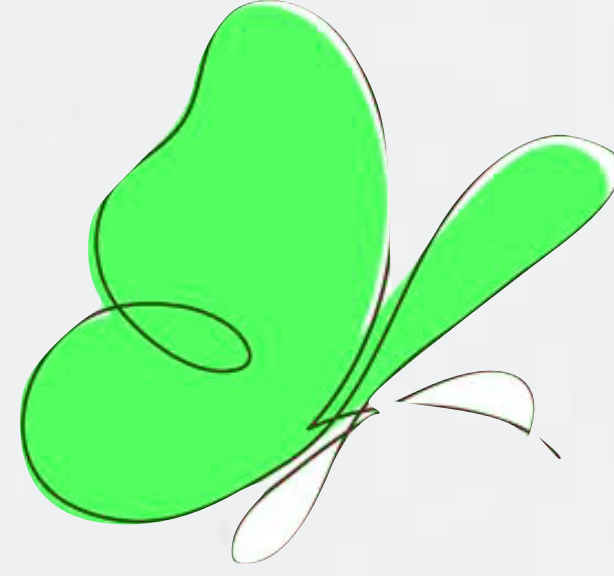
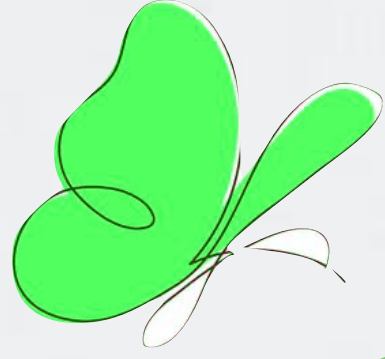


الأعداد المركبة ونظرية كيموافر



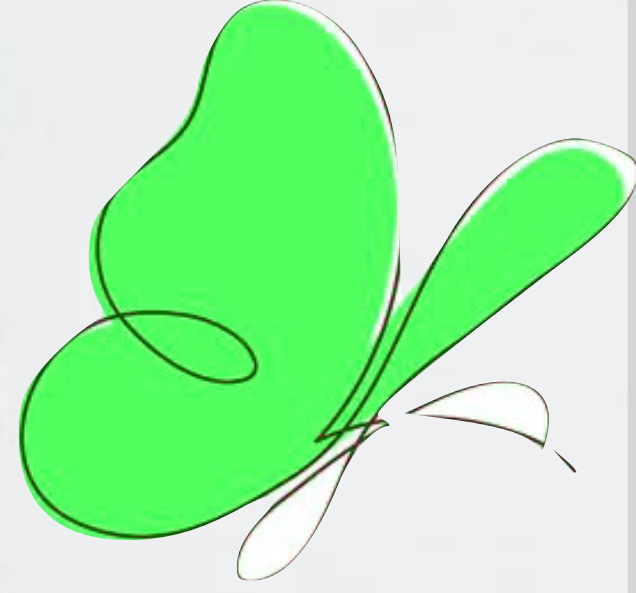
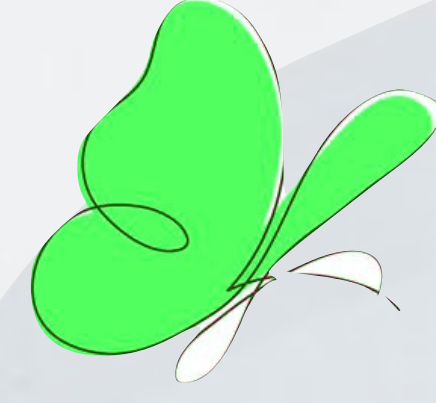
فيما سبق

درست اجراء العمليات
الحسابية على الأعداد
المركبة

والآن

١ / أحول الأعداد المركبة من
الصورة الديكارتية الى الصورة
القطبية والعكس .
٢ | اجد حاصل ضرب الأعداد
المركبة وقسمتها ، وأجد جذورها
وقواها في الصورة القطبية

2 الدلائل القطبية والأعداد المركبة

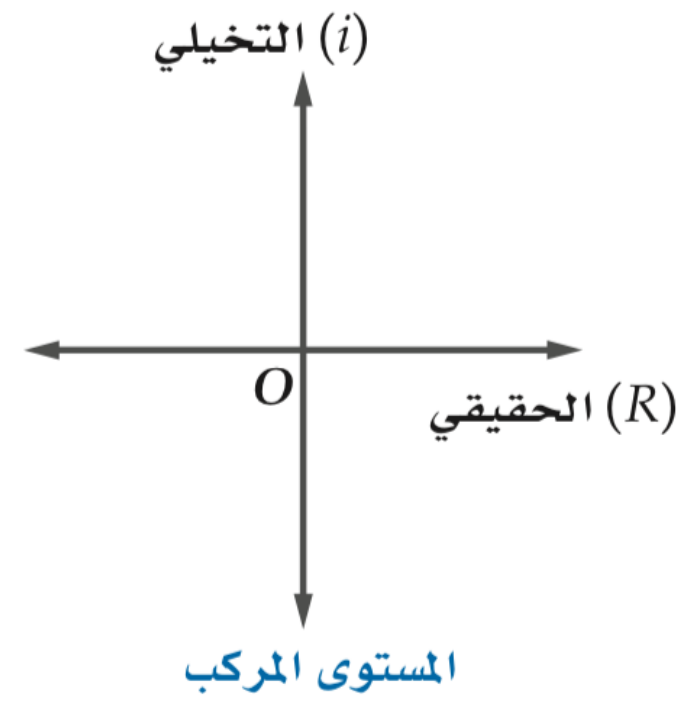
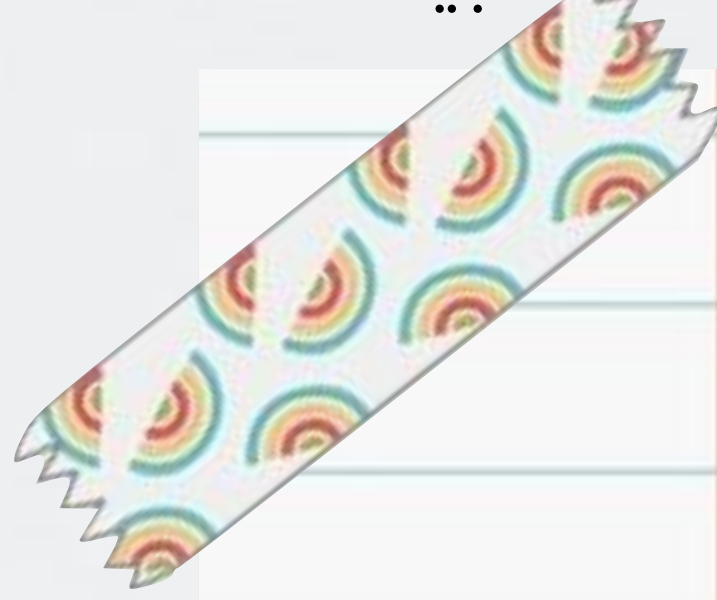


لماذا؟

يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V ، والمعاوقة Z ، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$ ، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$ ، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

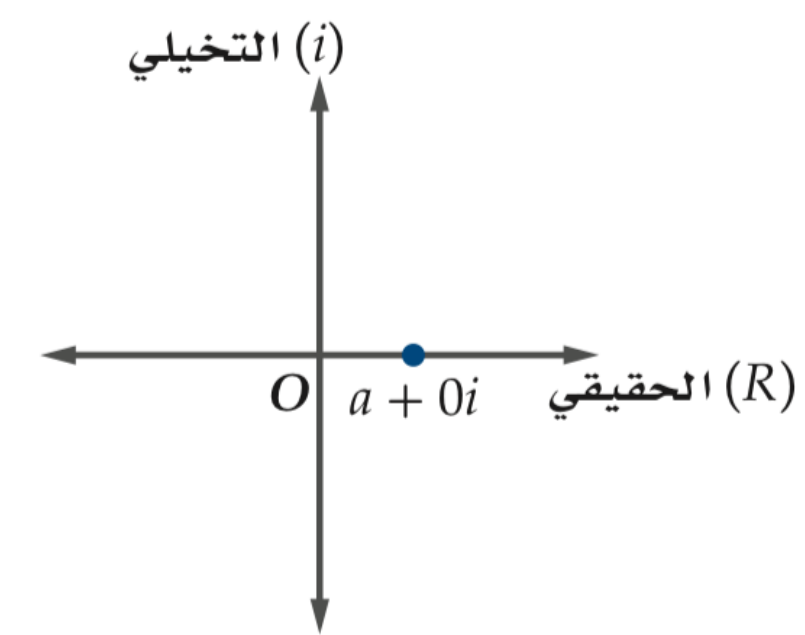
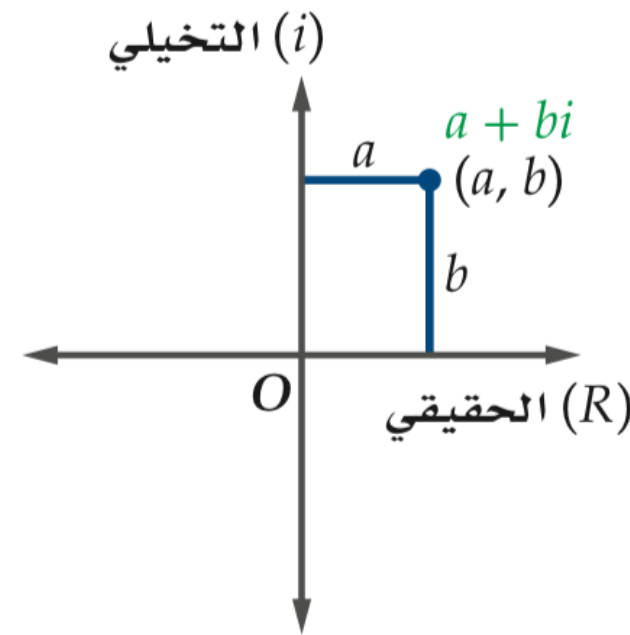
(إرشاد: استعملت كلمة المعاوقة بدلاً من كلمة المقاومة؛ لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

الاثبات القطبية والأعداد المركبة

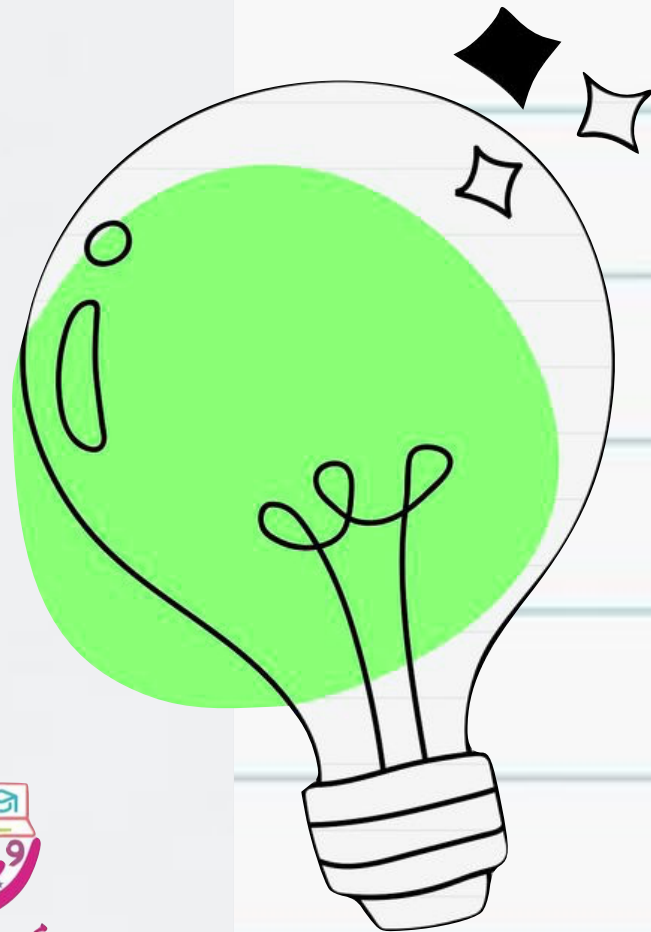


الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$ ، هو a والجزء التخيلي bi . ويمكنك تمثيل العدد المركب على المستوى المركب بالنقطة (a, b) . كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيّن الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمّى المحور الحقيقي ويرمز له بالرمز R ، في حين يُعيّن الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمّى المحور التخيلي ويرمز له بالرمز i .

في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$ ، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.



تذكر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن القيمة المطلقة لعدد مركب هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب. وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب، فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.



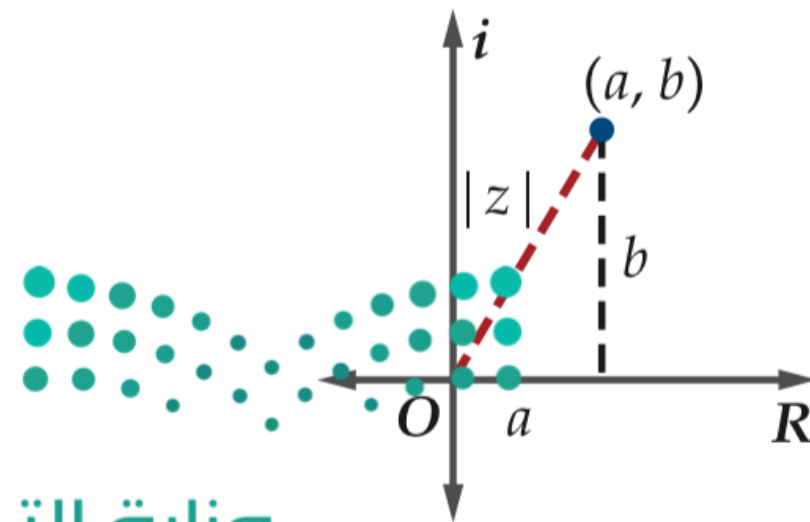
2 الماثباتات القطبية والأعداد المركبة

مفهوم أساسي

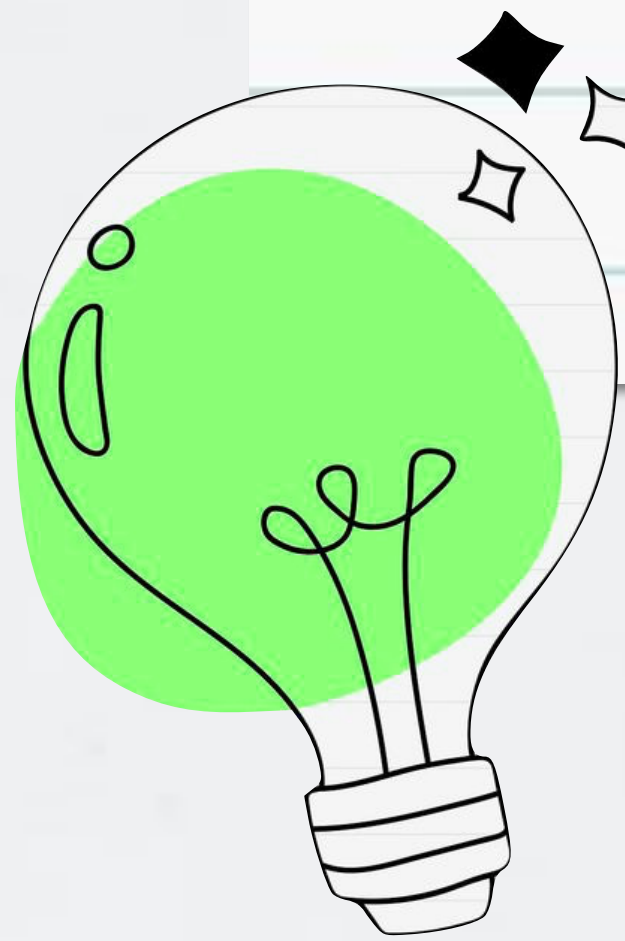
القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



وزارة التعليم

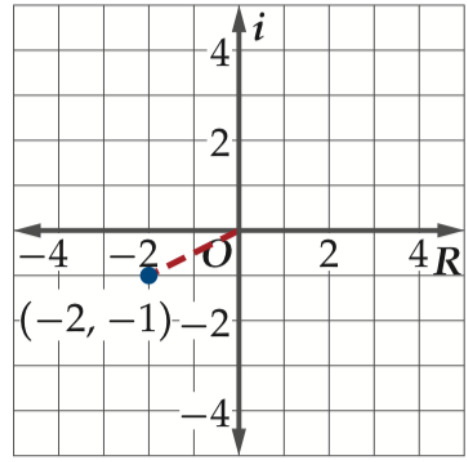


مثال 1

مثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركّب، وأوجد قيمته المطلقة:

$$z = -2 - i \quad (\text{b})$$

$$(a, b) = (-2, -1)$$



تعريف القيمة المطلقة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

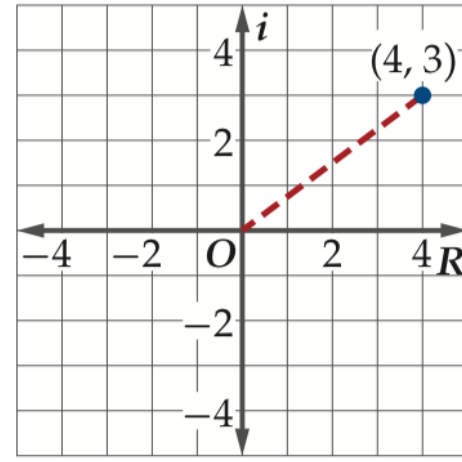
$$a = -2, b = -1 \quad = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$$

$$\text{بسّط} \quad = \sqrt{5} \approx 2.24$$

القيمة المطلقة للعدد $-2 - i$ تساوي 2.24 تقريبًا.

$$z = 4 + 3i \quad (\text{a})$$

$$(a, b) = (4, 3)$$



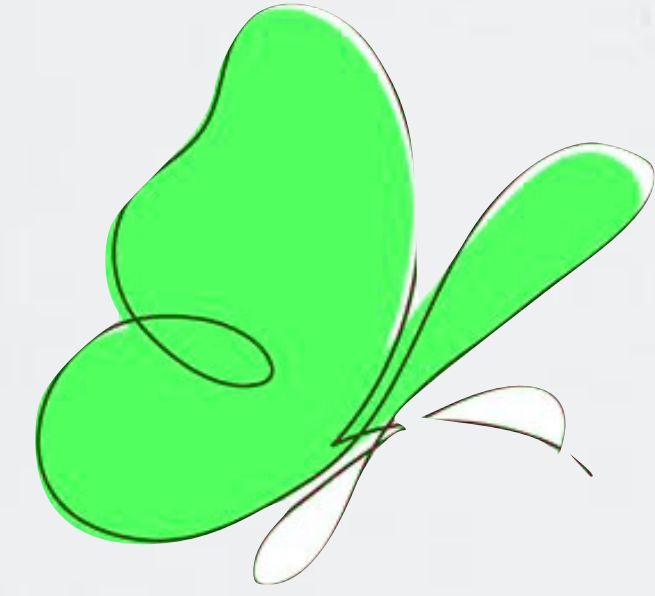
تعريف القيمة المطلقة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$a = 4, b = 3 \quad = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$\text{بسّط} \quad = \sqrt{25} = 5$$

القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$ تساوي 5.

تمثّل الأعداد
المركّبة وإيجاد
قيمتها المطلقة



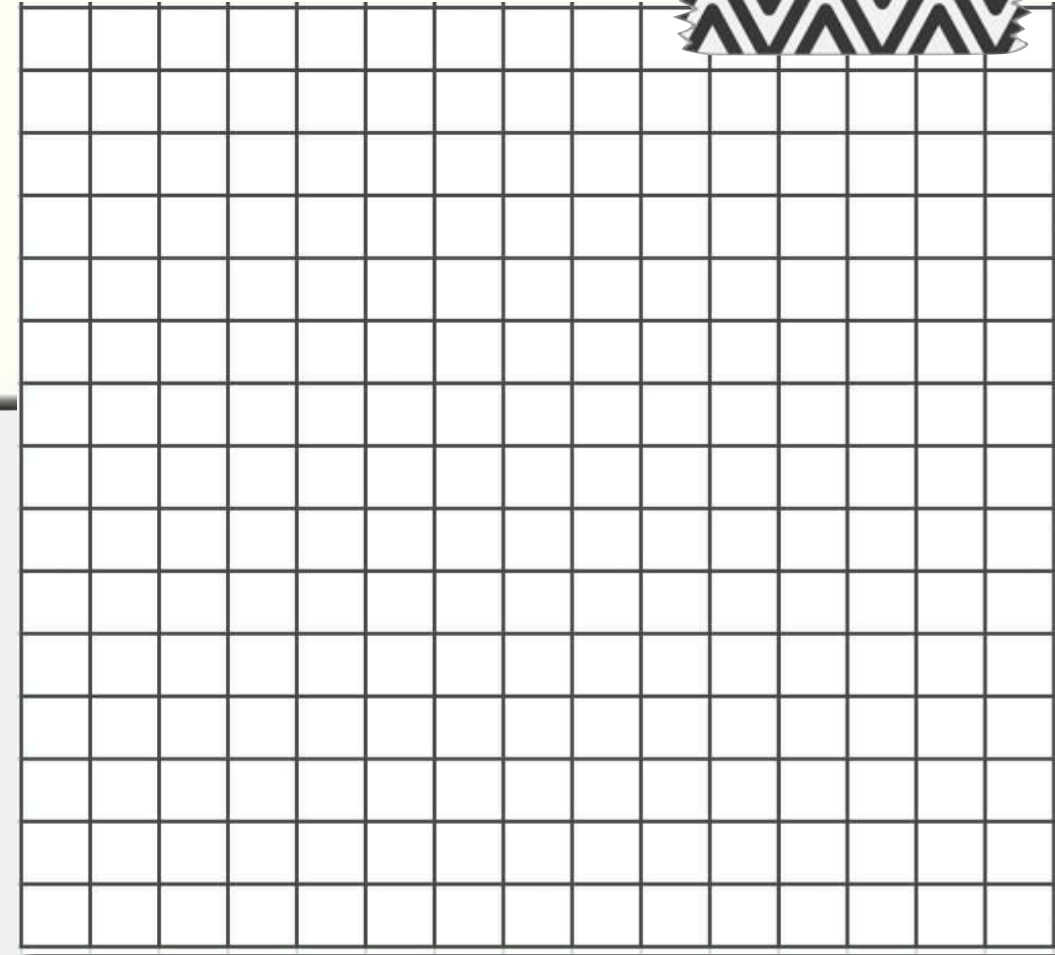
تحقق منه فهمك

2

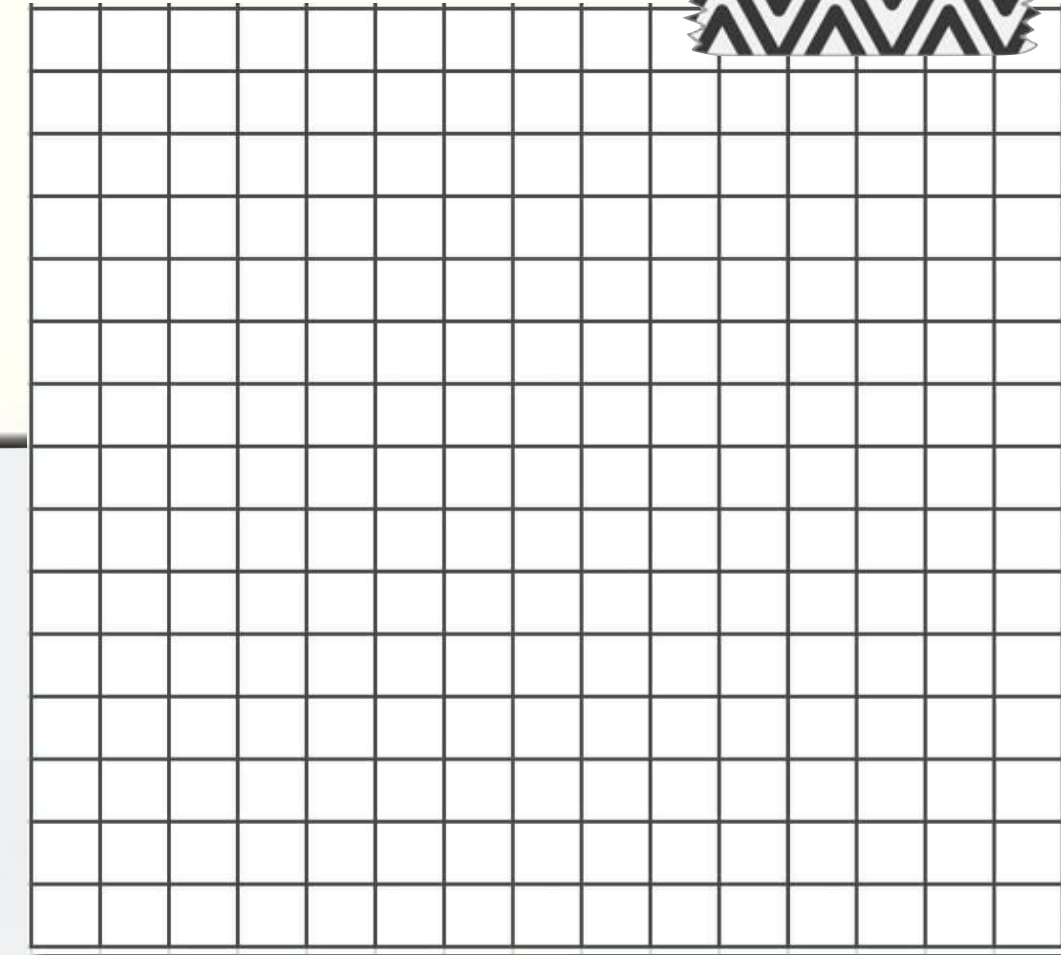
الاثبات القطبية والأعداد المركبة

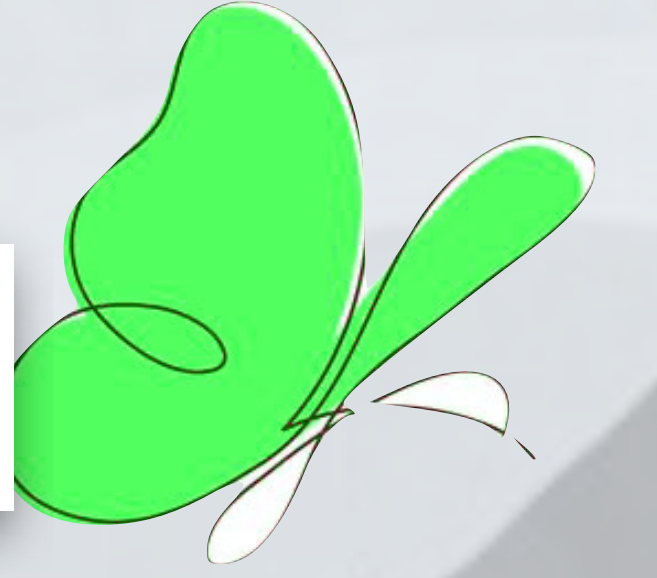
مثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

$$-3 + 4i \text{ (1B)}$$



$$5 + 2i \text{ (1A)}$$





لَدَبْ

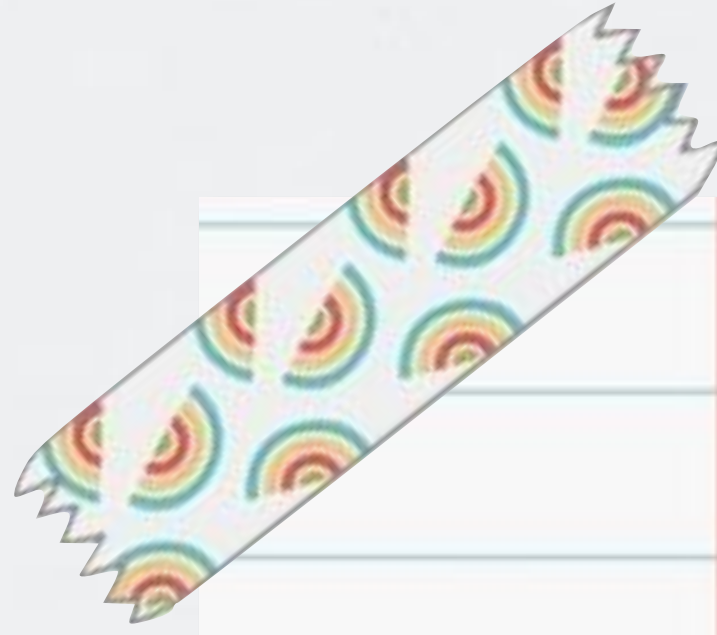
2 الماتحاتيات القطبية والأعداد المركبة

مَثَل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

$z = -3 + i$ (2)

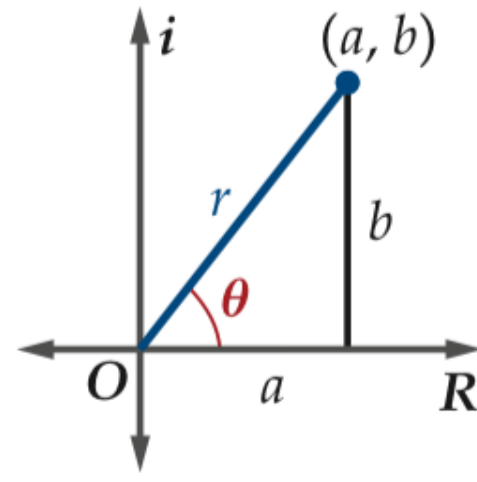
$z = 4 + 4i$ (1)

الاحداثيات القطبية والأعداد المركبة



تنبيه!

الصورة القطبية: يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والاحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الاحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقاً في هذا الدرس.



كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثل عدداً مركباً في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x, y لإيجاد قيم a, b .

$$\sin \theta = \frac{b}{r}, \quad \cos \theta = \frac{a}{r}$$

$$r \sin \theta = b, \quad r \cos \theta = a$$

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a, b ، يمكننا إيجاد الصورة القطبية أو الصورة المثلثية لعدد مركب.

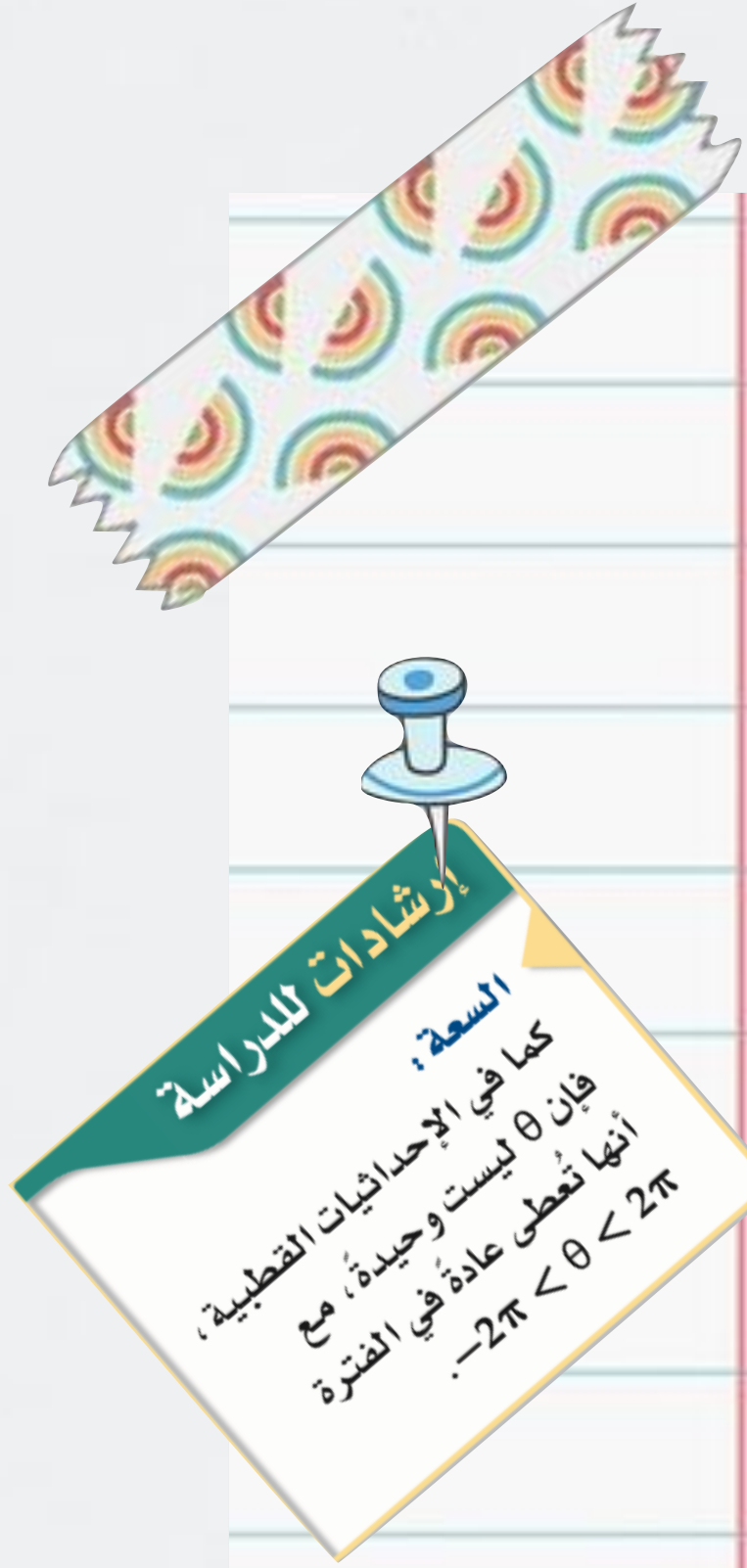
$$z = a + bi \quad \text{العدد المركب الأصلي}$$

$$= r \cos \theta + (r \sin \theta)i$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{خذ العامل المشترك}$$

في حالة العدد المركب، فإن r تمثل القيمة المطلقة أو المقياس للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمى الزاوية θ سعة العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

2 الماثبات القطبية والأعداد المركبة



مفهوم أساسي

الصورة القطبية لعدد مركب

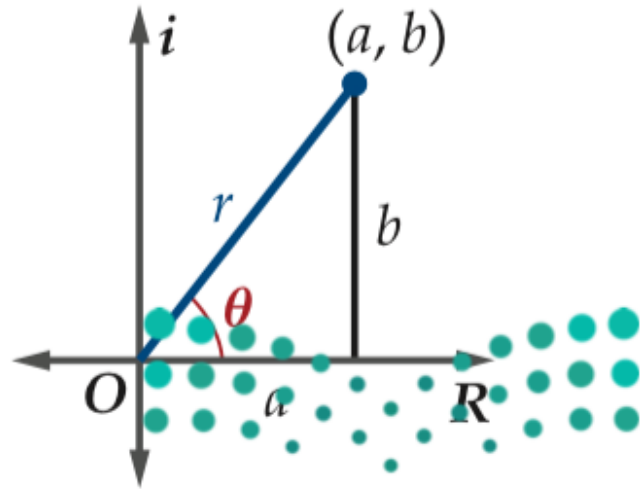
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

حيث $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

$b = r \sin \theta$ ، $a = r \cos \theta$ ، $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



وزارة التعليم
Ministry of Education

مثال 2

عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

(a) $-6 + 8i$

أوجد المقياس r والسعة θ .

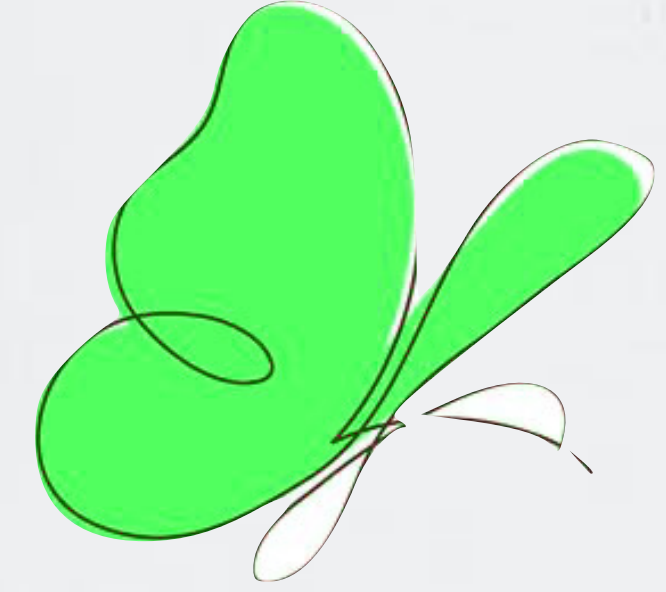
$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a} + \pi$	صيغ التحويل، $a < 0$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$= \text{Tan}^{-1} \left(-\frac{8}{6}\right) + \pi \approx 2.21$	$a = -6, b = 8$	$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6 + 8i$ هي $10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$ تقريبًا.

(b) $4 + \sqrt{3}i$

$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a}$	صيغ التحويل، $a > 0$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$= \text{Tan}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{4}$	$a = 4, b = \sqrt{3}$	$= \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$
≈ 0.41	بسّط	$= \sqrt{19} \approx 4.36$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $4 + \sqrt{3}i$ هي $4.36(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$ تقريبًا.



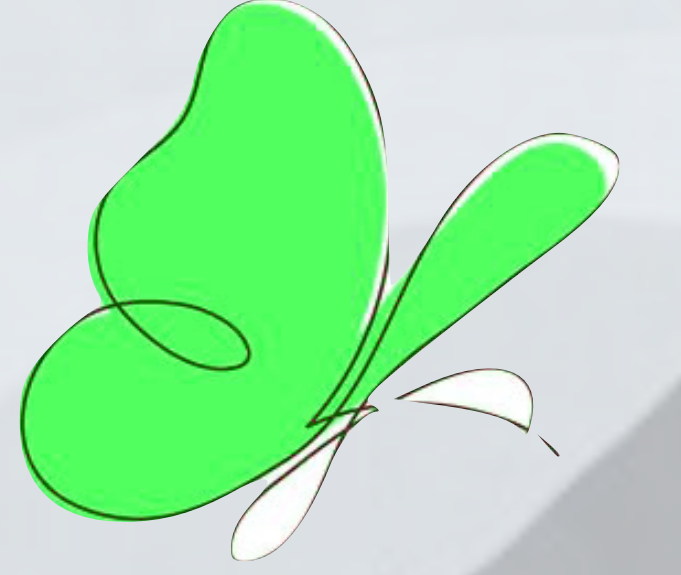
تحقق منه فهمك

2 الماثبات القطبية والأعداد المركبة

عبّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

$$-2 - 2i \quad (2B)$$

$$9 + 7i \quad (2A)$$



لَدَرْ

2 الماتحاتيات القطبية والأعداد المركبة

عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

$$-2 + i \quad (9)$$

$$4 + 4i \quad (8)$$

2 الماتيات القطبية والأعداد المركبة

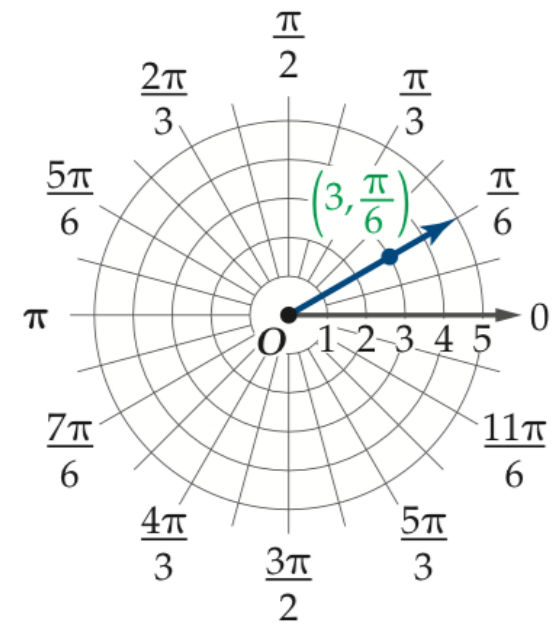
مثال 3

مثّل العدد $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.

عيّن الإحداثيات القطبية $(3, \frac{\pi}{6})$.

ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بسّط.



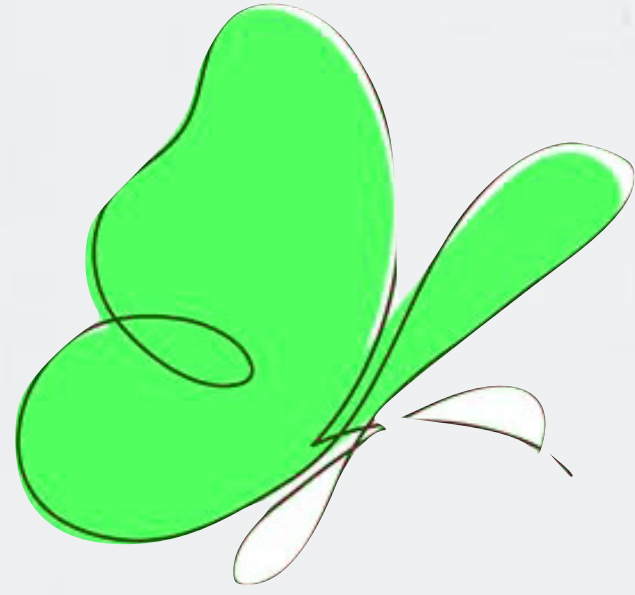
$$\text{الصورة القطبية} \quad 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام} \quad = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\text{خاصية التوزيع} \quad = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

تمثّل الصورة
القطبية للعدد المركب
وتحولها للصورة
الديكارتية

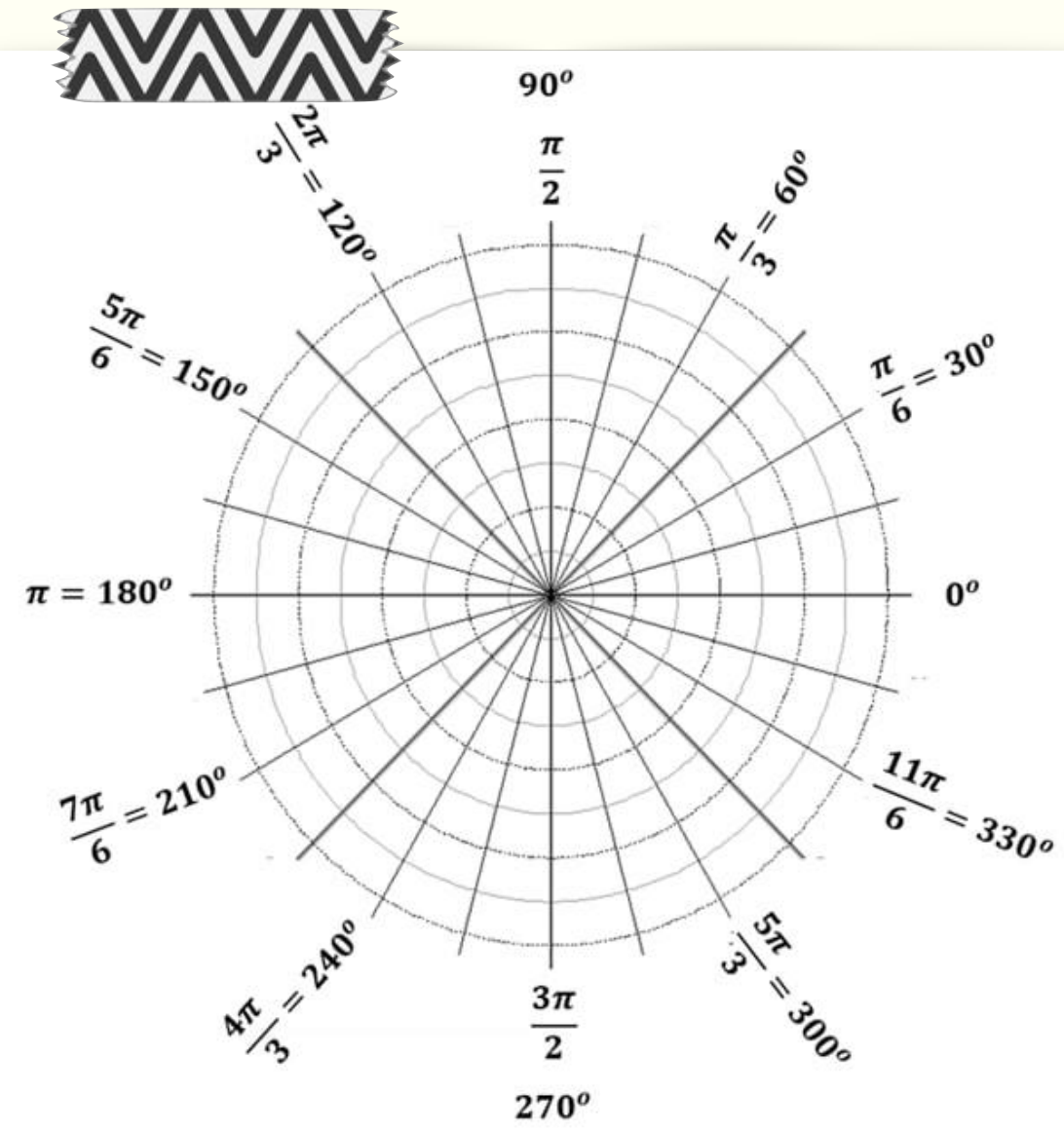


تحقق منه فهمك

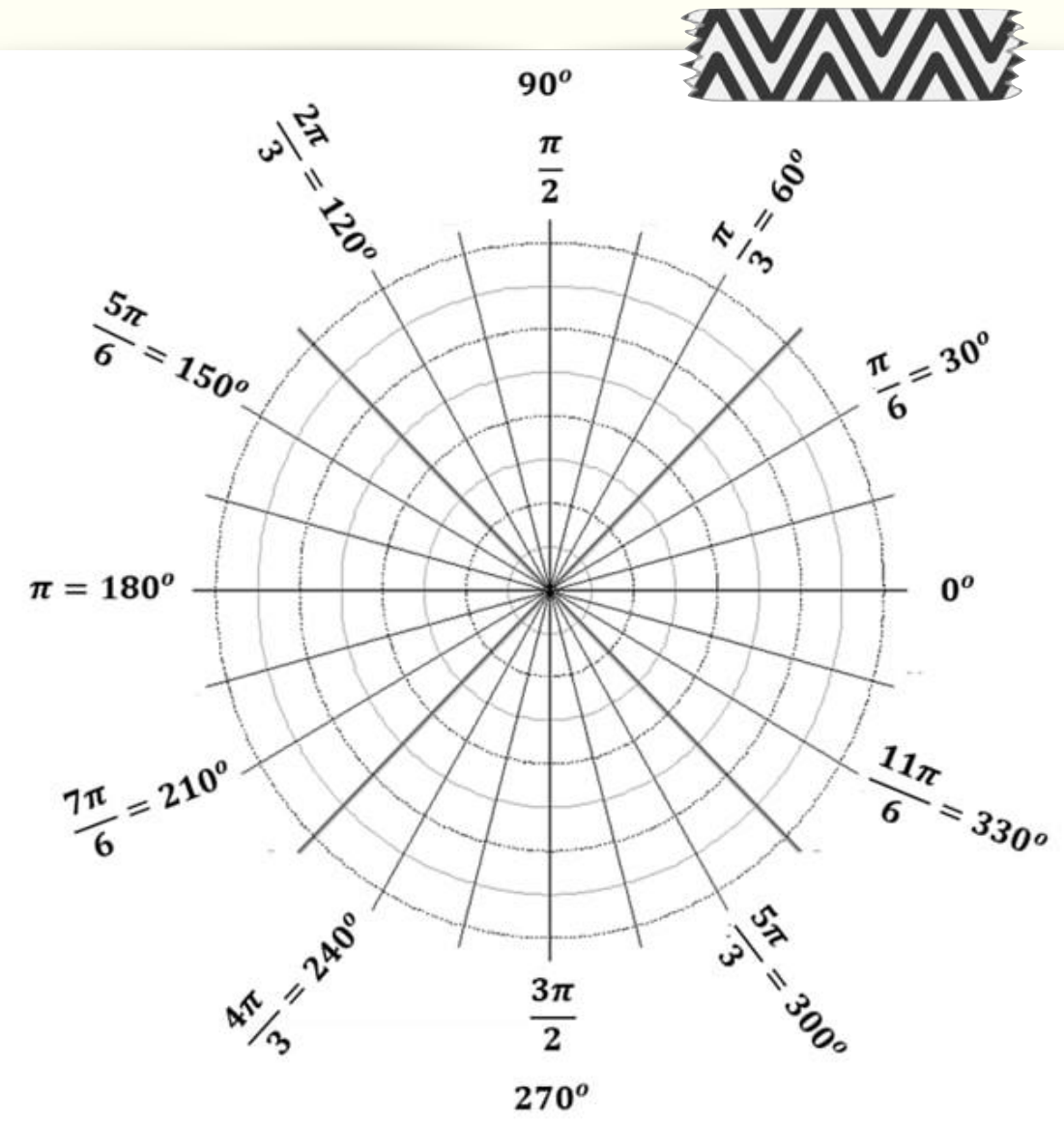
2 الماتر اثبات القطبية والأعداد المركبة

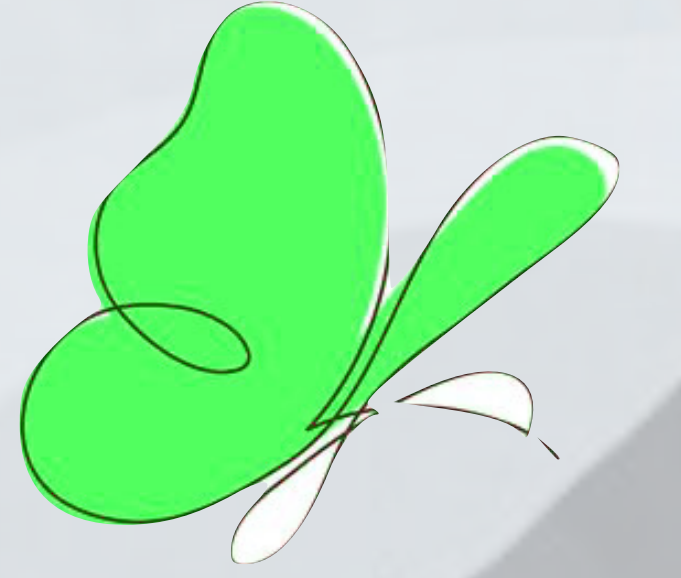
مثّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

$$4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \quad (3B)$$



$$5 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad (3A)$$



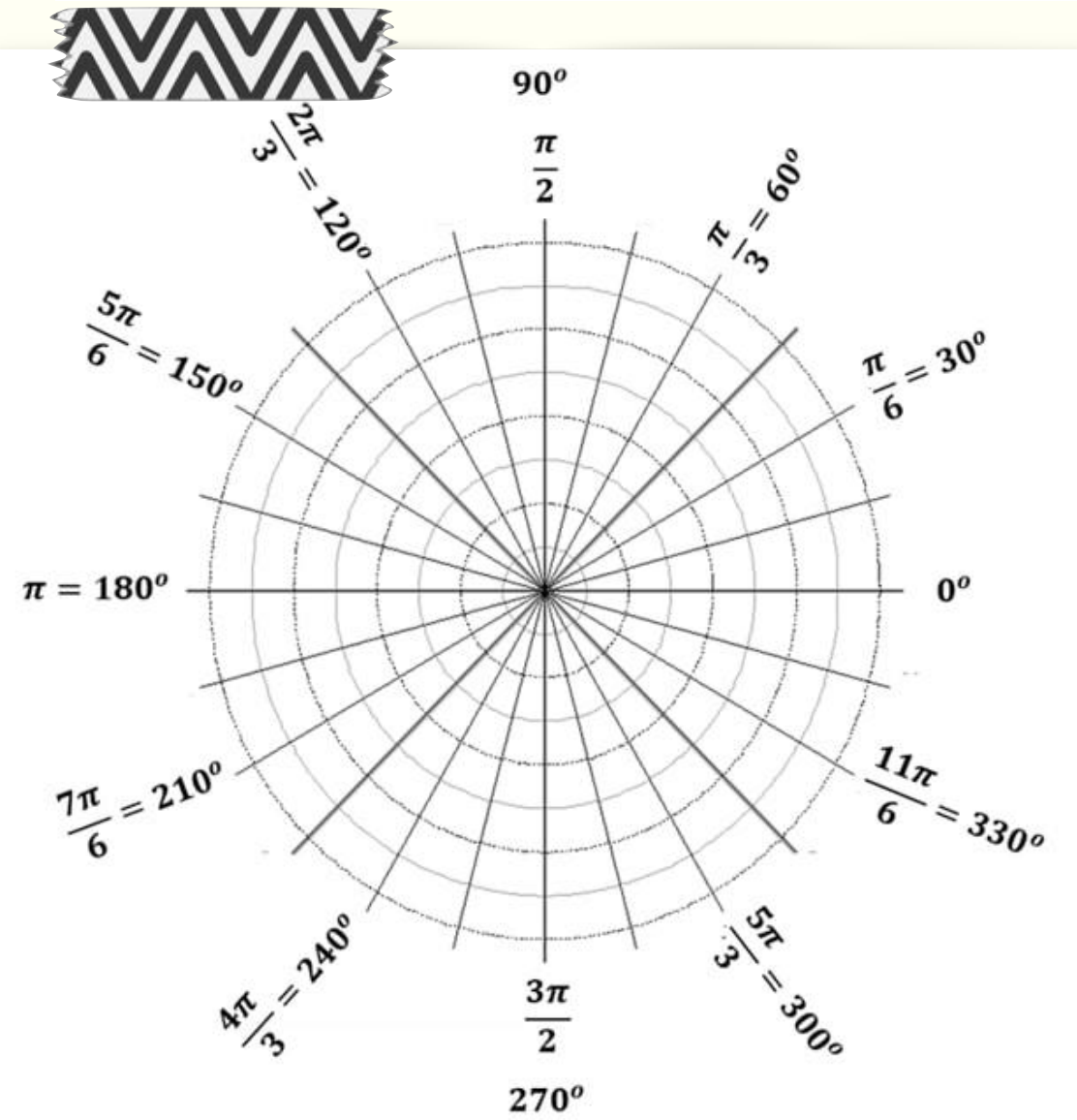


لَدَب

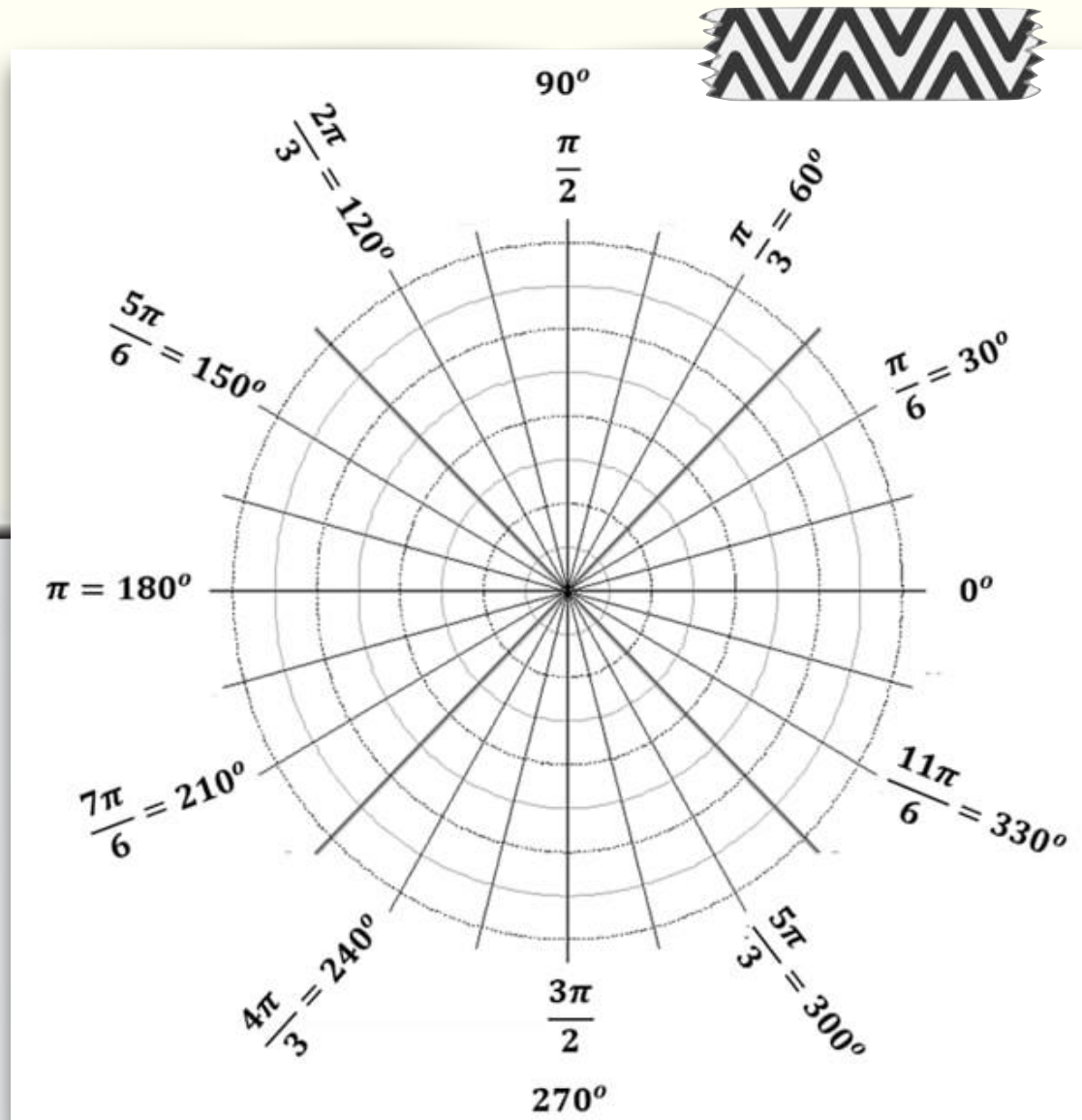
2 الماتيات القطبية والأعداد المركبة

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3)

$$(15) \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$



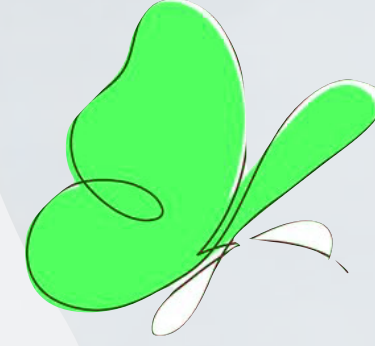
$$(14) 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$



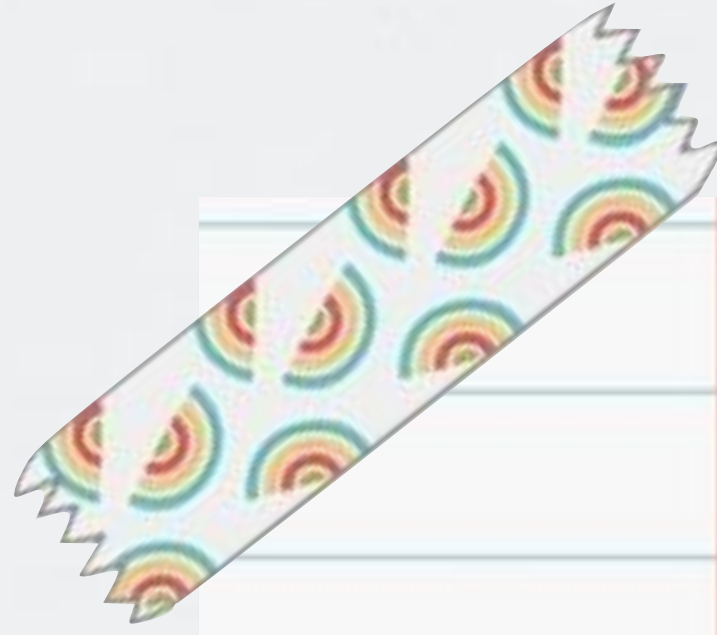
مقطعة توضيحي

الاثبات القطبية والأعداد المركبة

2



الاثبات القطبية والأعداد المركبة



ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدة للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

فك الأقواس

$$= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

جمع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدل i^2 بـ -1

$$= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + (i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$$

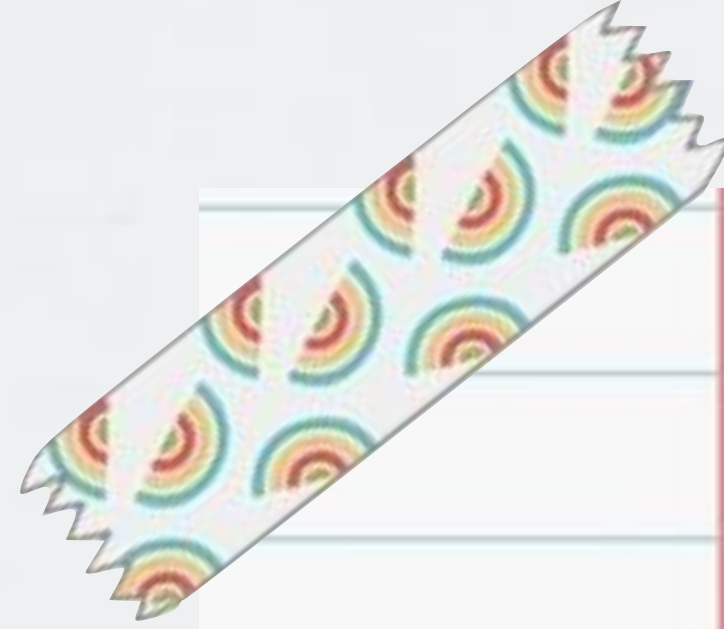
أخرج i عاملاً مشتركاً

$$= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$$

متطابقتنا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

2 الاعداد المركبة القطبية والاعداد المركبة



مفهوم أساسي

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

للعدين المركبين $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ، فإن:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad \text{صيغة الضرب}$$

$$\text{حيث } z_2 \neq 0, r_2 \neq 0, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad \text{صيغة القسمة}$$

مثال 4

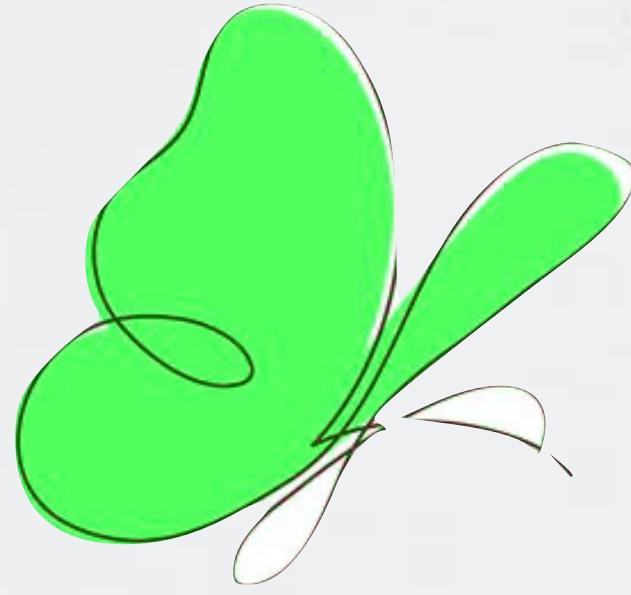
أوجد ناتج $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$$\begin{aligned} \text{العبارة المعطاة} \quad & 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \\ \text{صيغة الضرب} \quad & = 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ \text{بسّط} \quad & = 8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

$$\begin{aligned} \text{الصورة القطبية} \quad & 8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right) \\ \text{أوجد قيم الجيب وجيب التمام} \quad & = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ \text{خاصية التوزيع} \quad & = 4\sqrt{3} - 4i \end{aligned}$$

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$ ، والصورة الديكارتية $4\sqrt{3} - 4i$.



ضرب الأعداد المركبة
على الصورة القطبية

تحقق منه فهمك

2 الماتيمات القطبية والأعداد المركبة

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكل مما يأتي:

$$6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \cdot 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4B)$$

$$3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot 5\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \quad (4A)$$

مثال 5

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي 150 V ، وكانت معاوقتها Z تساوي Ω $(3\sqrt{5} [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)])$ ، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

اكتب العدد 150 على الصورة القطبية.

$$r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150, \theta = \tan^{-1} \frac{0}{150} = 0$$

$$150 = 150 (\cos 0 + j \sin 0)$$

$$\text{حل } I \cdot Z = V \text{ بالنسبة لـ } I.$$

$$I \cdot Z = V \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$I = \frac{V}{Z} \quad \text{اقسم كل طرف على } Z$$

$$V = 150 (\cos 0 + j \sin 0), \\ Z = 3\sqrt{5} [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$$

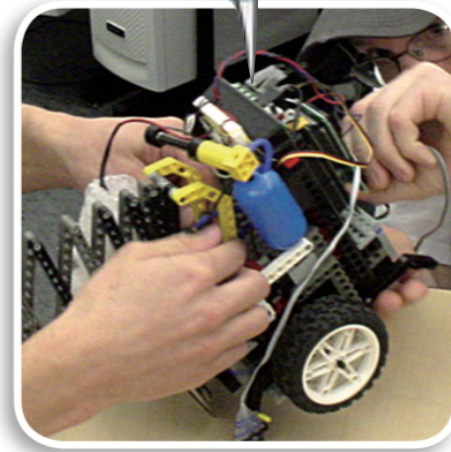
صيغة القسمة

$$I = \frac{150}{3\sqrt{5}} \{ \cos [0 - (-0.46)] + j \sin [0 - (-0.46)] \}$$

بسّط

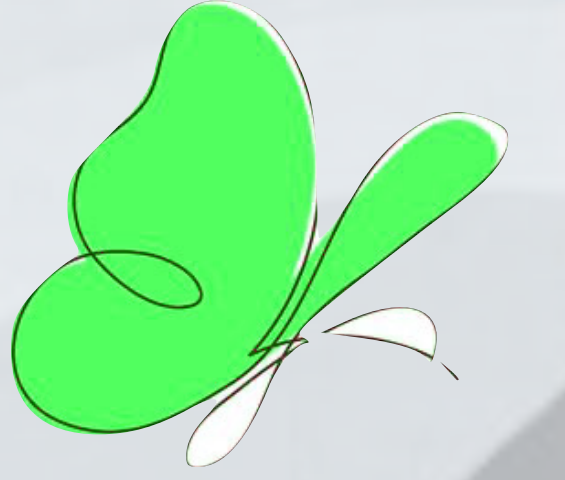
$$I = 10\sqrt{5} (\cos 0.46 + j \sin 0.46)$$

أي أن شدة التيار تساوي $(10\sqrt{5} (\cos 0.46 + j \sin 0.46))$ أمبير تقريباً.



الربط مع الحياة

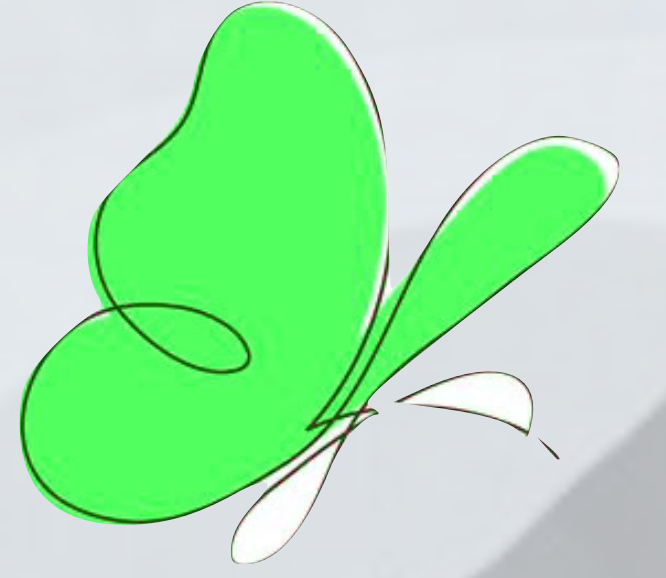
مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغل مدناً كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.



تحقق منه فهمك

2 الماثبات القطبية والأعداد المركبة

(5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية $120V$ ، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية.



لَدَرْ

2 الماتحاتيات القطبية والأعداد المركبة

أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 4, 5)

$$3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \div \frac{1}{2} (\cos \pi + i \sin \pi) \quad (20)$$

$$6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (18)$$

الاثبات القطبية والأعداد المركبة



يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولاً: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

اضرب $z \cdot z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta)$

صيغة الضرب $z^2 = r^2 [\cos (\theta + \theta) + i \sin (\theta + \theta)]$

بسّط $z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

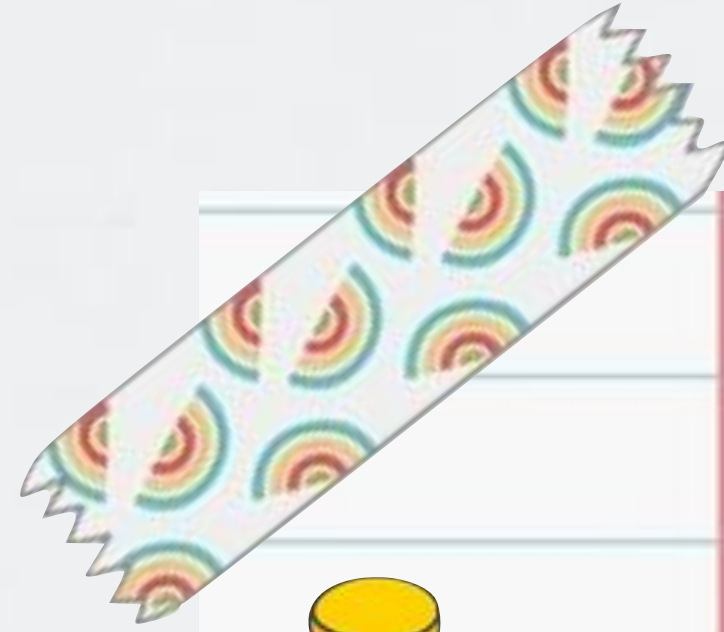
اضرب $z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta)$

صيغة الضرب $z^3 = r^3 [\cos (2\theta + \theta) + i \sin (2\theta + \theta)]$

بسّط $z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n .

2 الماتيمات القاطبية والأعداد المركبة



تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر
(1667 م - 1754 م)
رياضي فرنسي عُرف بالنظرية
المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات
هو *Doctrine of Chances*. ويُعدّ
ديموافر من الرياضيين الرُواد في
الهندسة التحليلية والاحتمالات.

نظرية ديموافر

نظرية

إذا كان $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:
$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

مثال 6

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.
 أولاً: اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1} \frac{b}{a} \\ &= \tan^{-1} \frac{4\sqrt{3}}{4} \\ &= \tan^{-1} \sqrt{3} \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

صيغ التحويل

$$a = 4, b = 4\sqrt{3}$$

بسّط

بسّط

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

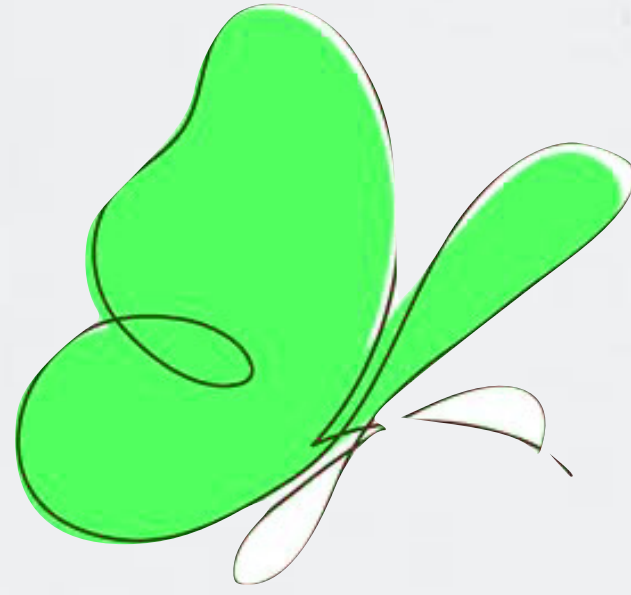
$$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{16 + 48}$$

$$= 8$$

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.
 والآن استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$$\begin{aligned}\text{الصورة القطبية} \quad (4 + 4\sqrt{3}i)^6 &= \left[8\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^6 \\ \text{نظرية ديموافر} \quad &= 8^6 \left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \text{بسّط} \quad &= 262144 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \\ \text{أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام} \quad &= 262144(1 + 0i) \\ \text{بسّط} \quad &= 262144 \\ \text{أي أن} \quad & (4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262144\end{aligned}$$



نظرية ديموافر

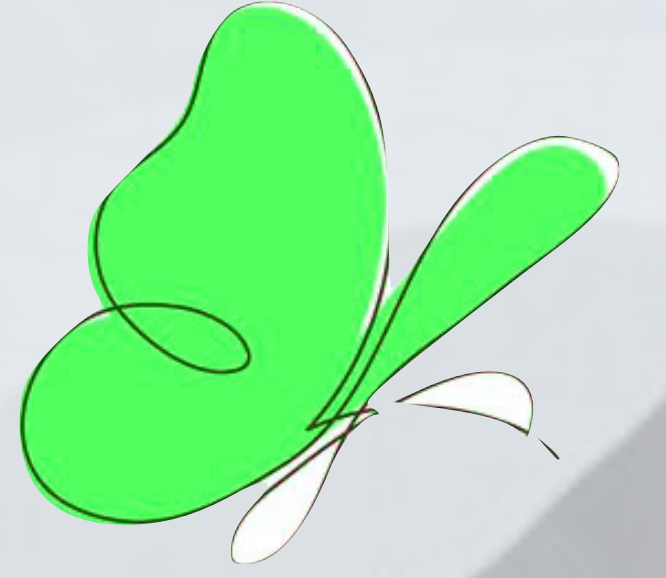
تحقق منه فهمك

2 الماتيمات القياسية والأعداد المركبة

أوجد الناتج في كل مما يأتي، وعبر عنه بالصورة الديكارتية:

$$(2\sqrt{3} - 2i)^8 \quad (6B)$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^4 \quad (6A)$$



لَدَاب

2 الماتحاتيات القطبية والأعداد المركبة

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

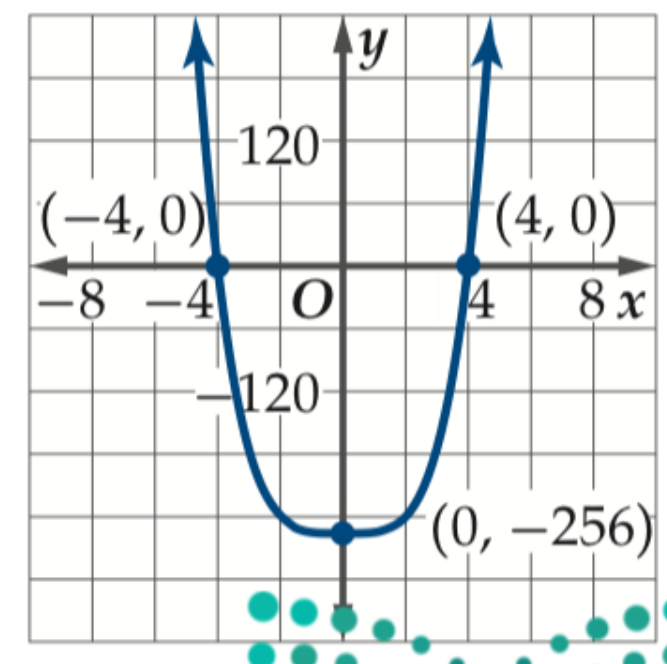
(29) $\left[4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\right]^4$

(28) $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$

2 الماتيات القاطبية والأعداد المركبة



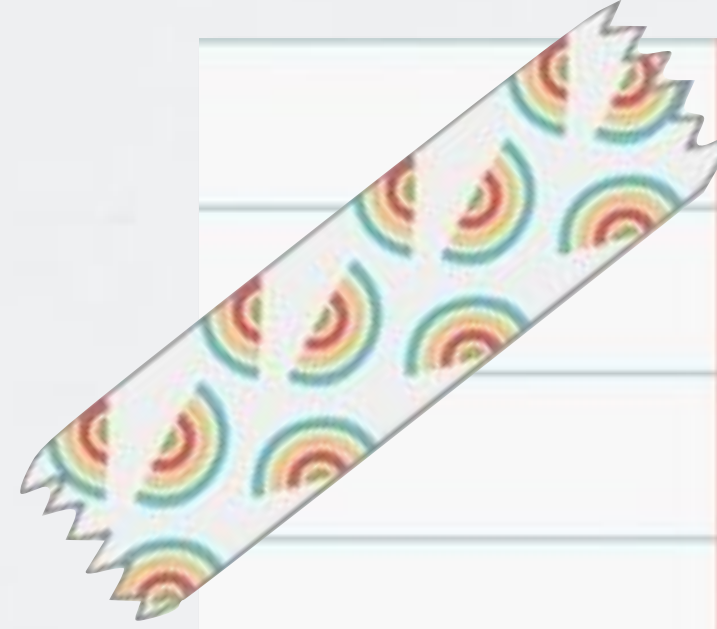
مراجعة المفردات
 النظرية الأساسية في الجبر
 كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.



يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما $-4, 4$. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4, -4$ ، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.

درست سابقاً نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$. وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلف لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$ ، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية... وهكذا.

وزارة التعليم
 Ministry of Education
 2021 - 1443



ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

الجذور المختلفة

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، فإن للعدد المركب $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n - 1$ ، وعندما يساوي العدد n ، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالترار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$

2 الماتيات القطبية والأعداد المركبة

مثال 7

أوجد الجذور الرابعة للعدد المركب $-4 - 4i$.

أولاً: اكتب $-4 - 4i$ على الصورة القطبية.

$$-4 - 4i = \sqrt{32} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

والآن اكتب الصيغة للجذور الرابعة.

$$\theta = \frac{5\pi}{4}, n = 4, r^{\frac{1}{n}} = (\sqrt{32})^{\frac{1}{4}} \quad (\sqrt{32})^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right)$$

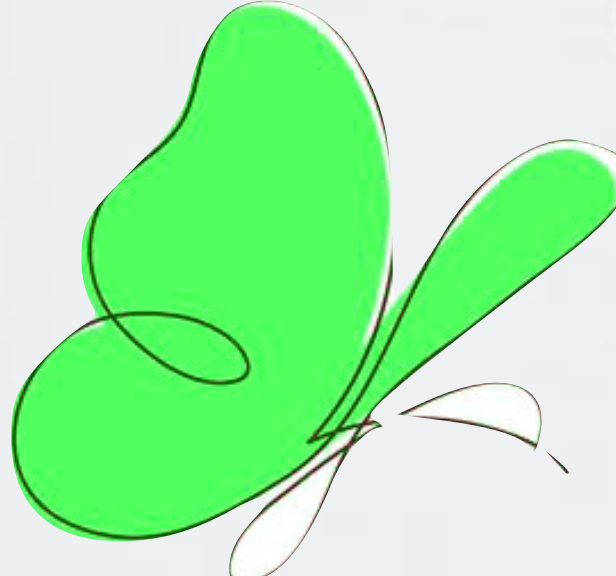
$$\text{بنسبة} = \sqrt[8]{32} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right]$$

جذور العدد
المركب



2

الاثبات القطبية والأعداد المركبة



مثال 7

ثانياً: لإيجاد الجذور الرباعية، عوض $k = 0, 1, 2, 3$.

الجذر الأول $k = 0$
$$\sqrt[8]{32} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(0)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(0)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[8]{32} \left(\cos \frac{5\pi}{16} + i \sin \frac{5\pi}{16} \right) \approx 0.86 + 1.28i$$

الجذر الثاني $k = 1$
$$\sqrt[8]{32} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(1)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(1)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[8]{32} \left(\cos \frac{13\pi}{16} + i \sin \frac{13\pi}{16} \right) \approx -1.28 + 0.86i$$

الجذر الثالث $k = 2$
$$\sqrt[8]{32} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(2)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(2)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[8]{32} \left(\cos \frac{21\pi}{16} + i \sin \frac{21\pi}{16} \right) \approx -0.86 - 1.28i$$

الجذر الرابع $k = 3$
$$\sqrt[8]{32} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(3)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(3)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[8]{32} \left(\cos \frac{29\pi}{16} + i \sin \frac{29\pi}{16} \right) \approx 1.28 - 0.86i$$

الجذور الرباعية للعدد $-4 - 4i$ هي $0.86 + 1.28i, -1.28 + 0.86i, -0.86 - 1.28i, 1.28 - 0.86i$



تحقق منه فهمك

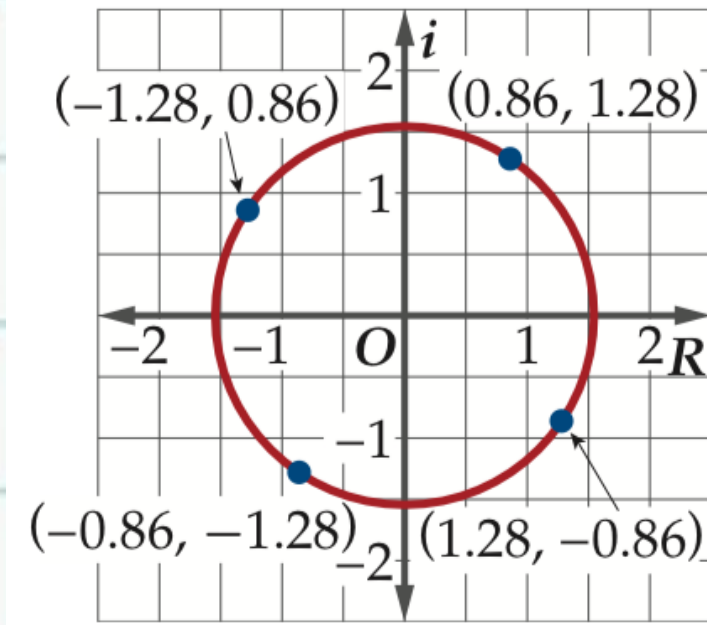
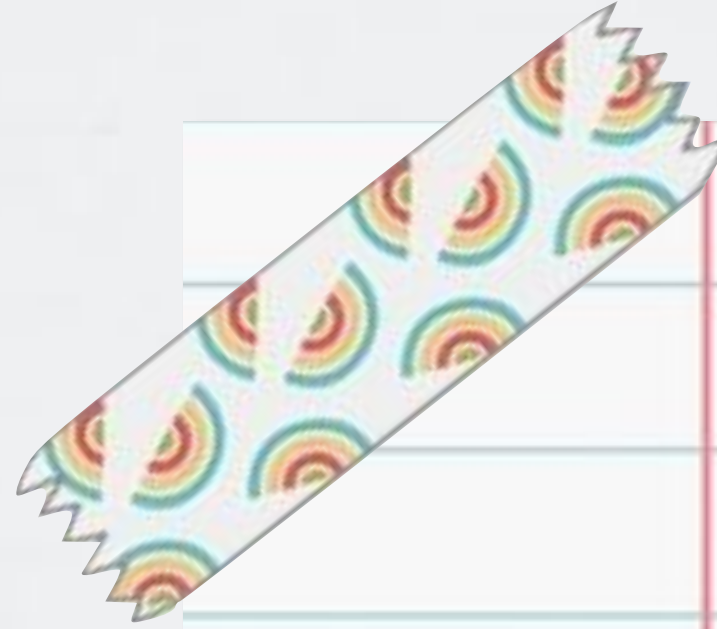
2

الاثبات القطبية والأعداد المركبة

(7B) أوجد الجذور التكعيبة للعدد 8

(7A) أوجد الجذور التكعيبة للعدد $2 + 2i$

2 الماتيات القطبية والأعداد المركبة



لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته $(\sqrt[4]{32} \approx 1.54)$ ، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.

تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن الجذور النونية للعدد واحد تقع على دائرة الوحدة.

2 الماتيات القطبية والأعداد المركبة

مثال 8

أوجد الجذور الثمانية للعدد واحد.

أولاً: اكتب 1 على الصورة القطبية.

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \theta = \tan^{-1} \frac{0}{1} = 0 \quad 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$

والآن اكتب الصيغة للجذور الثمانية.

$$\theta = 0, n = 8, r^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1 \quad 1 \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{8} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{8} \right)$$

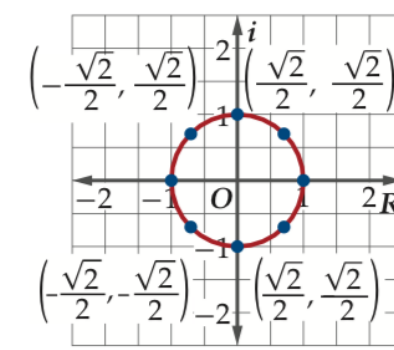
$$\text{بسطة} \quad = \cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4}$$

ثانياً: افترض أن $k = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1.

$$k = 0 \quad \cos \frac{(0)\pi}{4} + i \sin \frac{(0)\pi}{4}$$

$$\text{الجذر الأول} \quad = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

لاحظ أن مقياس كل جذر هو 1، ويمكن إيجاد سعة الجذر الحالية بإضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى سعة الجذر السابق.



الجذر الثاني $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر الثالث $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

الجذر الرابع $\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر الخامس $\cos \pi + i \sin \pi = -1$

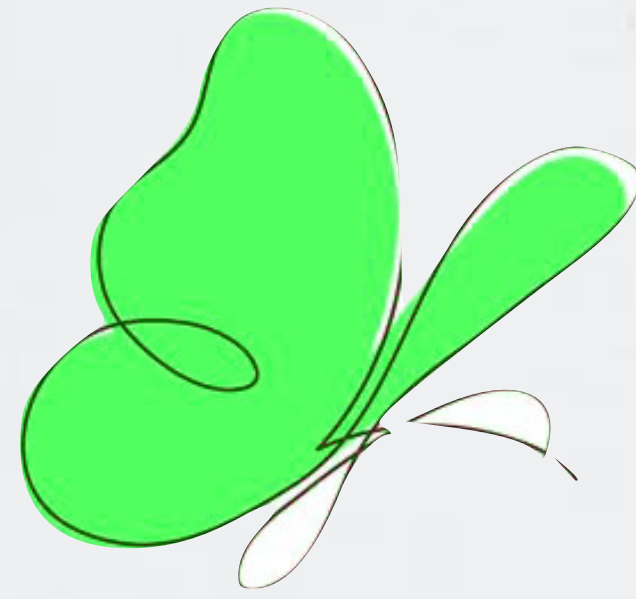
الجذر السادس $\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر السابع $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$

الجذر الثامن $\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذور الثمانية للعدد 1 هي $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ كما هو موضح في الشكل أعلاه.

الجذور النونية
للعدد الواحد



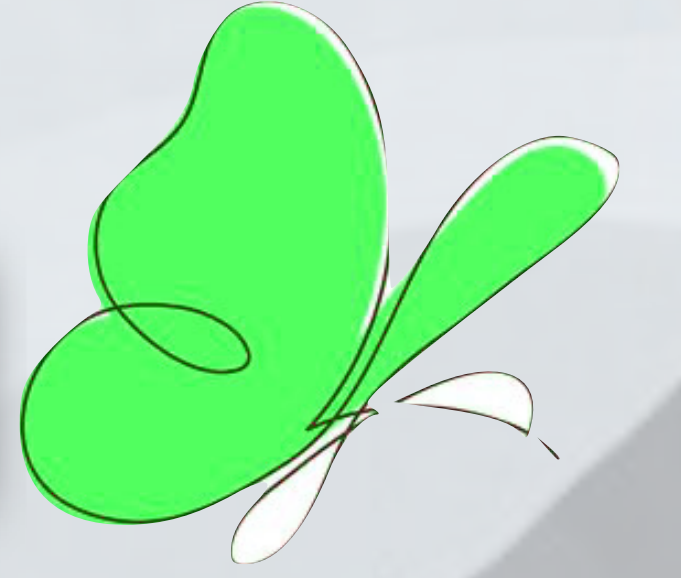
تحقق منه فهمك

2

الاثبات القطبية والأعداد المركبة

(8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

(8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.



لَدَبْ

2 الماتيماتيات القطبية والأعداد المركبة

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:

(34) الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$

(33) الجذور السادسة للعدد i

لَدَبْ

2 الماتيمات القطبية والأعداد المركبة

57 ما المسافة بين النقطة $(-3, \frac{5\pi}{3})$

والنقطة $(6, \frac{\pi}{4})$ ؟

3.97 A

4.97 B

5.97 C

6.97 D

42 اكتشاف الخطأ: يحسب كل من أحمد وباسم قيمة

$(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^5$. فيستعمل أحمد نظرية دي موافر ويحصل على

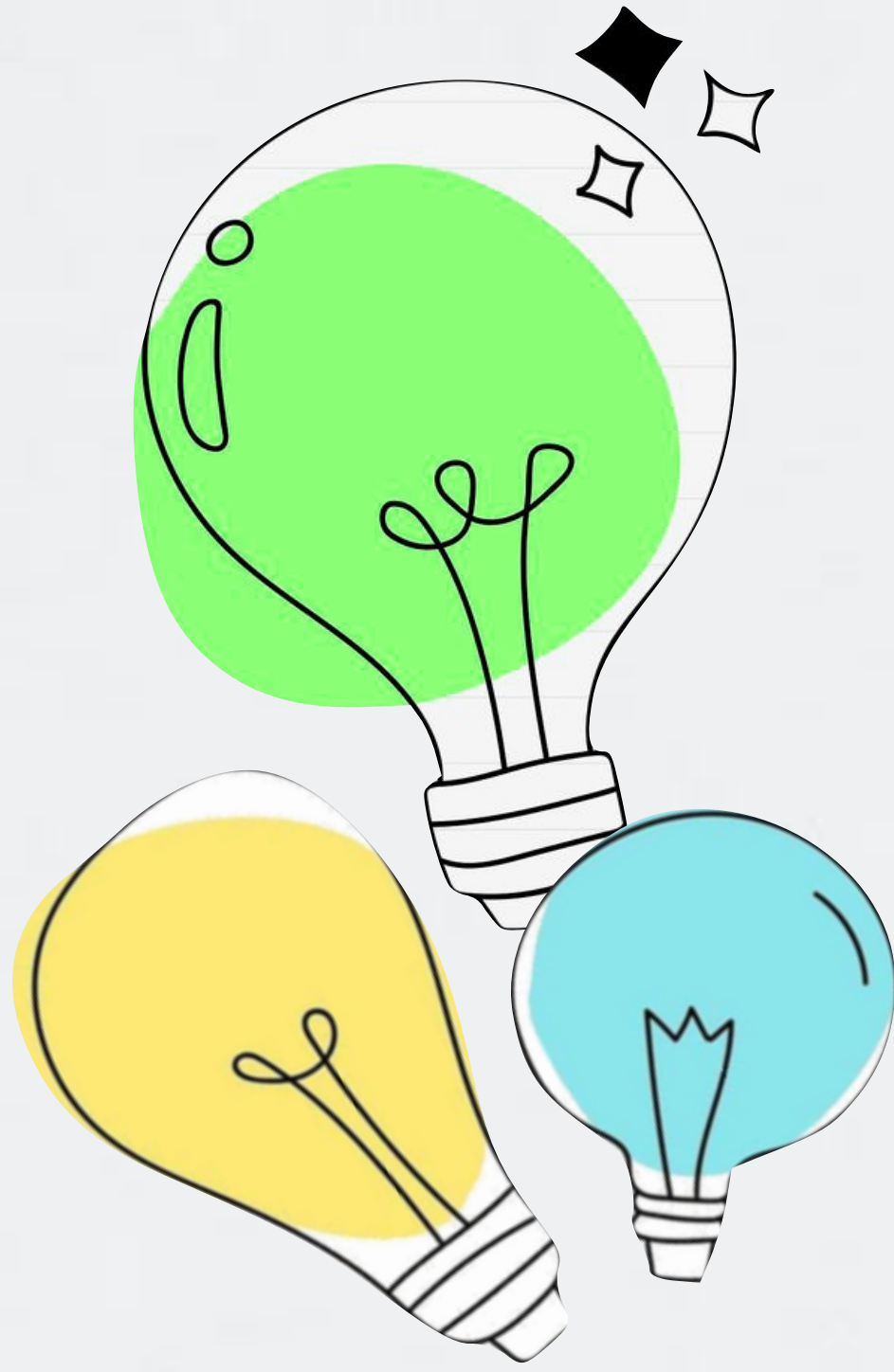
الإجابة $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$. ويقول باسم بأن أحمد قد أنجز جزءاً

