التاريخ : /. /١٤٤٤/ هجري

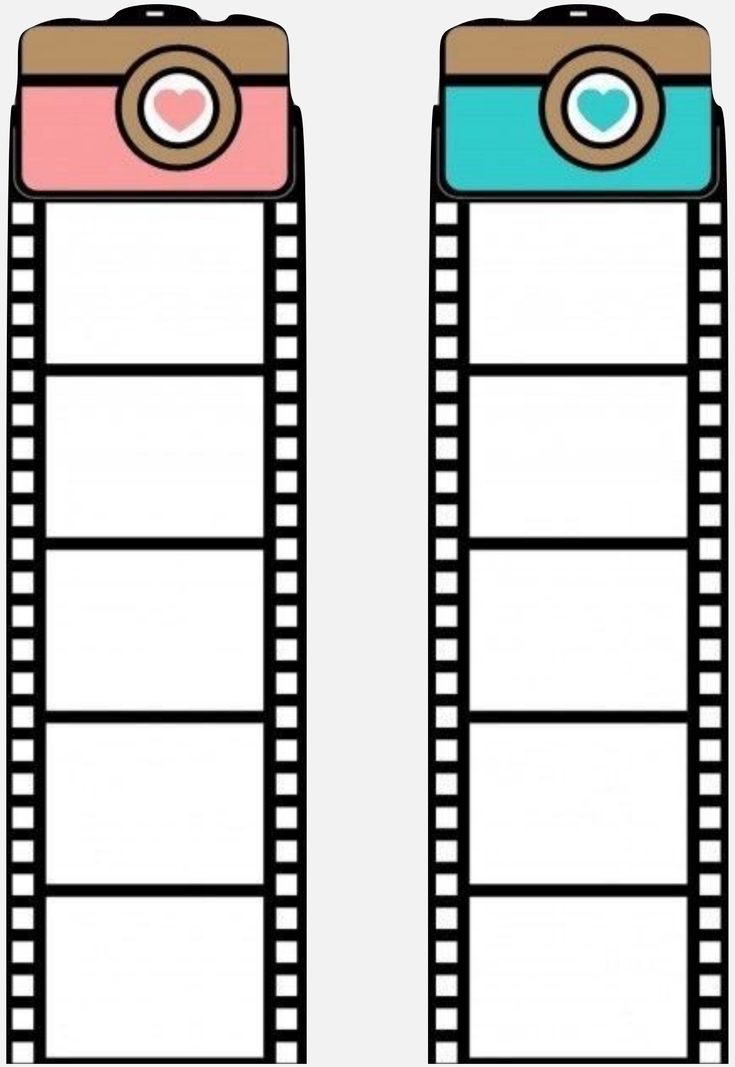
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اثبات علاقات بين الزوايا

بسمة math

التاريخ : /. /١٤٤٤ هجري

استراتيجية شريط الذكريات



فيما سبق

درست تعيين أزواج خاصة من الزوايا واستعملها

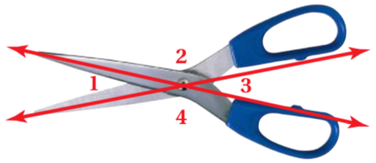
المفردات

الآن

- اكتب براهين تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة
- أكتب براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة

اثبات علاقات بين الزوايا

لماذا؟



تلاحظ أن ∠1 بين شفرتَي المقص، و ∠2 بين الشفرة ومقبض المقص تشكلان زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم. وبالمثل فإن ∠2 و ∠3 بين مقبضَي المقص تشكلان أيضا زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيمٍ.

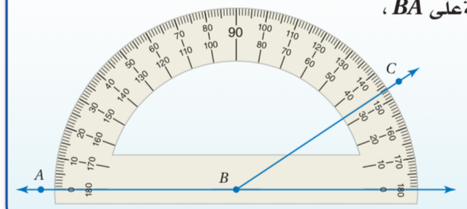
الزوايا المتتامة والمتكاملة : توضّح مسلّمة المنقلة العلاقة بين قياس الزوايا والأعداد الحقيقية.

مسلمة 1.10 مسلّمة المنقلة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تستعمل المنقلة للربط بين قياس زاوية وعدد حقيقي يقع بين 0° و 180°.

مثال: في $\angle ABC$، إذا انطبق صفر المنقلة على $\overrightarrow{BA}$، فإن العدد الذي ينطبق على $\overrightarrow{BC}$ يمثل قياس $\angle ABC$.



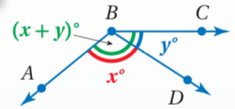
درست سابقًا مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، وتوجد علاقة مشابهة لها بين قياسات الزوايا.

مسلمة 1.11 مسلمة جمع قياسات الزوايا

أضف إلى مطويتك

تقع النقطة D داخل $\angle ABC$ إذا وفقط إذا كان

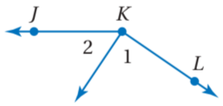
$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$



التاريخ : /. /١٤٤٤ هجري

مثال ١/ استعمال مسلمة جمع قياسات الزوايا

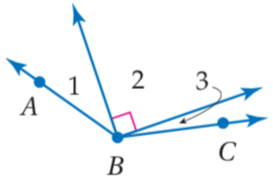
إذا كان $m\angle JKL = 145°$, $m\angle 2 = 56°$ فأوجد $m\angle 1$. برّر خطوات حلّك.



$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle JKL$	مسلّمة جمع قياسات الزوايا
$m\angle 1 + 56° = 145°$	عوّض $m\angle 2 = 56°$, $m\angle JKL = 145°$
$m\angle 1 + 56° - 56° = 145° - 56°$	اطرح 56 من الطرفين
$m\angle 1 = 89°$	بسّط

تحقق من فهمك

1) إذا كان $m\angle ABC = 131°$, $m\angle 1 = 23°$، فأوجد $m\angle 3$. برِّر خطوات حلّك.

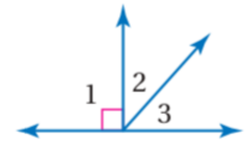


اثبات علاقات بين الزوايا

تأكد

أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

1) $m\angle 2 = x°,\ m\angle 3 = (x-16)°$

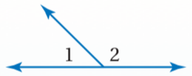


يمكن استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا مع علاقات أخرى على الزوايا؛ لإثبات نظريات تتعلق بالزوايا.

نظريتان

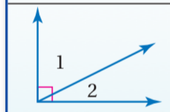
أضف إلى مطويتك

1.3 نظرية الزاويتين المتكاملتين: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإنهما متكاملتان.



مثال: $\angle 1, \angle 2$ متجاورتان على مستقيمٍ، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

1.4 نظرية الزاويتين المتتامتين: إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإن الزاويتين تكونان متتامتين.

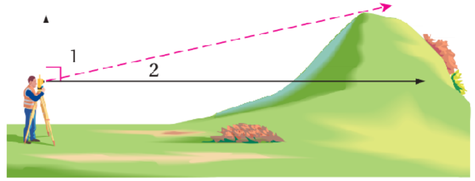


مثال: ضلعا الزاويتين المتجاورتين $\angle 1, \angle 2$ غير المشتركين يشكلان زاويةً قائمةً، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

مثال ؟ / مثال من واقع الحياة

مَسْح الأراضي: قام مسّاح بقياس الزاوية بين خط نظره إلى قمة تلة، والمستقيم الرأسي فكانت $73°$ تقريبًا. ما قياس الزاوية بين خط نظره والخط الأفقي؟ برّر خطوات الحل.

افهم: ارسم شكلًا يوضح المسألة. قاس المسّاح الزاوية بين خط نظره والخط الرأسي؛ لذا ارسم نصف المستقيم الرأسي والأفقي من النقطة التي يشاهد منها المسّاح التلة، ثم سمّ الزوايا الناتجة. وكما تعلم فإن نصفَي المستقيمين (الأفقي والرأسي) يكوّنان زاويةً قائمةً.



خطط: استعمل نظرية الزاويتين المتتامتين.

حُل: بما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة فإنهما متتامتان. تعريف الزاويتين المتتامتين

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	تعريف الزاويتين المتتامتين
$73° + m\angle 2 = 90°$	$m\angle 1 = 73°$
$73° + m\angle 2 - 73° = 90° - 73°$	اطرح 73 من الطرفين
$m\angle 2 = 17°$	بسّط

قياس الزاوية بين خط نظر المساح وخط الأفق $17°$

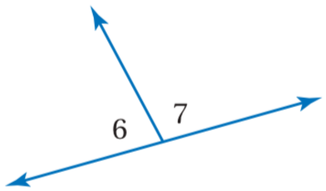
تحقق: تعلم أنه يجب أن يكون ناتج جمع قياسَي $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي $90°$

$17° + 73° = 90°$ ✓

اثبات علاقات بين الزوايا

تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور، $\angle 6$ و $\angle 7$ متجاورتان على مستقيم. إذا كان:
$m\angle 6 = (3x + 32)^\circ$ و $m\angle 7 = (5x + 12)^\circ$ ،
فأوجد قيمة $m\angle 7$, $m\angle 6$, x. برّر خطوات الحل.

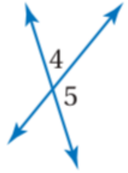


التاريخ : /. /١٤٤٤ هجري

تأكد

أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

2) $m\angle 4 = (3(x-1))^\circ, m\angle 5 = (x+7)^\circ$



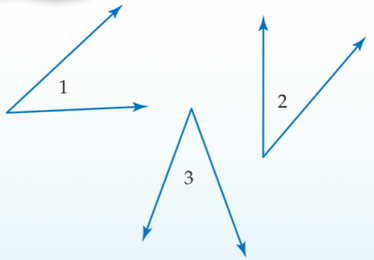
اثبات علاقات بين الزوايا

تطابق الزوايا: إن الخصائص الجبرية التي تنطبق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها، تنطبق أيضًا على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

نظرية 1.5

أضف إلى مطويتك

خصائص تطابق الزوايا



خاصية الانعكاس للتطابق

$\angle 1 \cong \angle 1$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

خاصية التعدي للتطابق

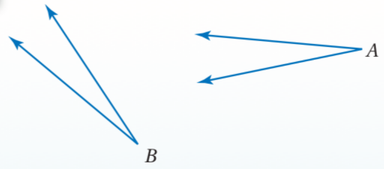
إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$ ، وكانت $\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

ستُبرهن خاصيتَي الانعكاس والتعدي للتطابق في السؤالين 16 و 17

برهان

أضف إلى مطويتك

خاصية التماثل للتطابق



المعطيات: $\angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\angle B \cong \angle A$

برهان حر:

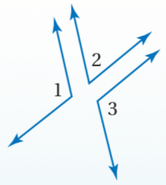
تعلم من المعطيات أن $\angle B \cong \angle A$. ومن تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle A = m\angle B$، وباستعمال خاصية التماثل للمساواة يكون $m\angle B = m\angle A$، وعليه فإن $\angle A \cong \angle B$ من تعريف تطابق الزوايا.

التاريخ : /. /١٤٤٤ هجري

نظريتان

أضف إلى مطويتك

1.6 نظرية تطابق المكمّلات:

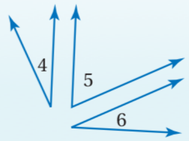


الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$،

وكان $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

1.7 نظرية تطابق المتممات:



الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90°$

و $m\angle 5 + m\angle 6 = 90°$ ، فإن $\angle 6 \cong \angle 4$.

برهان

أضف إلى مطويتك

إحدى حالات نظرية تطابق المكملات

المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان.

$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.

المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

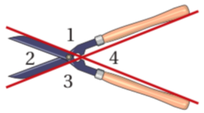
العبارات	المبررات
1) $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.	1) معطيات
2) $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°, m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	2) تعريف الزاويتين المتكاملتين
3) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3) بالتعويض
4) $m\angle 1 = m\angle 2$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $\angle 1 \cong \angle 2$	5) تعريف تطابق الزوايا

التاريخ : /. /١٤٤٤/ هجري

اثبات علاقات بين الزوايا

مثال ٣ / براهين تستعمل فيها نظريتا تطابق المكملات

أثبت أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس 2 و 4 في الشكل المجاور متطابقتان.



المعطيات: $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.

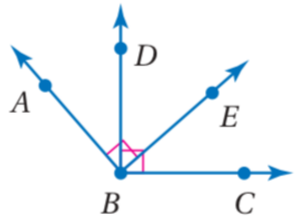
المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 4$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.	**1)** معطيات
2) $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم. $\angle 3$ و $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم.	**2)** تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.	**3)** نظرية الزاويتين المتكاملتين
4) $\angle 4 \cong \angle 2$	**4)** نظرية تطابق المكملات

تحقق من فهمك

3) في الشكل المجاور $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان.
أثبت أن $\angle ABD \cong \angle EBC$.

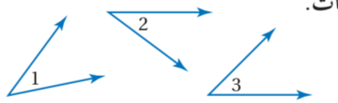


بسمه math

اثبات علاقات بين الزوايا

تأكد

4) **برهان:** فيما يأتي أكمل برهان إحدى حالات نظرية تطابق المتممات.



المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان.

$\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.

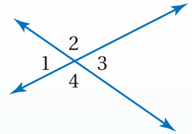
المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.	a) ؟
b) $m\angle 1 + m\angle 3 = 90°$ $m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$	b) ؟
c) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	c) ؟
d) $m\angle 1 = m\angle 2$	d) ؟
e) $\angle 1 \cong \angle 2$	e) ؟

أضف إلى مطويتك

نظرية 1.8 نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

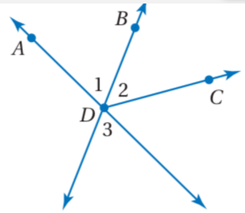


الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

مثال: $\angle 1 \cong \angle 3$
$\angle 2 \cong \angle 4$

التاريخ : /. /١٤٤٤ هجري

مثال ٤ / استعمال الزوايا المتقابلة بالرأس



أثبت أنه إذا كان $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$

المعطيات: $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$

المطلوب: $\angle 3 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$.	1) معطيات
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	2) تعريف منصف الزاوية
3) $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس.	3) تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس
4) $\angle 3 \cong \angle 1$	4) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
5) $\angle 3 \cong \angle 2$	5) خاصية التعدي للتطابق
6) $\angle 2 \cong \angle 3$	6) خاصية التماثل للتطابق

تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\angle 3$ و $\angle 4$ متقابلتين بالرأس، وكان $m\angle 3 = (6x + 2)°$ و $m\angle 4 = (8x - 14)°$، فأوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$. برِّر خطوات حلّك.

التاريخ : /. /١٤٤٤ هجري

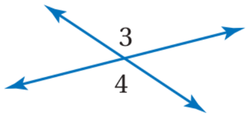
اثبات علاقات بين الزوايا

تأكد

أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

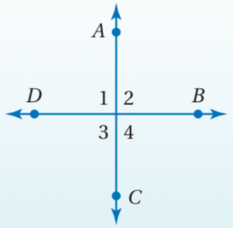
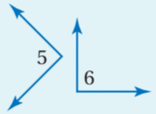
10 $m\angle 3 = (2x + 23)^\circ$

$m\angle 4 = (5x - 112)^\circ$



نظريات — نظريات الزاوية القائمة

أضف إلى مطويتك

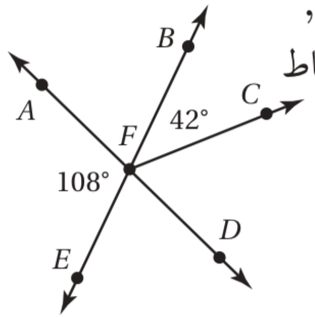
	النظرية	مثال
1.9	يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونان أربع زوايا قائمة. **مثال:** إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$، فإن $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة	
1.10	جميع الزوايا القائمة متطابقة. **مثال:** إذا كانت $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$، جميعها قائمة، فإن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$.	
1.11	المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة. **مثال:** إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 2 \cong \angle 4,$ $\angle 3 \cong \angle 1, \angle 4 \cong \angle 3$	
1.12	إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال:** إذا كانت $\angle 6 \cong \angle 5$، وكانت $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتين، فإن $\angle 5$ و $\angle 6$ قائمتان.	
1.13	إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، وكانتا متطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال:** إذا كانت $\angle 7$ و $\angle 8$ متجاورتين على مستقيم، وكانت $\angle 8 \cong \angle 7$ فإن $\angle 7$ و $\angle 8$ قائمتان.	

بسمه math

اثبات علاقات بين الزوايا

مثال تقويمي

30) في الشكل المجاور إذا كانت النقاط E, F, B تقع على استقامة واحدة، وكذلك النقاط D, F, A ، فأوجد قياس $\angle CFD$



A $66°$ **C** $108°$

B $72°$ **D** $138°$

التاريخ : /. /١٤٤٤ هجري

مثال تقويمي

31) إذا كانت النسبة بين قياسَي زاويتين متتامتين هي 4:1 فما قياس الزاوية الصغرى؟

A $15°$ **C** $24°$

B $18°$ **D** $36°$

التاريخ : /. /١٤٤٤/ هجري

الواجب المنزلي

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

استراتيجية التعلم باللعب

بسمة math

حسابات
مصممة العرض

حسابات
مجموعة رفعة الرياضيات