math بسمه

الضرب الداخلي

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق

درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيا وجبريا

والآن

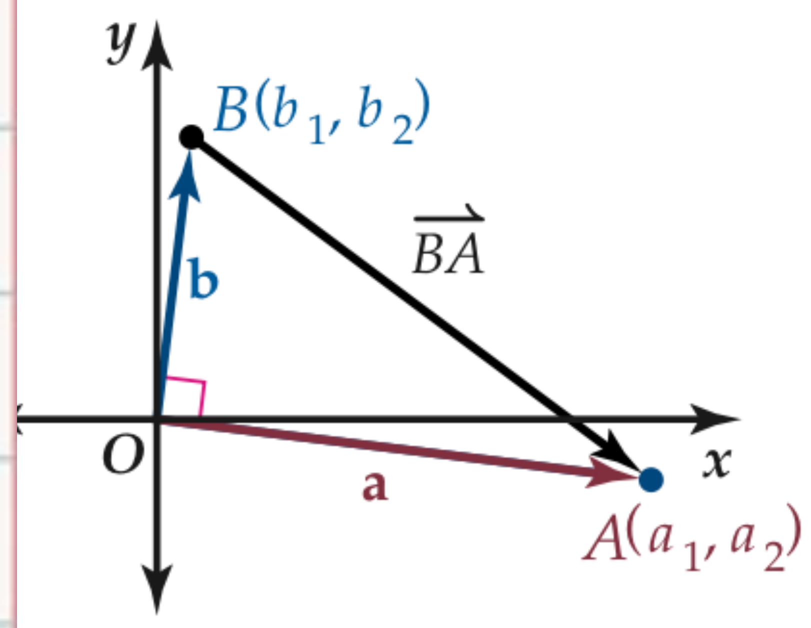
١| أجد الضرب الداخلي لمتجهين وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما

1 المتجهات

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

المتجهات 1

الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-1 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.



وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$	تعريف طول متجه
$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$	ربّع الطرفين
$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$	فُك الأقواس
$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$	جمِّع الحدود المربعة
$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$	$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a, b ، أو يُقرأ اختصارًا $\mathbf{a}$ dot $\mathbf{b}$.

قراءة الرياضيات

الضرب القياسي
يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

مفهوم أساسي الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

مفهوم أساسي المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

مثال 1

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

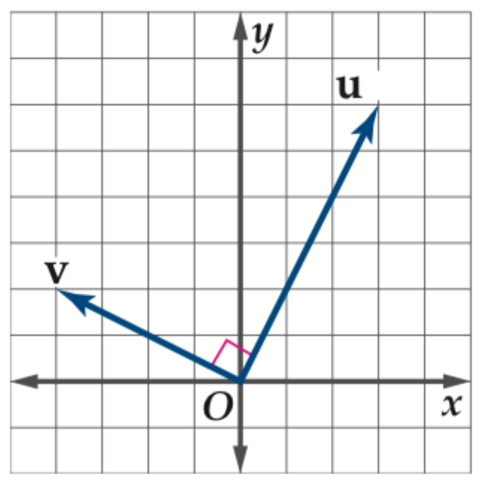
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$$
$$= 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضَّح في الشكل 1.3.1 .

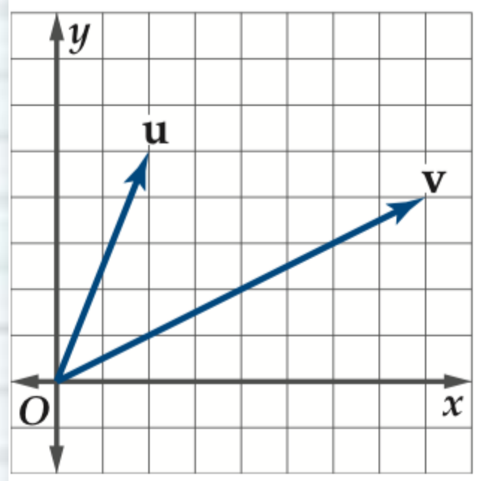
b) $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$$
$$= 36$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل 1.3.2 .



الشكل 1.3.1



الشكل 1.3.2

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

(1A $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

(1B $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$

تدرب

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$

نظريَّة خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert \mathbf{u} \rvert^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$

مقطع توضيحي

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

مثال 2

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

بما أن: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$$|\langle -5, 12\rangle| = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle} \qquad \mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \qquad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$

2B) $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

تدرب

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى.

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$

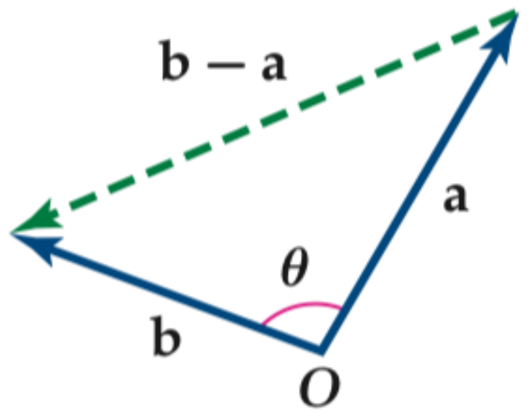
8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$

مفهوم أساسي

الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$



البرهان

إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2$ — قانون جيوب التمام

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ — $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ — خاصية التوزيع للضرب الداخلي

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2$ — $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

$-2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — بطرح $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ من الطرفين

$\cos \theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$ — بقسمة الطرفين على $-2|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$

إرشادات للدراسة

المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية

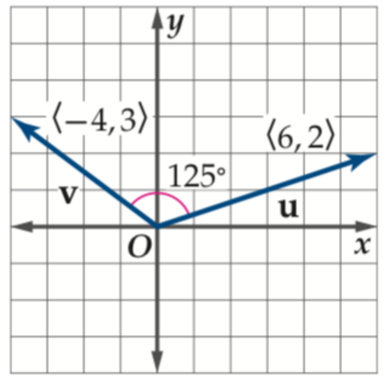
يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مثال 3

ايجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$



الزاوية بين متجهين: $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$: $\cos \theta = \dfrac{\langle 6, 2 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle}{|\langle 6, 2 \rangle|\,|\langle -4, 3 \rangle|}$

الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه: $\cos \theta = \dfrac{-24 + 6}{\sqrt{40}\,\sqrt{25}}$

بسّط: $\cos \theta = \dfrac{-18}{10\sqrt{10}}$

معكوس جيب التمام: $\theta = \cos^{-1} \dfrac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

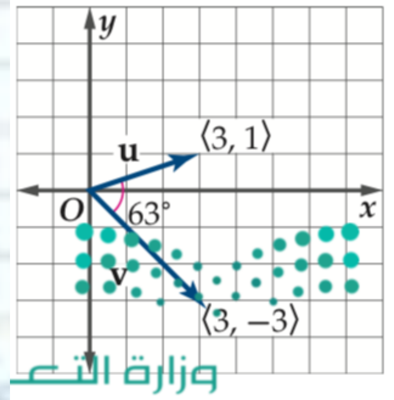
الزاوية بين متجهين: $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$: $\cos \theta = \dfrac{\langle 3, 1 \rangle \cdot \langle 3, -3 \rangle}{|\langle 3, 1 \rangle|\,|\langle 3, -3 \rangle|}$

الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه: $\cos \theta = \dfrac{9 + (-3)}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}}$

بسّط: $\cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

معكوس جيب التمام: $\theta = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 63°$



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $63°$ تقريبًا، كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

(3B $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

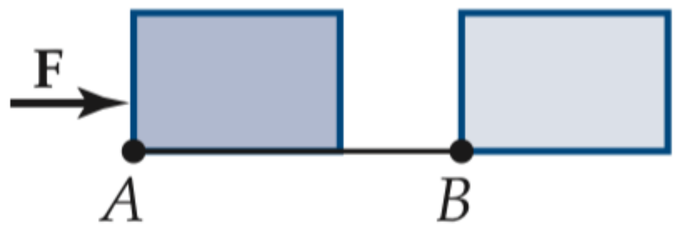
تدرب

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u**, **v** في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ. (مثال 3)

(11 $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$

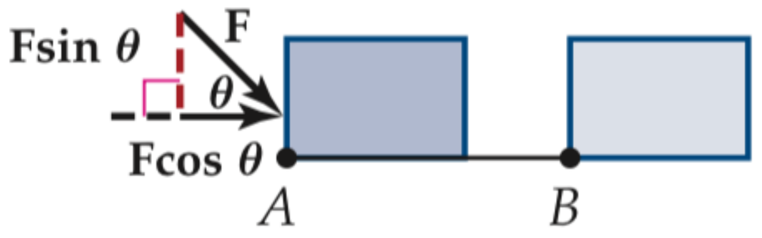
(12 $\mathbf{u} = \langle 7, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4\rangle$

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت **F** قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت **F** موازيةً لـ $\overline{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن **F** يساوي مقدار القوة **F** مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة **F** ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$



أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة **F** ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

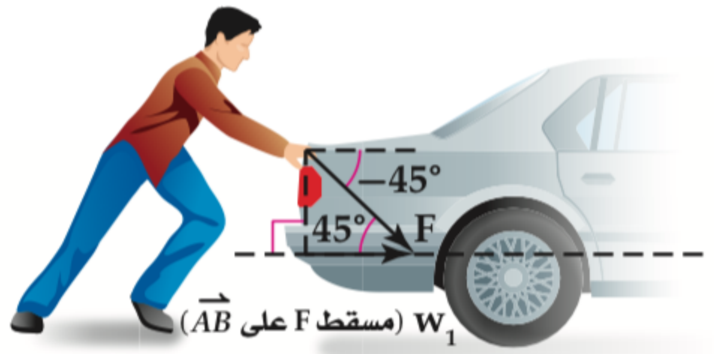
إرشادات للدراسة

وحدات الشغل

وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

مثال من واقع الحياة 4

حساب الشغل



سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة **F** بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي :
$\langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°)\rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0\rangle$.

$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ قاعدة الضرب الداخلي للشغل

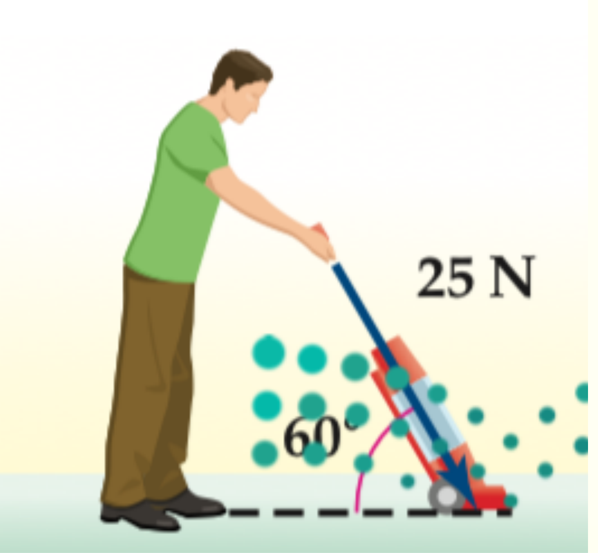
$= \langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°)\rangle \cdot \langle 10, 0\rangle$ عوّض

$= [120 \cos(-45°)](10) \approx 848.5$ الضرب الداخلي

أي أن الشخص يبذل 848.5J من الشغل؛ لدفع السيارة.

تحقق من فهمك

4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض $60°$، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



تدرب

33) **اكتشف الخطأ:** يدرس كلٌّ من فهدٍ وفيصلٍ خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضِّح إجابتك.

46) إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$, $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل r، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟

A $\langle 14, 8 \rangle$

B $\langle 14, 6 \rangle$

C $\langle -14, 8 \rangle$

D $\langle -14, -8 \rangle$

مسابقات

Wordwall

مقطع توضيحي

المتجهات في المستوى الإحداثي

متجه الوحدة

طوله يساوي ١ ويمكن إيجاد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه v

$$u = \frac{v}{|v|}$$

الصورة الإحداثية للمتجه

توافق خطي

$\langle a,b \rangle = ai + bj$

الصورة الإحداثية بدلالة نقطتين

$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

الصورة المثلثية

$\langle |v| \cos\theta, |v| \sin\theta \rangle$

الزاوية بين متجهين غير صفريين

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

الضرب الداخلي

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

يكون المتجهان متعامدان اذا كان حاصل الضرب الداخلي صفر

بسمة math

الواجب المنزلي

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

math بسمه

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق