3 - 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

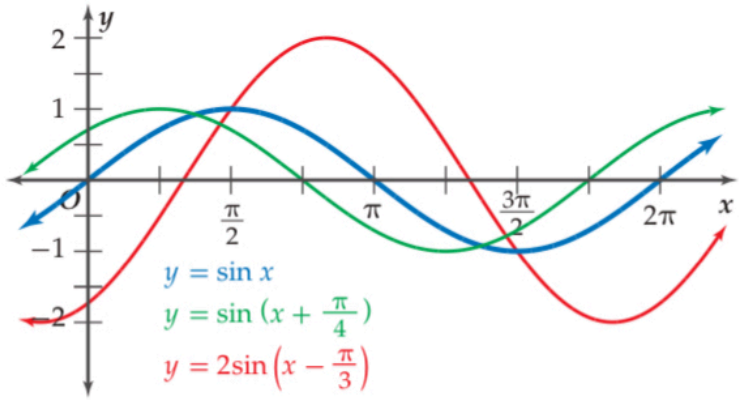
3 - 3 المتطابقات المثلثية
لمجموع زاويتين والفرق بينهما

لماذا؟

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟

تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا.

ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.



متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمّن جمع الزاويتين x , $\frac{\pi}{4}$. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin (60° - 45°)$.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

مقطع توضيحي 💡

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

مفهوم أساسي

متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

متطابقات الفرق

- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة :

كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين 0° , 360°، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ وَ $60°$ يساوي $105°$، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$105° = 60° + 45°$ $\quad \sin 105° = \sin (60° + 45°)$

متطابقة المجموع $\quad = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

عوّض $\quad = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

بسّط $\quad = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos (-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$-120° = 60° - 180°$ $\quad \cos (-120°) = \cos (60° - 180°)$

متطابقة الفرق $\quad = \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180°$

عوّض $\quad = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$

بسّط $\quad = -\frac{1}{2}$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 3 المتطابقات المثلثية
لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تحقق من فهمك

(1A $\sin 15°$

(1B $\cos(-15°)$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

a $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

الطرف الأيسر	$\cos(90° - \theta)$
متطابقة الفرق	$= \cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta$
عوّض	$= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$
بسّط	$= \sin\theta$ ✓
	= الطرف الأيمن

b $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

الطرف الأيسر	$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
متطابقة المجموع	$= \sin\theta \cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{2}$
عوّض	$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$
بسّط	$= \cos\theta$ ✓
	= الطرف الأيمن

@Hudali_math

3 - 3 المتطابقات المثلثية
لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تحقق من فهمك

3A $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

3B $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

1) $\cos 165°$

2) $\cos 105°$

3) $\cos 75°$

4) $\cos \frac{\pi}{12}$

@Hudali_math

3 - 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(10 $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

(11 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

مسائل مهارات التفكير العليا

29) تبرير: بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

@Hudali_math

3 - 3 المتطابقات المثلثية
لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تدريب على اختبار

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة:
$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$
B $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C $\frac{2}{\sqrt{3}}$
D $\sqrt{3}$

44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان $\cos\theta + 0.3 = 0$ ، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$.

3 – 3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

(3 – 3) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

اسم الطالب :..... **الشعبة :** .....

اختر الإجابة الصحيحة:

1 القيمة الدقيقة لـ $\cos 165$:

A	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	C	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	D	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

2 القيمة الدقيقة لـ $\sin(-210^\circ)$:

A	$\frac{1}{2}$	B	$-\frac{1}{2}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 $\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) =$

A	$-\csc\theta$	B	$\csc\theta$	C	$\cot\theta$	D	$-\cot\theta$

أكمل الفراغات التالية :

1 القيمة الدقيقة لـ $\tan 195^\circ$ .....

2 $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$ = ...

@Hudali_math

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :