايات والاشتقاق

تحقق من فهمك :

(5A $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$



(5B $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

نلخّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة غير موجودة.

ملخص المفهوم

أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقترابٍ x من العدد c من اليمين، أو العكس.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

النهايات والاشتقاق

تقدير النهاية عند المالانهاية : درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم x من عدد ثابت c ، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخّص لرموز هذه النهايات.

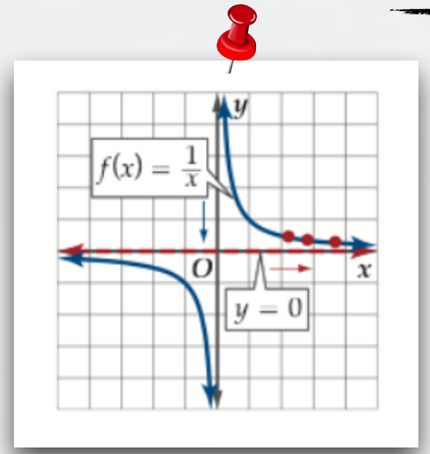
مفهوم أساسي — النهايات عند المالانهاية

- **إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكلٍ غير محدود، فإن:**
  $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- **إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكلٍ غير محدود، فإن:**
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math



مثال 6 تقدير النهاية عند المالانهاية

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ، فكلما زادت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.

التعزيز عدديًا:

x تقترب من ∞ ←

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

→

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما زادت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0.

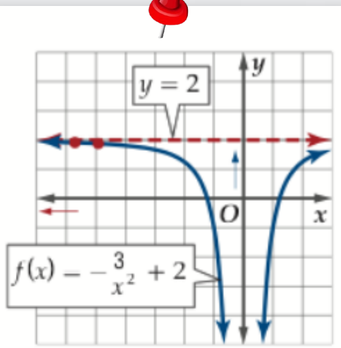
إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 0$ ، وتشير النهاية في مثال 6b إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 2$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

النهايات والاشتقاق



تنبيه!

السلوك المتذبذب

إن التذبذب اللانهائي للدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. فإذا كان التذبذب بين قيمتين مختلفتين، فالنهاية غير موجودة. أما إذا كان التذبذب متقاربًا نحو عدد معين، فالنهاية موجودة.

(b $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=-\frac{3}{x^2}+2$ المجاور أن $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)=2$ ، فكلما قلّت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.

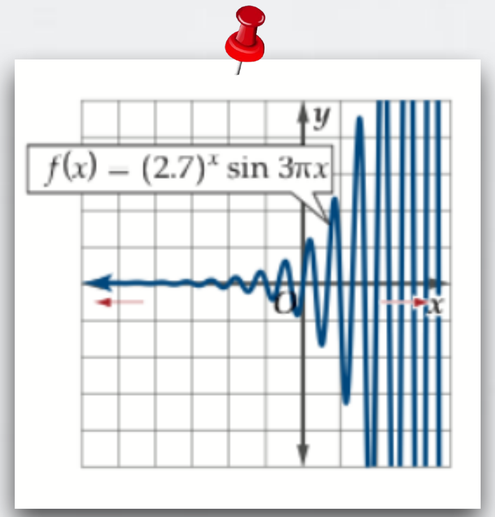
التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$ ←

x	−10000	−1000	−100	−10
$f(x)$	1.99999997	1.999997	1.9997	1.97

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 2.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math



c) $\lim_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$, $\lim_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$

التحليل بيانيًّا : يُبيّن التمثيل البياني للدالة

$f(x) = (2.7)^x \sin 3\pi x$ المجاور أن:

$\lim_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x = 0$ ، فكلما قلَّت قيم x ،

تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0 .

في حين يبيّن التمثيل البياني أن $\lim_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$ غير موجودة ، فكلما ازدادت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدةً.

التعزيز عدديًّا :

x تقترب من $-\infty$ ← x تقترب من ∞ →

x	−17.1	−10.8	−10.1	0	10.1	50.1	99.1
$f(x)$	3.4×10^{-8}	−0.00002	−0.00004	0	1.8×10^{4}	3.3×10^{21}	-4.5×10^{42}

يتضح من نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0 ، في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم x.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

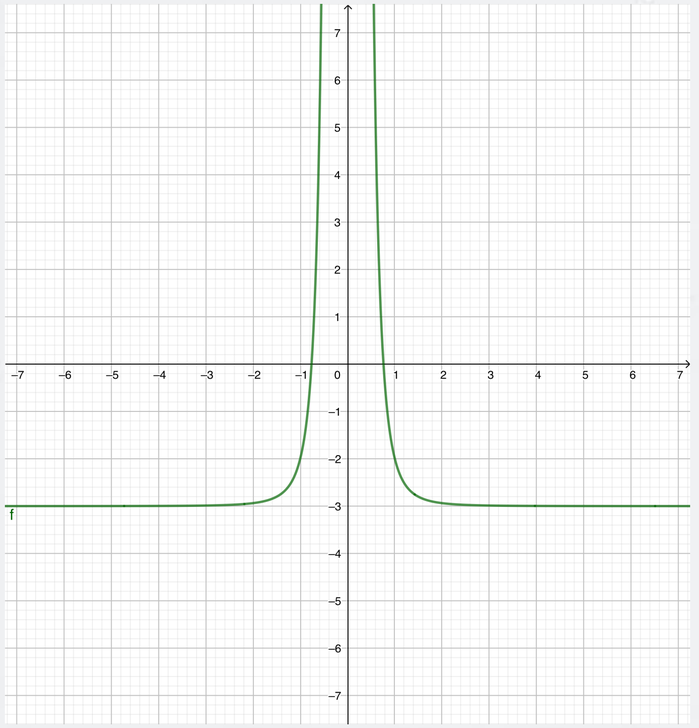
تحقق من فهمك :

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

(6A $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$

. . . . . .

. . . . . .



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

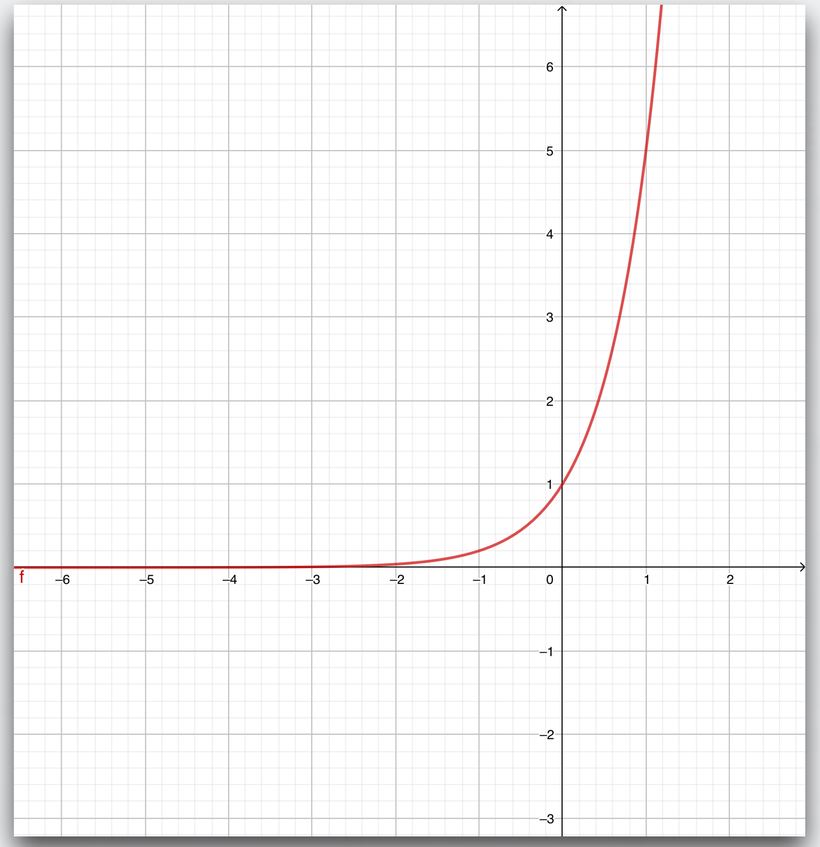
تحقق من فهمك :

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

.....

.....

(6B $\lim_{x \to -\infty} 5^x$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@Hudali_math

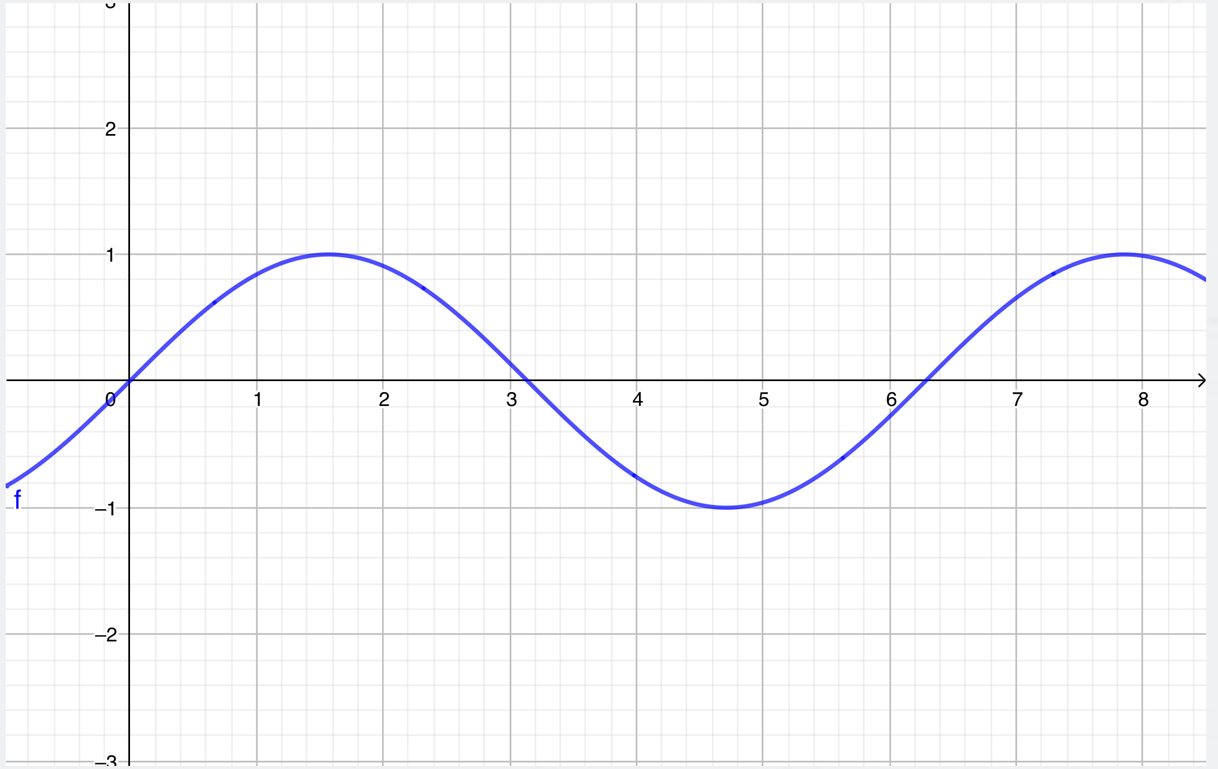
تحقق من فهمك :

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

.....

.....

$\lim_{x \to \infty} \sin x$ (6C



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

(25 $\lim_{x \to -4} \frac{-17}{x^2 + 8x + 16}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@Hudali_math

الواجب المنزلي :

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق