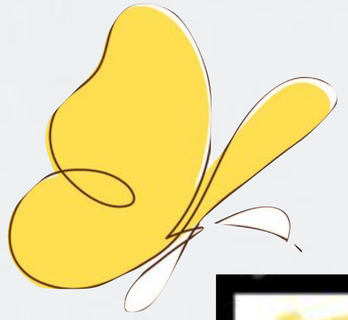


المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

بسمه math

فيما سبق

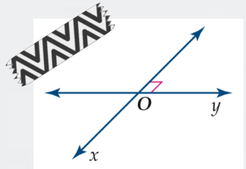
درست المتجهات في
النظام الثنائي الأبعاد
هندسيا وجبريا

والآن

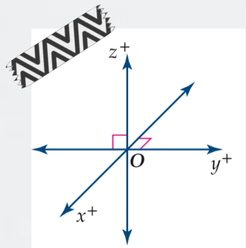
١|أعين نقاطا ومتجهات في
النظام الاحداثي الثلاثي الأبعاد .
٢|أعبر عن المتجهات جبريا
وأجري العمليات عليها في
الفضاء الثلاثي الأبعاد

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

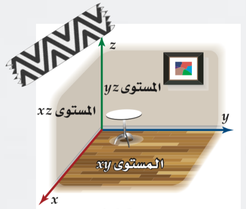
1 المتجهات



الشكل 1.4.1



الشكل 1.4.2



الشكل 1.4.3

لماذا ؟

لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 1.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y كما في الشكل 1.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz ، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُّمُن**، ويمكن تمثيل الثُّمُن الأول بجزء الحجرة في الشكل 1.4.3.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بسمه math

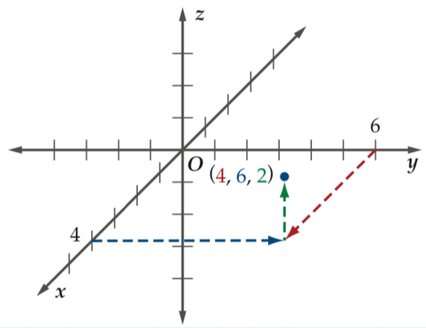
تعيين نقطة في الفضاء

مثال 1

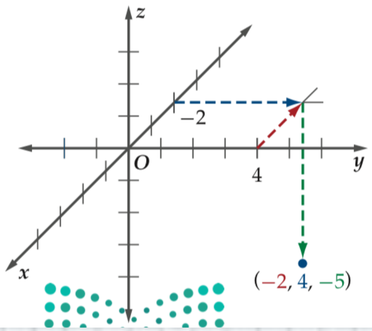
عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

a) $(2, 6, 4)$ **b)** $(-5, 4, -2)$

عيّن $(6, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



عيّن $(4, -2)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد 5 وحداتٍ أسفل الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



إرشادات للدراسة

تدريج المحاور

تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

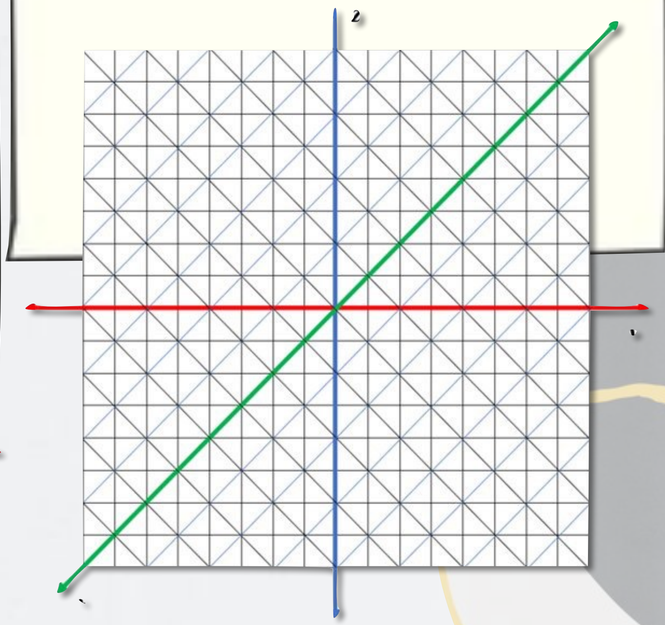
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بسمه math

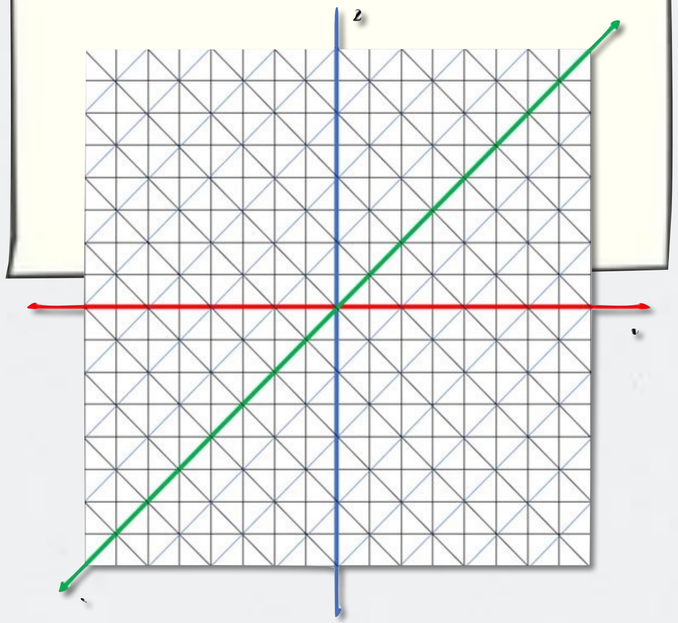
تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

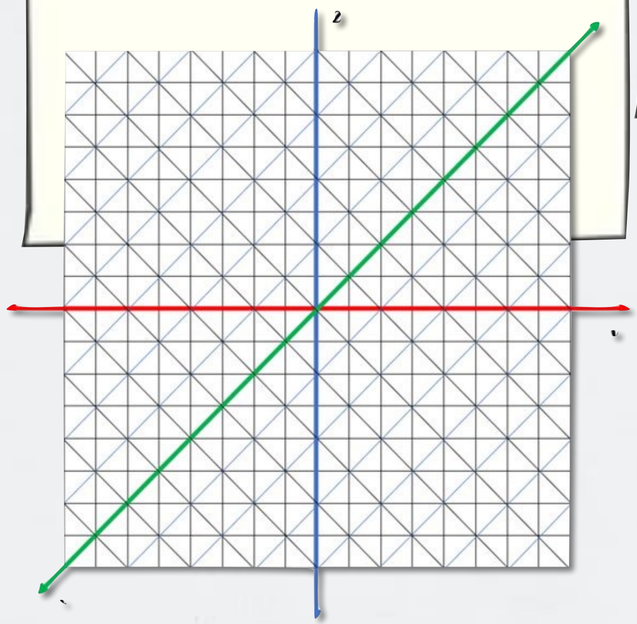
1A $(-3, -4, 2)$



1B $(3, 2, -3)$



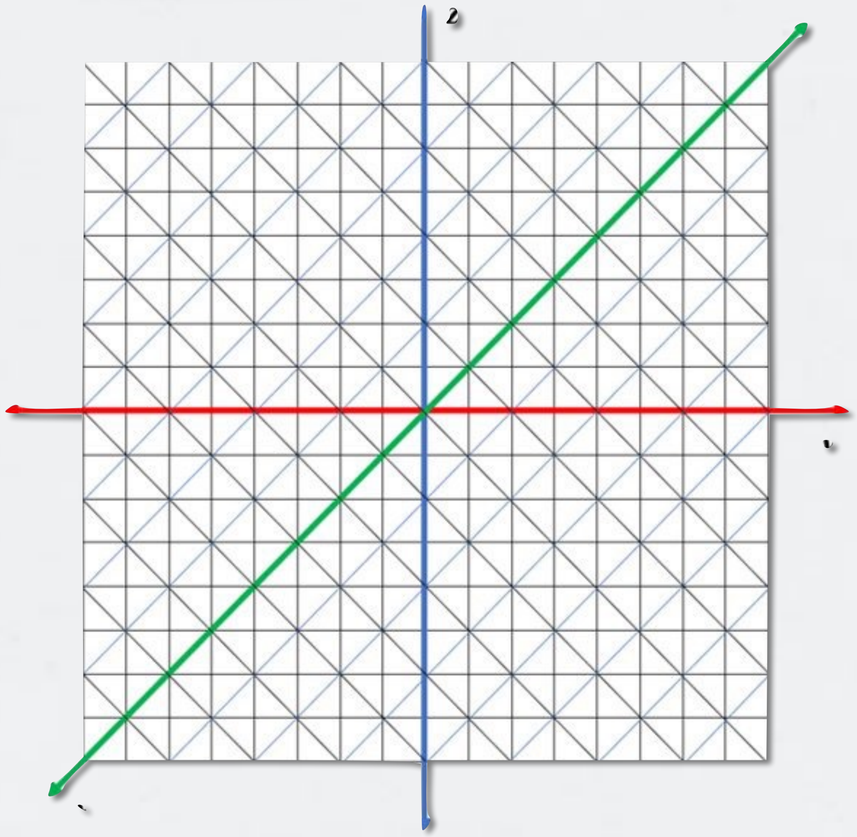
1C $(5, -4, -1)$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1)



1 $(1, -2, -4)$

2 $(3, 2, 1)$

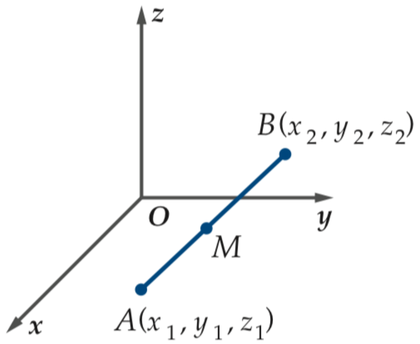
بسمه math

مفهوم أساسي

صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

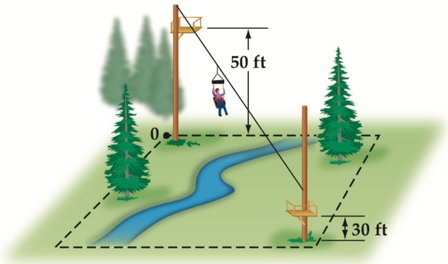
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بسمه math

مثال من واقع الحياة 2

رحلة : تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: (10, 12, 50) , (70, 92 , 30)، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.

صيغة المسافة $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)\ ,\ (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ $= \sqrt{(70-10)^2+(92-12)^2+(30-50)^2}$

بسّط ≈ 101.98

أي أننا نحتاج إلى حبلٍ طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصَّتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

استعمل صيغة نقطة المنتصف في الفضاء .

صيغة المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)\ ,\ (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ $= \left(\frac{10+70}{2}, \frac{12+92}{2}, \frac{50+30}{2}\right)$

$= (40, 52, 40)$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي (40, 52, 40)

المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف في الفضاء

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

2) **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألَّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(450, -250, 28000)$, $(300, 150, 30000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا

وزارة التعليم
Ministry of Education
1443 - 1

بسمه math

تدرب

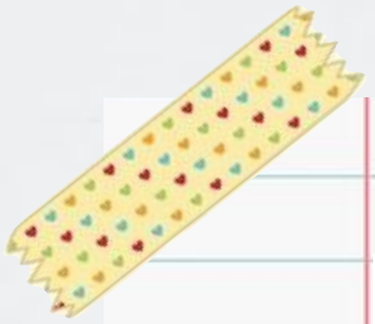
أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: **(مثال 2)**

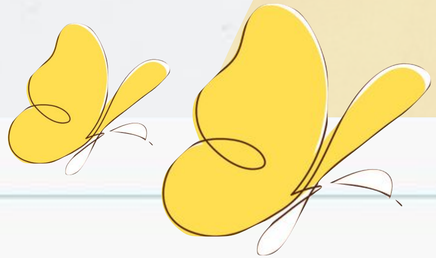
7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

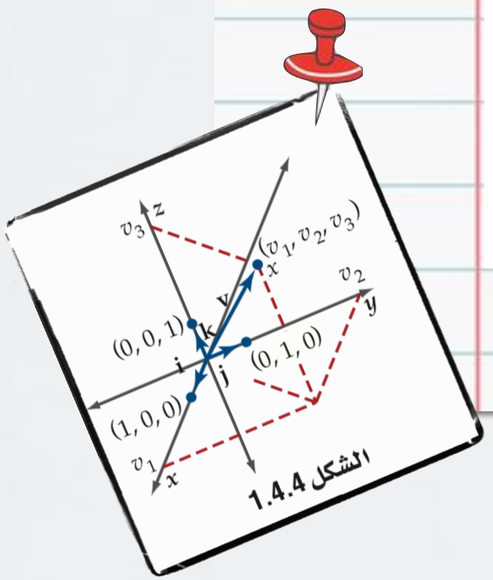
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1 المتجهات





المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ، كما في الشكل 1.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



الشكل 1.4.4

بسمه math

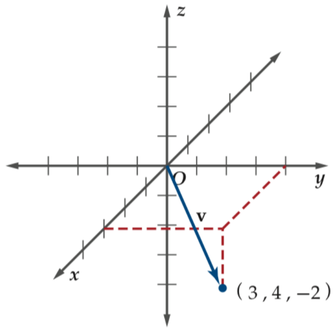
تعيين متجه في الفضاء

مثال 3

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

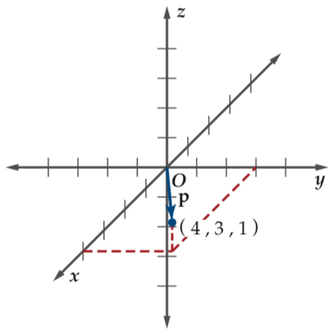
a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{v}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{p}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.



إرشادات للدراسة

تدريج المحاور

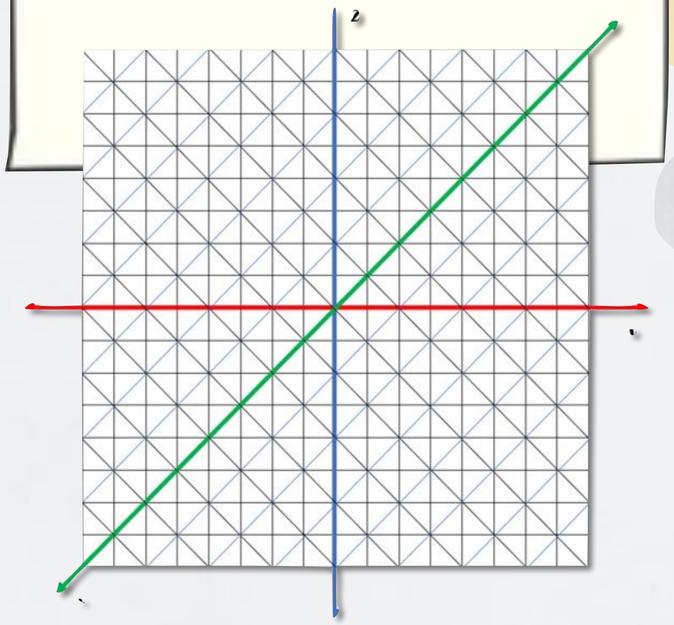
تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

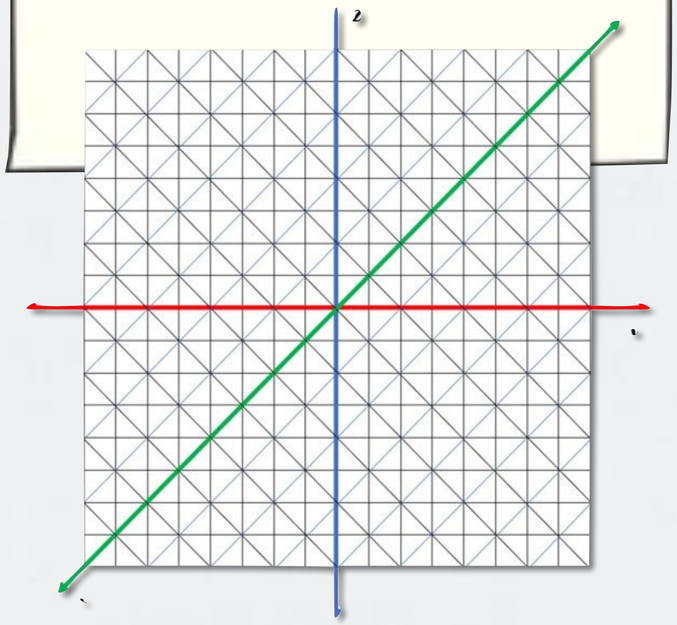
تحقق من فهمك

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

(3A $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$



(3B $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

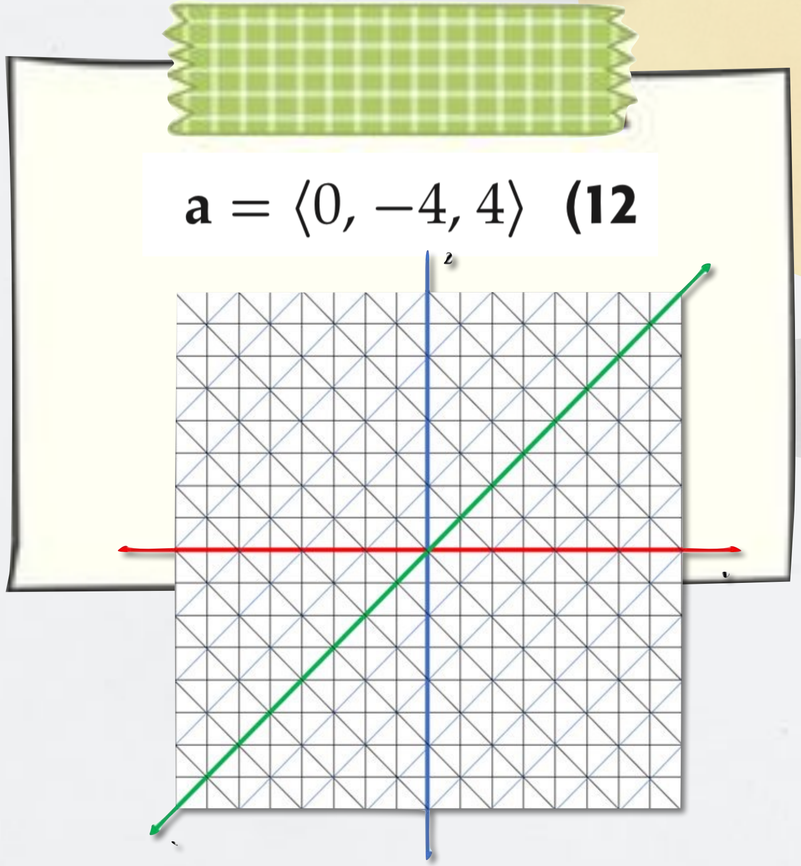


بسمه math

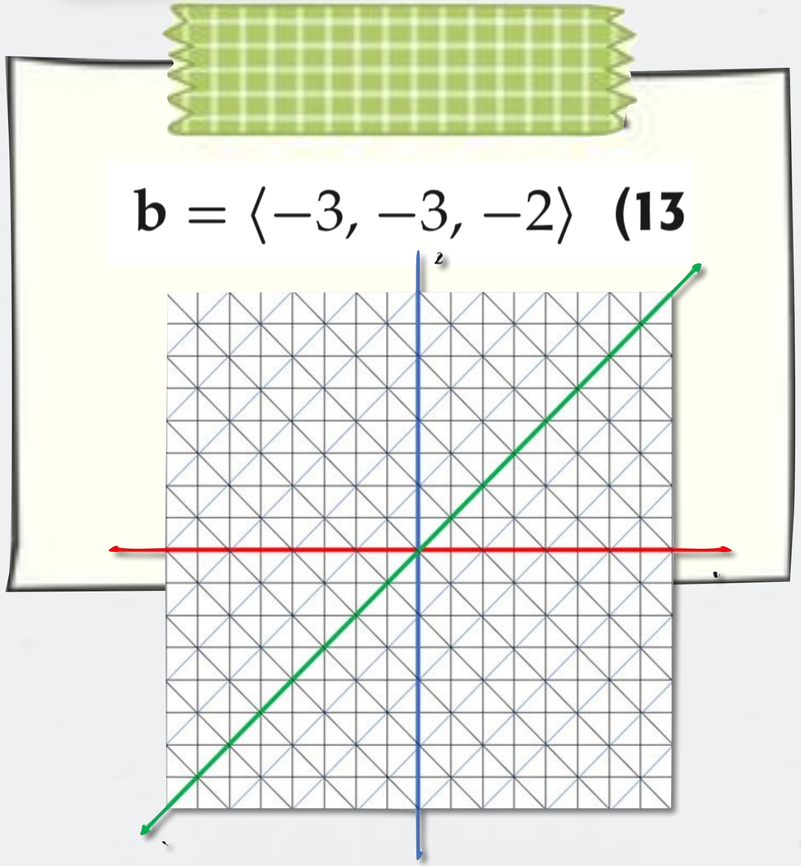
تدرب

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3)

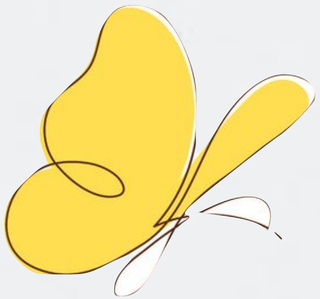
12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$



13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$



مقطع توضيحي



1 المتجهات

مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1 المتجهات

العمليات على المتجهات في الفضاء

مثال 4

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

