النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

النهايات والاشتقاق

فيما سبق:

درستُ استعمال النهايات لتقريب المساحة تحت منحنى دالة. (الدرس 5–8)

والآن:

- أجدُ دوال أصلية.
- أستعْمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لأجد التكامل المحدد.

المفردات:

الدالة الأصلية
antiderivative

التكامل غير المحدد
indefinite integral

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
Fundamental Theorem of Calculus

لماذا؟

سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالقدم لكل ثانية تُعطى بـ $v(t) = -32t$ ، فمن الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

أسئلة التعزيز

- ما علاقة الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم بالدالة التي تُمثّل ارتفاعه؟
- ما الذي يحتاج إليه علي لتحديد الارتفاع الذي أسقط منه القلم؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@Hudali_math

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-8 و4-8، أنَّه إذا أُعطيْتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن العبارة التي تمثِّل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثِّل السرعة، وطُلِب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًّا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **دالة أصلية** للدالة f .

مثال 1 إيجاد الدوال الأصلية

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^2$

لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة دالة القوة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 3 ، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

إن x^3 ليست الدالة الوحيدة التي تحقّقُ المطلوب، فمثلًا $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضًا؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$ ، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

b) $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$ ، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8 ، وعليه تكون $F(x) = x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f،

فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1} = -8x^{-9}$. لاحظ أن كلًّا من $G(x) = x^{-8} + 3$ ، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثّل دالة أصلية للدالة f.

تحقق من فهمك :

أوجد دالّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

1A) $2x$

1B) $-3x^{-4}$

....

....

في المثال 1 لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لدالَّةٍ أصلية ينتج عنه دالة أصلية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لدالة أصلية يُنتج دالة أصلية أخرى ؛ لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لانهائيًّا من الدوال الأصلية لأي دالة. والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحوي الثابت C.

مفهوم أساسي — قواعد الدالة الأصلية

قاعدة القوة

إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق

إذا كان لـ $f(x)$، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$، $G(x)$ على الترتيب، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

مثال 2 قواعد الدوال الأصلية

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 4x^7$

الدالة المعطاة $f(x) = 4x^7$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$

بسّط $= \frac{1}{2}x^8 + C$

b) $f(x) = \frac{2}{x^4}$

الدالة المعطاة $f(x) = \frac{2}{x^4}$

أعد كتابة الدالة بقوة سالبة $= 2x^{-4}$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$

بسّط $= -\frac{2}{3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$

c) $f(x) = x^2 - 8x + 5$

الدالة المعطاة $f(x) = x^2 - 8x + 5$

أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x $= x^2 - 8x^1 + 5x^0$

قواعد الدالة الأصلية $F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$

بسّط $= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$

ربط المفردات

التكامل غير المحدد

سبب تسمية التكامل غير المحدد بهذا الاسم أنه لا يُعبر عن دالة محددة، بل عن عدد لا نهائي من الدوال الأصلية.

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية

$F(x) = kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$، فمثلًا، إذا كان $f(x) = 3$، فإن $F(x) = 3x$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@Hudali_math

تحقق من فهمك :

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

2A) $f(x) = 6x^4$

2B) $f(x) = \dfrac{10}{x^3}$

2C) $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$

تدرب

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

1) $f(x) = x^5$

2) $f(z) = \sqrt[3]{z}$

....

....

....

....

....

....

....

....

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

التكامل غير المحدد

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$، و C ثابت.

مثال 3 من واقع الحياة — التكامل غير المحدد

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثالث الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن سطح الأرض بـ 30 ft، وتمثِّل $v(t) = -32t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالَّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها .

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$s(t) = \int v(t)\, dt$ العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة

$= \int -32t\, dt$ $v(t) = -32t$

$= -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -16t^2 + C$ بسّط

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي، 0 s للزمن الابتدائي.

$s(t) = -16t^2 + C$ الدالة الأصلية لـ $v(t)$

$30 = -16(0)^2 + C$ $s(t) = 30 , t = 0$

$30 = C$ بسّط

أي أن دالة موقع الكرة هي $s(t) = -16t^2 + 30$.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

حُلّ المعادلة $s(t) = 0$.

$s(t) = -16t^2 + 30$ دالة موقع الكرة

$0 = -16t^2 + 30$ $s(t) = 0$

$-30 = -16t^2$ اطرح 30 من كلا الطرفين

$1.875 \approx t^2$ اقسم كلا الطرفين على -16

$1.369 \approx t$ خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

أي أن الكرة ستستغرق 1.369 s تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

3) سقوط حُر: عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

....

....

....

....

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

....

....

....

....

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهًا بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 5-8 ، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدَّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما: هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

مفهوم أساسي النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

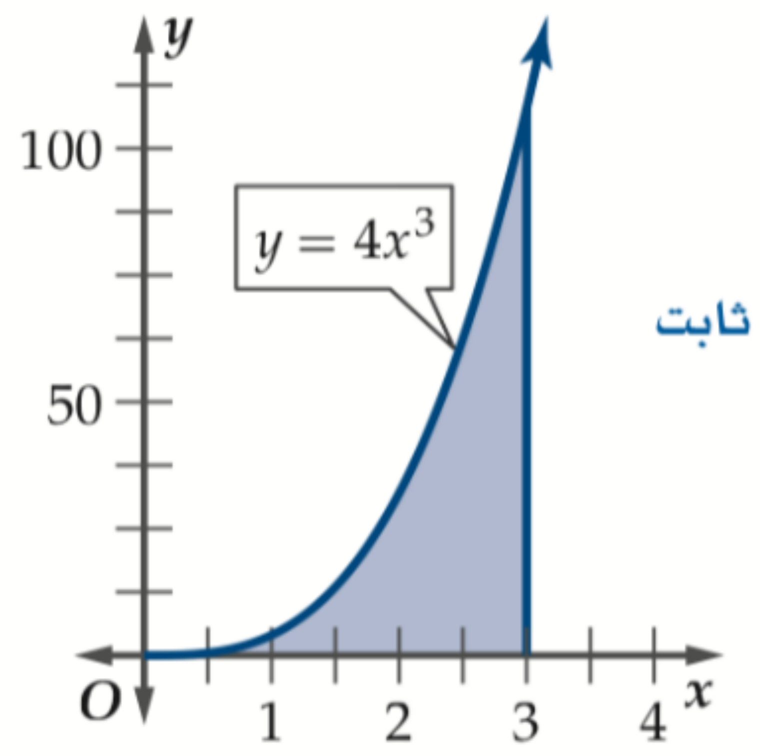
النهايات والاشتقاق

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد دوال أصلية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

مثال 4 المساحة تحت منحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$$= x^4 + C$$ بسّط

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

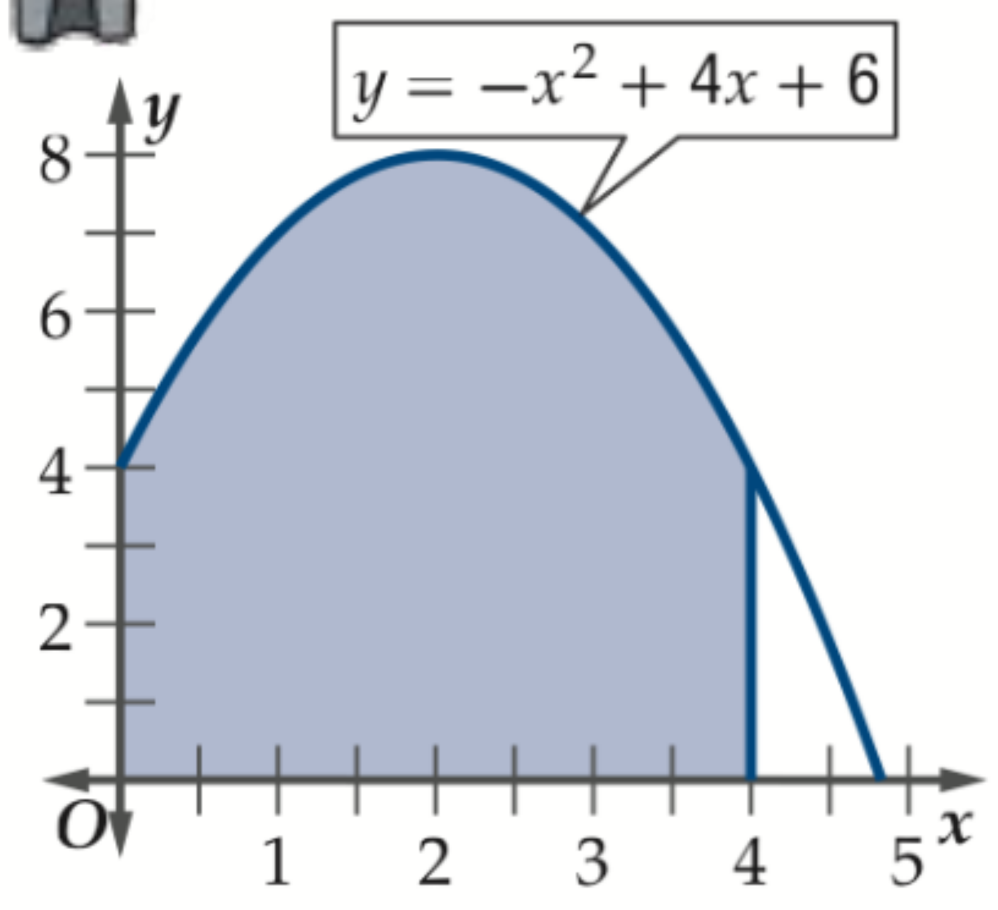
$$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C)$$ $a = 1 , b = 3$

$$= 81 - 1 = 80$$ بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4\,x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

تاريخ الرياضيات

ماريا أجنسي (1718–1799)
عالمة إيطالية برعت في اللغات والفلسفة والرياضيات، ويُعدُّ كتابها *Analytical Institutions* أول كتاب ناقش حسابي التفاضل والتكامل معًا.



b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0, 4]$؛ أي $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\, dx$

أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\, dx$$

$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C$$ قواعد الدالة الأصلية

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C$$ بسّط

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C \Big|_0^4$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right)$$ $a = 0 , b = 4$

$$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67$$ بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -x^2 + 4x + 6$ والمحور x على الفترة $[0 , 4]$ هي 34.67 وحدة مربعة تقريبًا.

تحقق من فهمك :

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) $\int_{2}^{5} 3x^2 \, dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

4B) $\int_{1}^{2} (16x^3 - 6x^2) \, dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

قبل حساب التكامل حدِّد ما إذا كان محددًا أو غير محدد.

مثال 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$$\int (9x - x^3)\, dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$ قواعد الدالة الأصلية

$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C$$ بسّط

تنبيه!

التكاملات

صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

b) $\int_2^3 (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$$\int_2^3 (9x - x^3)\, dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right]$$ $a = 2$, $b = 3$

$$= 20.25 - 14 = 6.25$$ بسّط

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

@Hudali_math

تحقق من فهمك :

احسب كل تكامل مما يأتي:

(5A $\int (6x^2 + 8x - 3)\, dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

(5B $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\, dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب

احسب كل تكامل مما يأتي:

9) $\int_{1}^{4} 2x^3 \, dx$

....

10) $\int_{2}^{5} (a^2 - a + 6) \, da$

....

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي الدالّة الأصلية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد الدالة الأصلية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة، وهي الدالة الأصلية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى؛ ليصبح التكامل عندها محددًا.

مثال 6 التكاملات المحددة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\,dx$. ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

$\int_0^{0.5} 360x\,dx = 180x^2 \Big|_0^{0.5}$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت ، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$ $a = 0 , b = 0.5$

$= 45 - 0 = 45$ بسّط

أي أن الشغل اللازم هو 45 J .

تحقق من فهمك :

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A) $\int_0^{0.7} 476x\, dx$

6B) $\int_0^{1.4} 512x\, dx$

تدرب

14) **حشرات:** تُعطى سرعة قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية.

(مثال 6)

a) أوجد دالة الموقع $s(t)$ للحشرة، ثم احسب قيمة الثابت C بفرض أنه عندما $t = 0$ ، فإن $s(t) = 0$.

....

....

....

....

b) أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟

....

....

....

....

الواجب المنزلي :

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق