3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس3-3)

والآن:

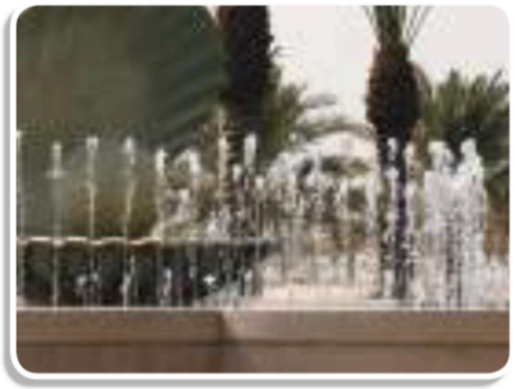
- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

لماذا؟



تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta, H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

@Hudali_math

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin (A + B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ، أو $\sin 2\theta$، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos (A + B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ، أو $\cos 2\theta$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مقطع توضيحي 💡

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مثال 1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، فإننا نجد $\cos\theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$	عوّض $\sin\theta = \frac{2}{3}$
$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$	ربّع ثم اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$	خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	متطابقة ضعف الزاوية
$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$	$\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$	اضرب

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$.

@Hudali_math

3 – 4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $0° < \theta < 90°$ ؛ $\sin \theta = \frac{2}{3}$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\sin \theta$, $\cos \theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ متطابقة ضعف الزاوية

$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ $\sin \theta = \frac{2}{3}$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{1}{3}; 90° < \theta < 180°$:

2A $\cos 2\theta$

2B $\tan 2\theta$

@Hudali_math

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta\neq-1$$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ في إيجاد جيب نصف الزاوية θ أو $\sin\frac{\theta}{2}$، كما يمكن استعمال المتطابقة $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$ في إيجاد جيب تمام نصف الزاوية θ أو $\cos\frac{\theta}{2}$.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مقطع توضيحي 💡

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin\theta = -\frac{4}{5}$، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	استعمل متطابقة فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$	$\sin\theta = -\frac{4}{5}$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$	$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	متطابقة نصف الزاوية
$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$	$\cos\theta = -\frac{3}{5}$
$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$	بسّط
$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$	بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ وَ $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ وَ $135°$. إذن، $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

@Hudali_math

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تحقق من فهمك

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة

أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

3) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}$، θ تقع في الربع الثاني.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$.

الطرف الأيمن

$$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$$

اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sin\theta$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

اضرب في $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 1$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

اضرب

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$$ ✓

= الطرف الأيسر

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

@Hudali_math

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 3-1)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin \frac{\pi}{8}$

9) $\cos 15°$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مسائل مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ: يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لِـ : $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

سعيد

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$

$$= 0.5$$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

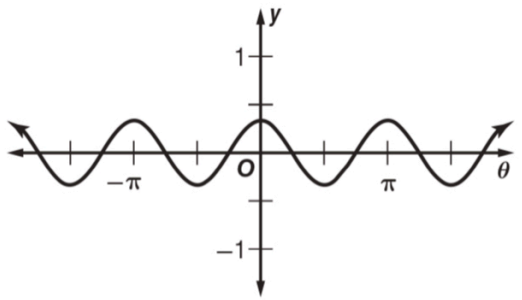
تدريب على اختبار

43) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $0 < \theta < 90°$ ؛ $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ **B** $\sqrt{3} - 2$

C $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D** $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي :

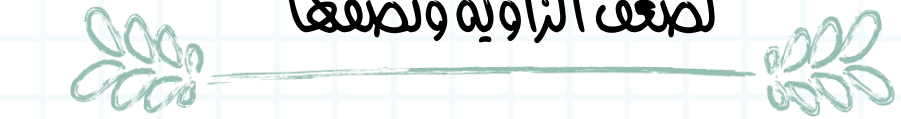


A $y = 3 \cos 2\theta$ **B** $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$

C $y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$ **D** $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$

@Hudali_math

3 – 4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها



(3 – 4) المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

اسم الطالب :..... الشعبة : .....

اختر الإجابة الصحيحة:

1 اذا كانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ تساوي :

A $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C $\frac{-7}{25}$ D $\frac{-24}{25}$

2 اذا كان $270^\circ < \theta < 360^\circ$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\sin2\theta$ هي :

A $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$ B $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C $\frac{-7}{25}$ D $\frac{-24}{25}$

3 $= \frac{1-\cos2\theta}{\sin2\theta}$

A $\sin\theta$ B $\tan\theta$ C $\cos\theta$ D $\cot\theta$

أكمل الفراغات التالية :

1 اذا كان $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\tan\theta = \frac{-8}{15}$ فإن قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$ .....

2 اذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-15}{17}$ فإن قيمة $\cos2\theta$ .....

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :