المساحة تحت المنحنى والتكامل

النهايات والاشتقاق

فيما سبق:

درستُ حساب النهايات جبريًا باستعمال خصائصها. (الدرس 2–8)

والآن:

- أقرِّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات:

التجزيء المنتظم
regular partition

التكامل المحدد
definite integral

الحد الأدنى
lower limit

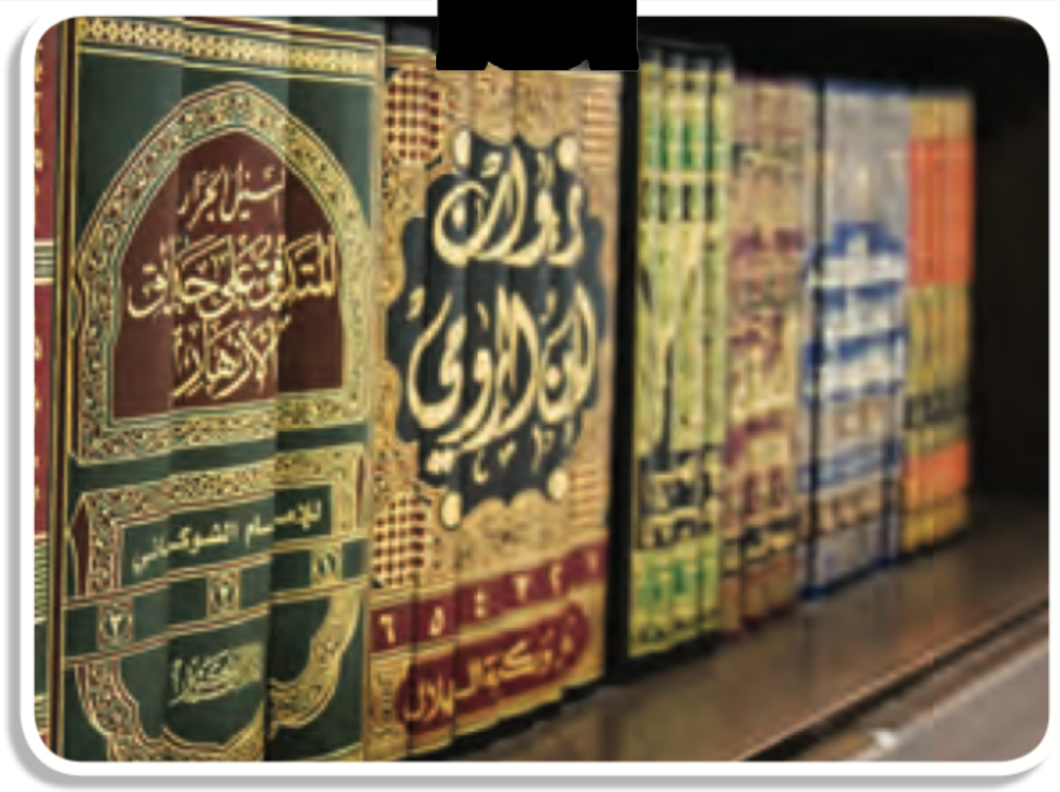
الحد الأعلى
upper limit

مجموع ريمان الأيمن
right Riemann sum

التكامل
integration

لماذا؟

التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُمثل الدالة $f(x) = 10 - 0.002x$ التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من كتاب ما بالريال .



النهايات والاشتقاق

المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، كما درست حساب مساحات بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلًا يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.

مثال 1 المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

مثّل الدالة والمستطيلات كما في الأشكال التالية، باتباع الخطوات التالية:

1) أوجد طول الفترة $[0, 12]$ بطرح بدايتها من نهايتها.

2) أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات، فمثلًا إذا كان عدد المستطيلات 4 نقسم: $12 \div 4 = 3$

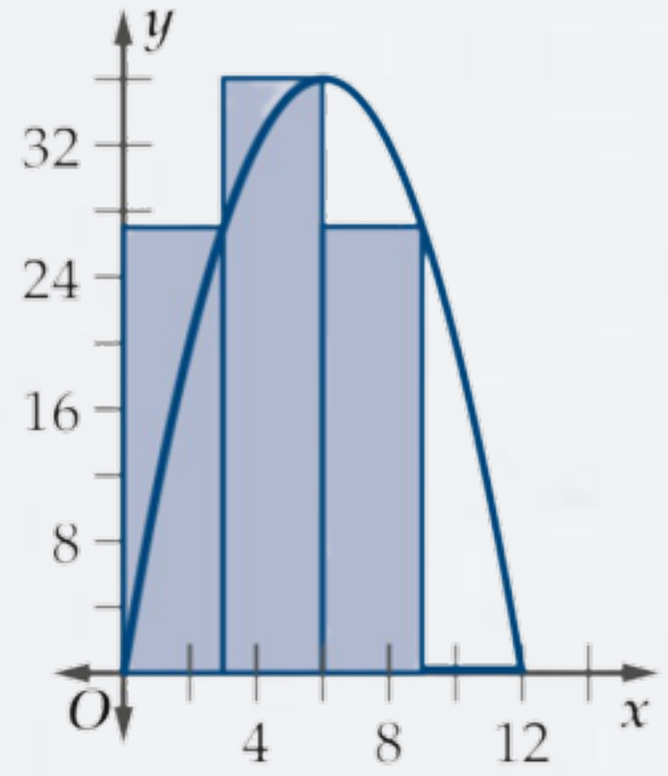
3) قسِّم الفترة $[0, 12]$ إلى 4 فترات (لأربعة مستطيلات) طول كل منها يساوي 3

4) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلًا أحد بعديه يساوي طول هذه الفترة، والبعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة.

فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) هي $f(3), f(6), f(9), f(12)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.

تاريخ الرياضيات

ثابت بن قرة (221 هـ — 288 هـ) من أوائل من وضع نواة علم التكامل من خلال نظريته" إذا ضوعف عدد أضلاع المضلع المنتظم، المرسوم بين محيطين أو مساحتين إلى ما لا نهاية، صغر الفرق تدريجيًا بين الأضلاع كلما اقترب من المركز، واقترب من الصفر حتى يفنى".



الشكل (1)

المساحة باستعمال 4 مستطيلات

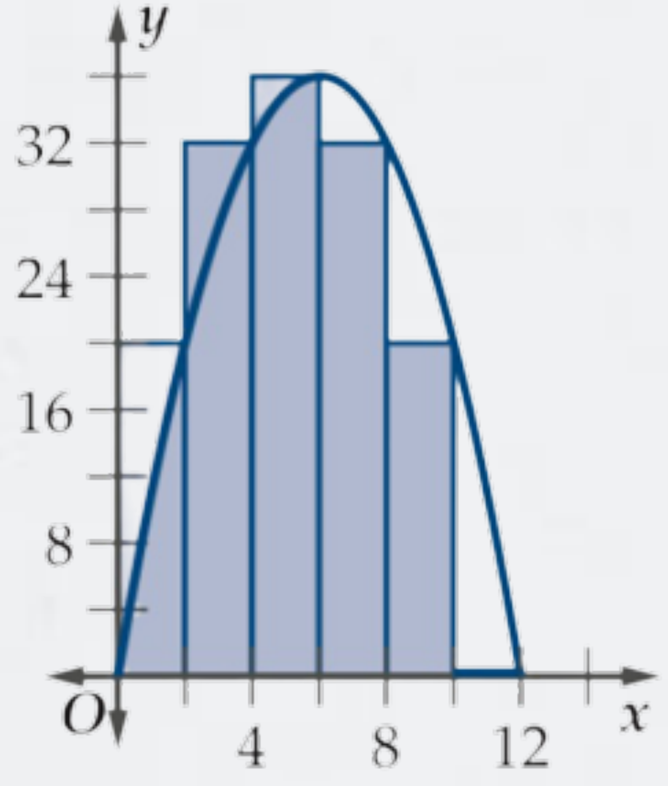
$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$

$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$

$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$

$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 270 وحدة مربعة.



الشكل (2)

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$

$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$

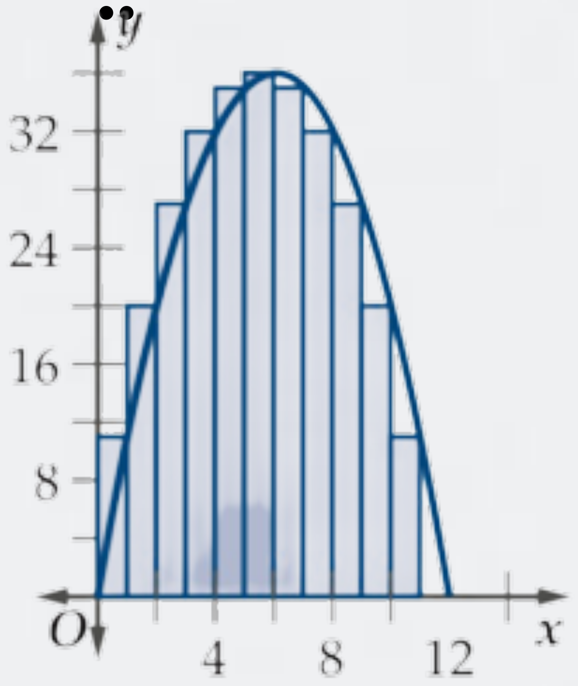
$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$

$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$

$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$

$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 280 وحدة مربعة.



الشكل (3)

المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$

$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$

$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$

$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$

$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$

$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$

$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$

$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$

$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 286 وحدة مربعة.

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك :

1) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6، 8، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

....

....

....

....

....

....

....

....

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

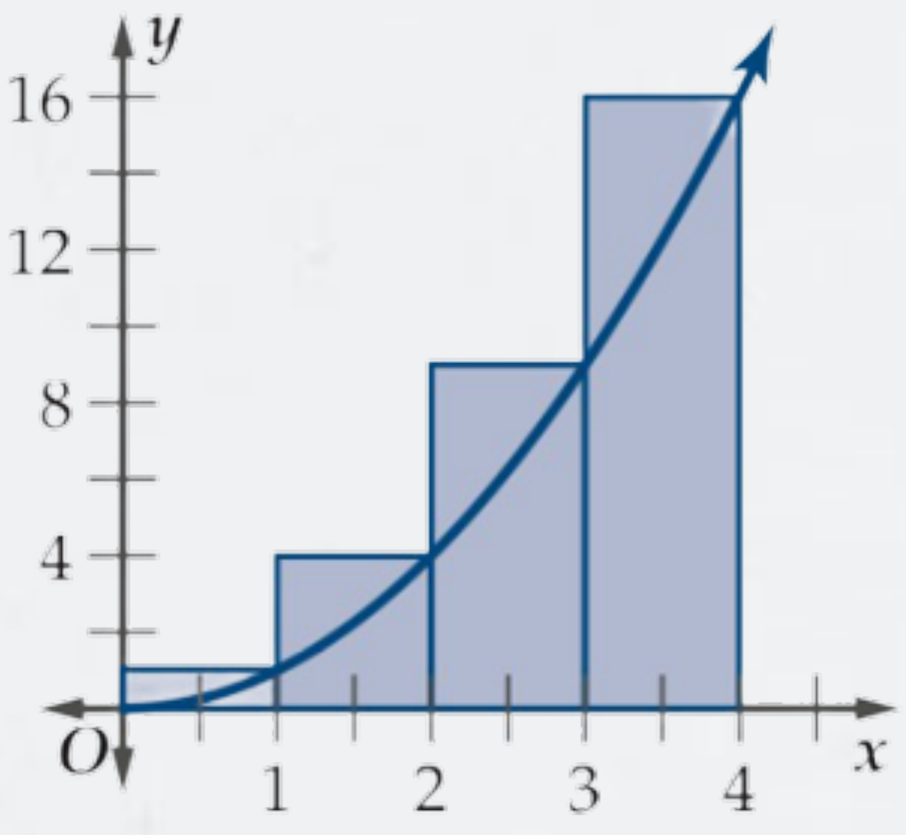
لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثِّل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة مستطيل لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لا تقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.

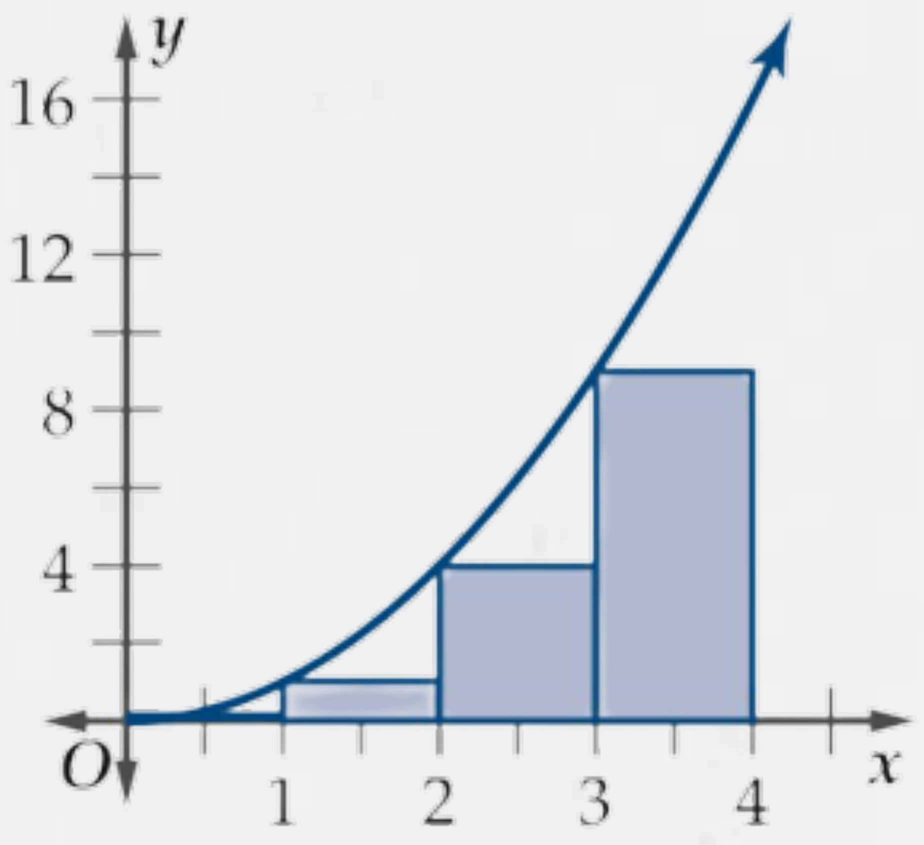


الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$
$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$
$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك :

2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

....

....

....

....

....

....

....

....

مفهوم أساسي التكامل المحدد

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\,,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a **الحد الأدنى**، و b **الحد الأعلى**، وتُسمَّى هذه الطريقة **مجموع ريمان الأيمن**.

قراءة الرياضيات

رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x)dx$ التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$، $d(x)$

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1826 – 1866). والذي يُعزى إليهِ إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وستُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad , \text{ عدد ثابت } c$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

تنبيه!

المجموع

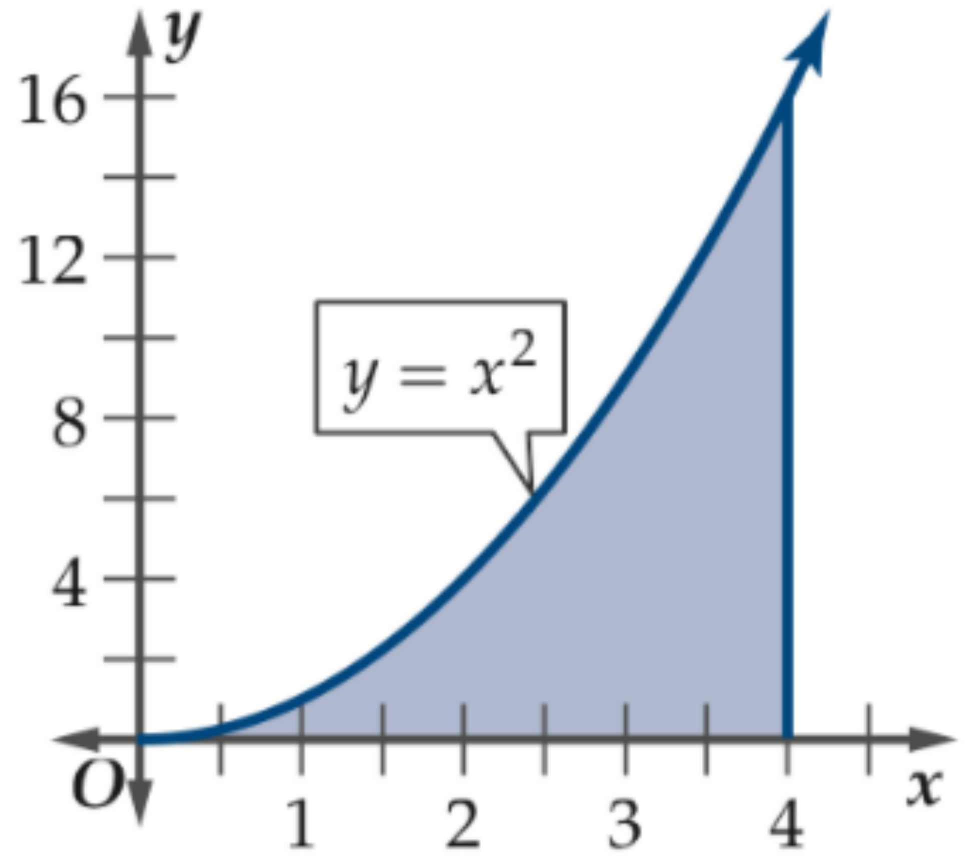
إن مجموع عدد ثابت c هو $c\,n$، فمثلاً $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5\,n$

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \ , \text{ عدد ثابت } c$$

مثال 3 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ؛ أي $\int_0^4 x^2\,dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n} \qquad b = 4 , a = 0$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \qquad \text{صيغة } x_i$$

$$= 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n} \qquad a = 0 , \Delta x = \frac{4}{n}$$

احسب التكامل المحدد الذي يُعطي المساحة المطلوبة.

النهايات والاشتقاق

$$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$
تعريف التكامل المحدد

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\,\Delta x$$
$f(x_i) = x_i^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2\left(\frac{4}{n}\right)$$
$x_i = \frac{4i}{n},\ \Delta x = \frac{4}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$$
خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$$
وزّع القوة

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$
خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16n(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right)$$
اضرب ووزّع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$$
اضرب

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$$
اقسم

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right)$$
حلّل

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$
اقسم على n^2

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty}2 + \left(\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right]$$
خصائص النهايات

$$= \frac{64}{6}[2+3(0)+0] = \frac{64}{3} \approx 21.33$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

النهايات

حلّل كل مجموع بحيث تتضمن العبارات الباقية إما أعدادًا ثابتة أو i فقط، ثم طبق صيغة المجموع المناسبة.

تحقق من فهمك :

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\int_0^1 3x^2\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

(3B $\int_0^3 x\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال 4 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x، في الفترة $[1, 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3\, dx$.

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

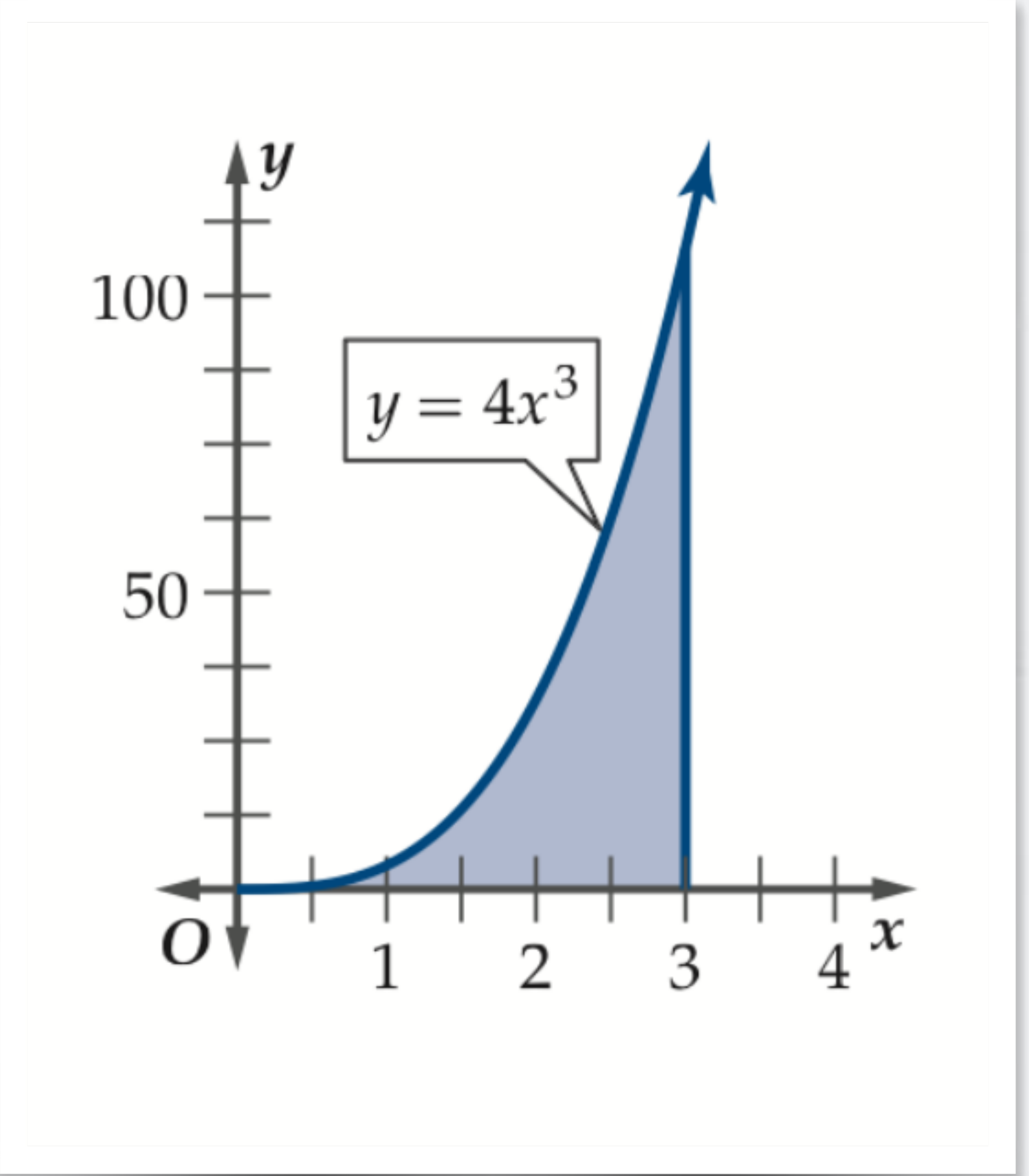
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n} \quad b = 3, a = 1$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \quad \text{صيغة } x_i$$

$$= 1 + i\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n} \quad a = 1, \Delta x = \frac{2}{n}$$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.



تعريف التكامل المحدد

$$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$f(x_i)=4(x_i)^3$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x$$

$x_i = 1+\frac{2i}{n},\ \Delta x = \frac{2}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$$

خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$$

مفكوك $\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1+3\left(\frac{2i}{n}\right)+3\left(\frac{2i}{n}\right)^2+\left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$$

بسّط

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{6i}{n}+\frac{12i^2}{n^2}+\frac{8i^3}{n^3}\right)$$

خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{12i^2}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^3}{n^3}\right)$$

خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3\right)$$

صيغ المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$$

وزّع واضرب

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n}{n}+\frac{48n(n+1)}{2n^2}+\frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3}+\frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right)$$

بسّط

$$= \lim_{n\to\infty}\left(8+\frac{24(n+1)}{n}+\frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2}+\frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right)$$

اقسم

$$= \lim_{n\to\infty}\left[8+24\left(1+\frac{1}{n}\right)+16\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+16\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

خصائص النهايات

$$= \lim_{n\to\infty}8+24\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)+16\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+16\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

بسّط

$$= 8+24(1+0)+16(2+0+0)+16(1+0+0)=80$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تنبيه!

النهايات

عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال المجاميع، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع Δx أو أي ثوابت أخرى.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

4A) $\int_1^3 x^2\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

الواجب المنزلي :