من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

مسابقات

2

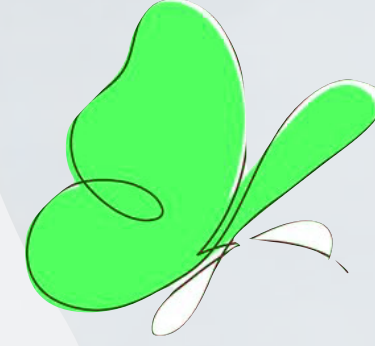
الاثبات القطبية والأعداد المركبة



مقطعة توضحني

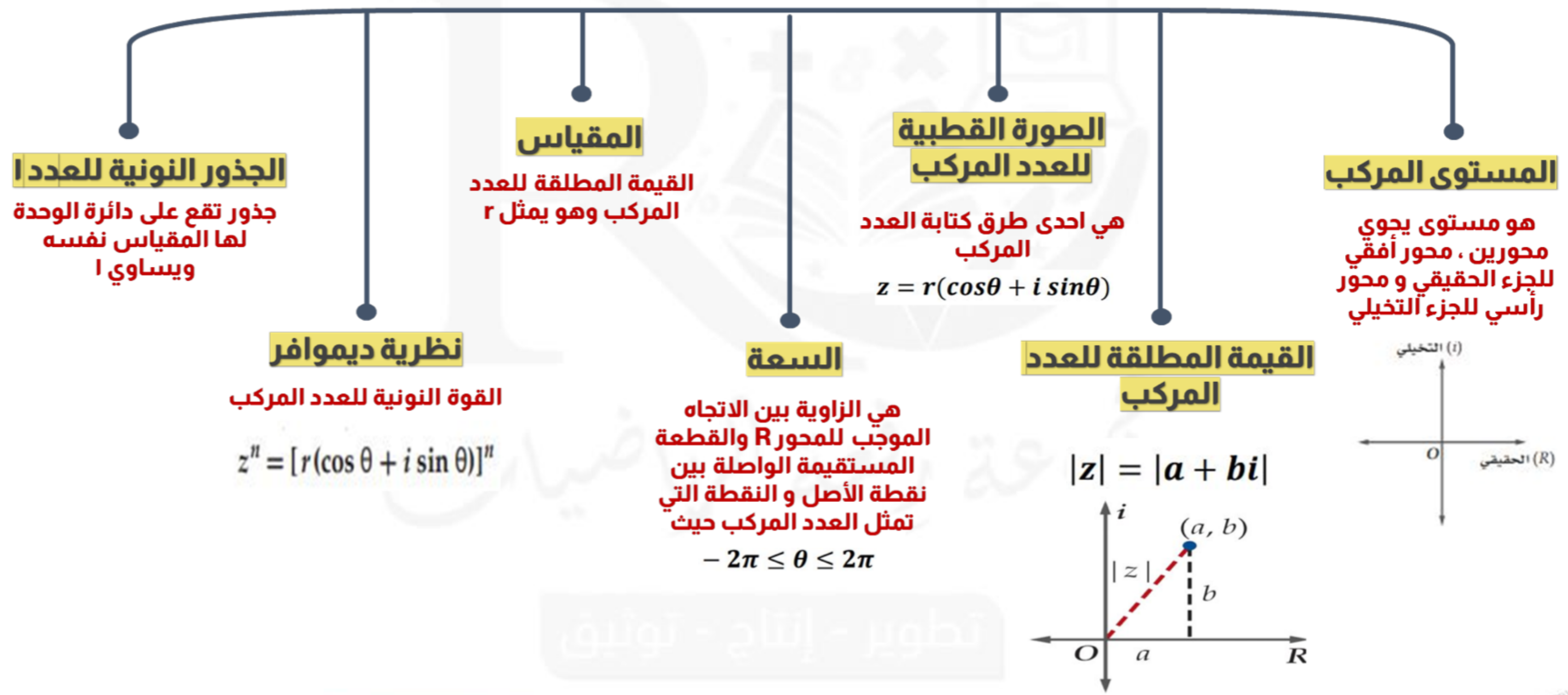
2

الاثبات القطبية والأعداد المركبة



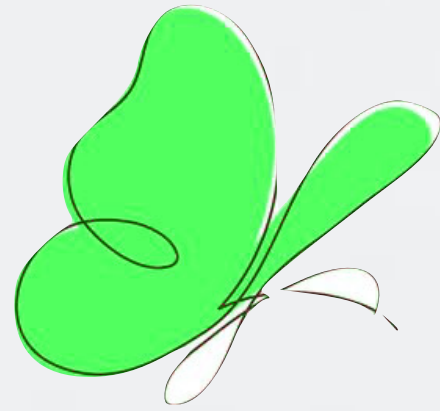
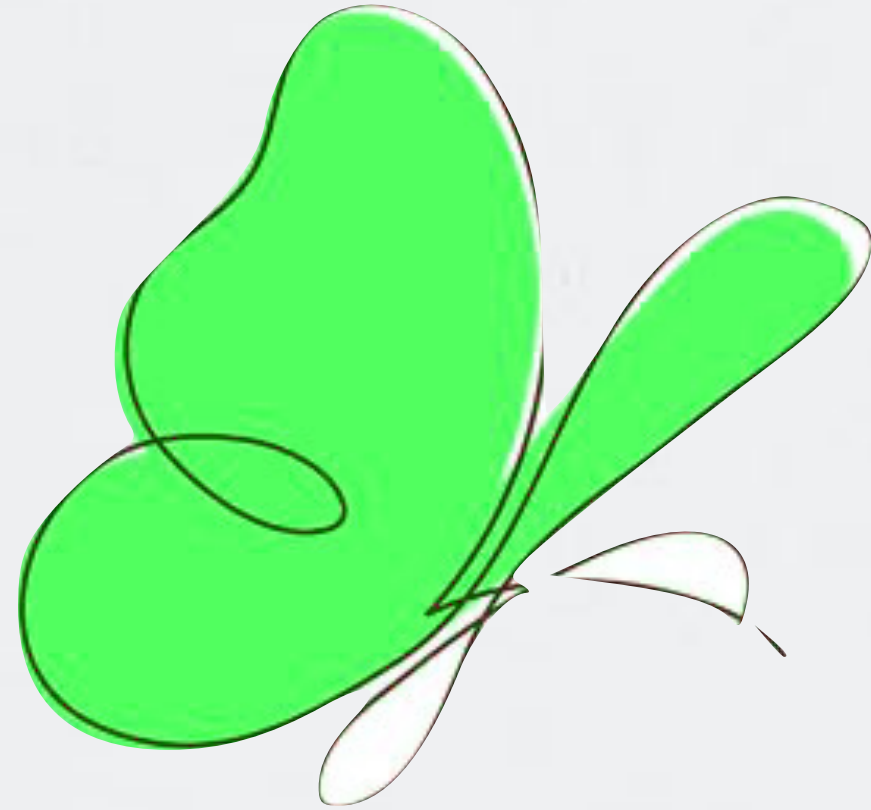
2 الماثبات القطبية والأعداد المركبة

الصورة القطبية والمركبة

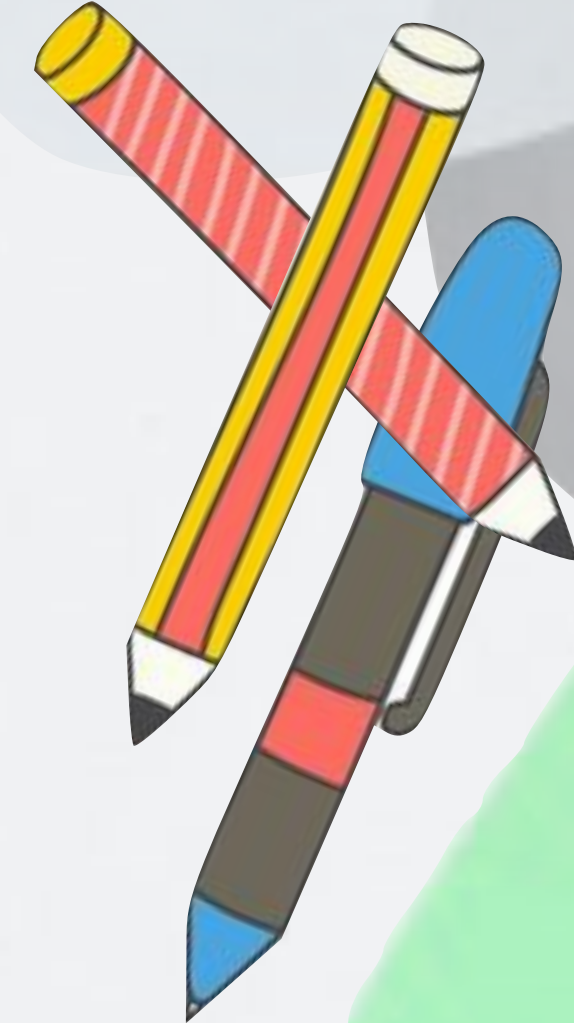


تطوير - إنتاج - توثيق

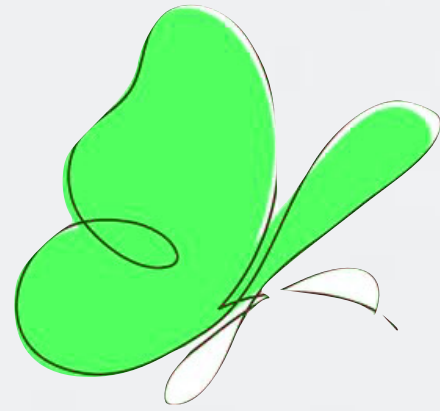
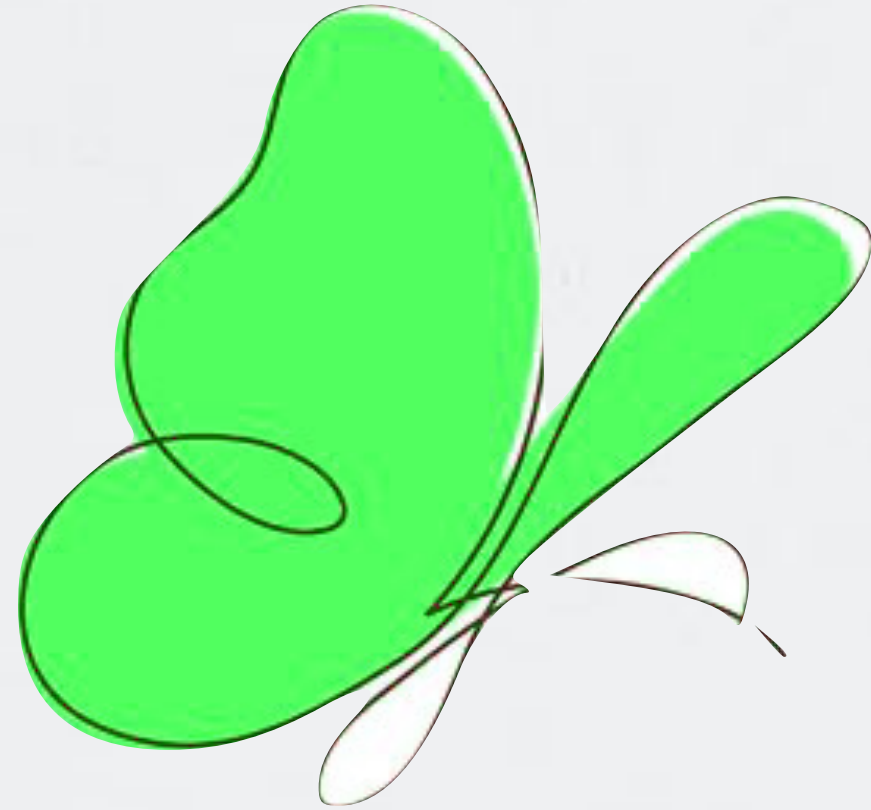
2 الاعداد اثبات القطبية والاعداد المركبة



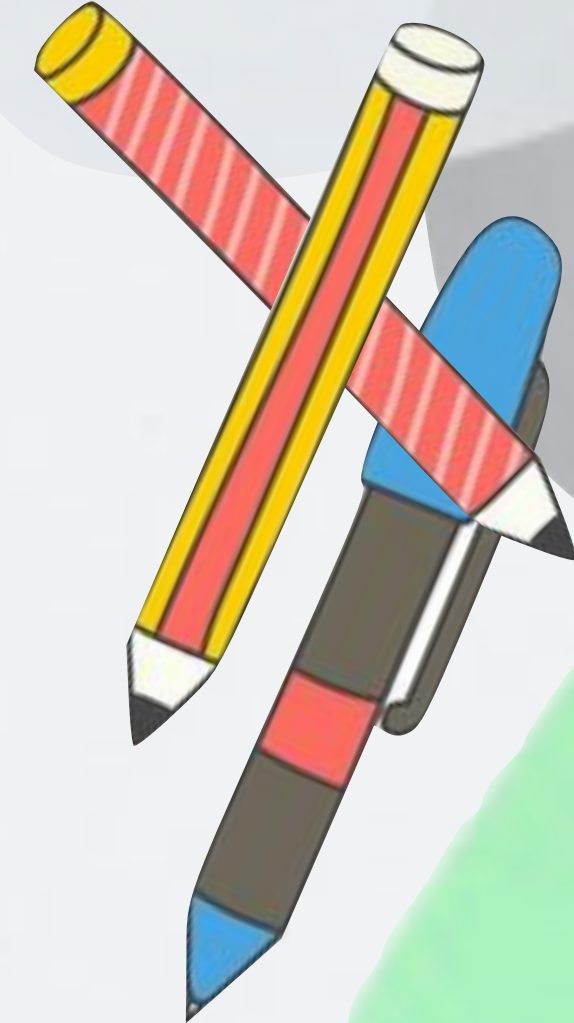
الواجب المنزلي



2 الاعداد اثبات القطبية والاعداد المركبة



الواجب المنزلي



2
الاثبات القطبية والأعداد المركبة