(a $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$$ عوّض

$$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$$ اضرب متجهًا في عدد حقيقي

$$= \langle 8, -24, 18 \rangle$$ اجمع المتجهين

(b $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$$ عوّض

$$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$$ اضرب متجهٍ في عددٍ حقيقي

$$= \langle 9, -10, -7 \rangle$$ اجمع المتجهات

إرشادات للدراسة

تدريج المحاور

تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

(4A $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

(4B $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

تدرب

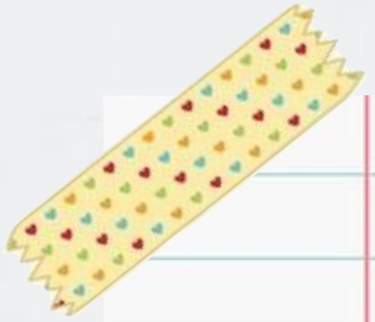
أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :

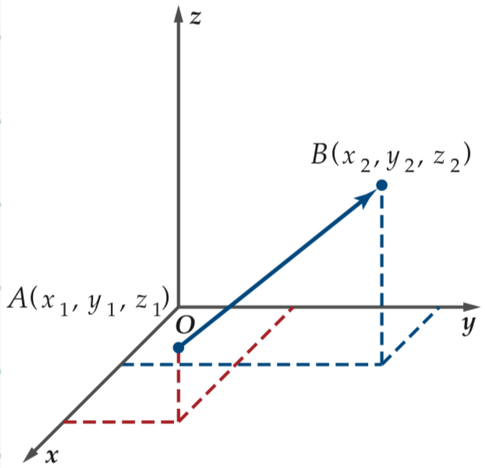
$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$.

(20 $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

(21 $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

1 المتجهات





وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

بسمه math

التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريا

مثال 5

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -2, -4)$، ونقطة نهايته $B(-6, 6, 3)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

الصورة الإحداثية لمتجه

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1)$, $(x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

$$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو :

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$$
$$= 9\sqrt{2}$$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة **u** باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$, $|\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

$$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

(5A $A(-2,-5,-5), B(-1,4,-2)$

(5B $A(-1,4,6), B(3,3,8)$

بسمه math

تدرب

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

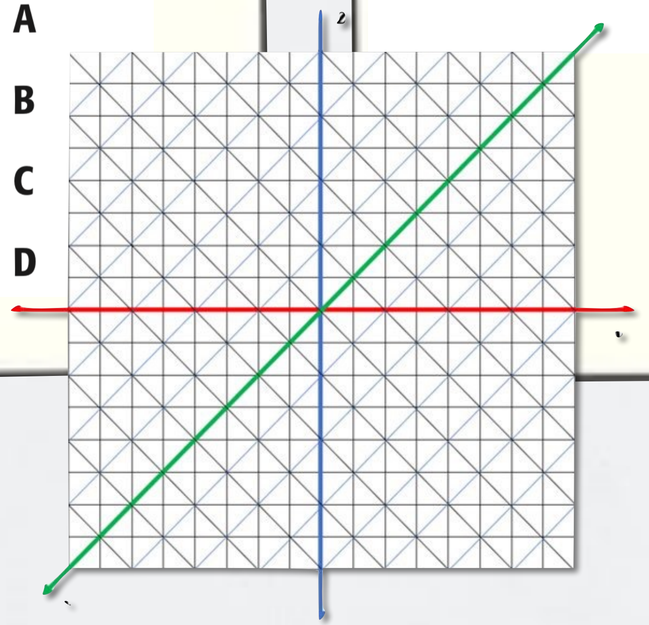
32 $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

33 $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب

53) **تحدٍّ:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M.



61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5), B(1, 0, 2), C(0, -3, 5)$ ؟

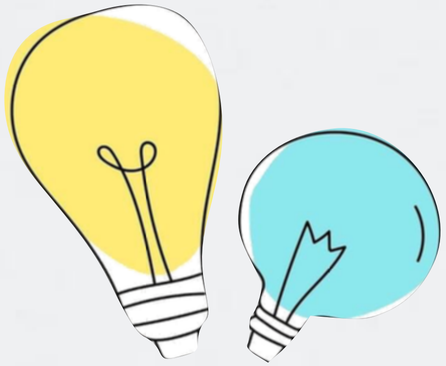
A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

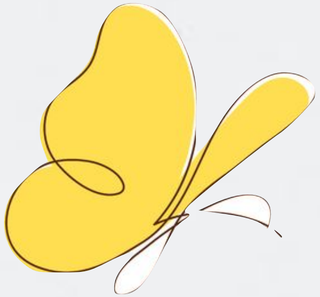
C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

مسابقات



مقطع توضيحي



نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

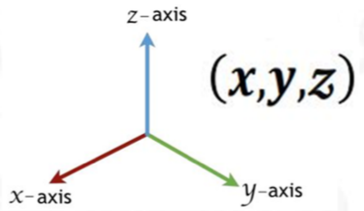
الضرب الاتجاهي

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

متجه عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين

الثلاثي المرتب

شكل كتابة النقطة في الفضاء



الضرب القياسي الثلاثي

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الواجب المنزلي