3 - 5 حل المعادلات المثلثية

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية.
(الدروس من 2 – 3 إلى 4 – 3)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية

trigonometric equations

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t .$$

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

مقطع توضيحي
حل المعادلات 💡

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية

حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ ، إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$.

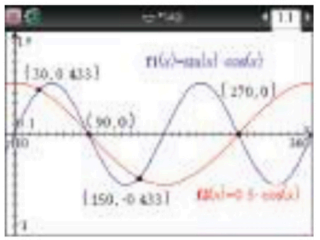
المعادلة الأصلية $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$

حلّل بأخذ عامل مشترك $\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$

$\theta = 90°$ أو $270°$ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

الزاوية المرجعية للزاوية $150°$ هي $30°$ $\theta = 30°$ أو $150°$



الحلول هي $30°, 90°, 150°$ فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$

التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin\theta\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}\cos\theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين $0°$ وَ $180°$ فقط.

b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

المعادلة الأصلية $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$

حلّل $(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$

خاصية الضرب الصفري $2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$

$2\sin\theta = -1$ $\sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما: $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

1A) حُل المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$، إذا كانت $0 \le x \le 2\pi$

1B) حُل المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$ بالراديان، أو $[0°\ ,\ 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

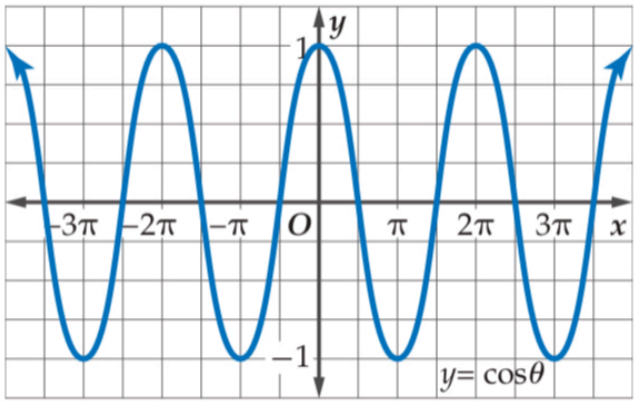
العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

مـثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي $\ldots, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ ، وكذلك $\ldots, -\pi, -3\pi, -5\pi, \ldots$، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π. طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

2A) حُل المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

الحلول الدخيلة : بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos \theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos \theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

مقطع توضيحي

حل المعادلات مع موجد حل

دخيل 💡

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$	المعادلة الأصلية
$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$	ربع
$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$	بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين
$0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$	حلّل
$2\cos\theta = 0$ أو $1 + \cos\theta = 0$	خاصية الضرب الصفري
$\cos\theta = 0$ أو $\cos\theta = -1$	
$\theta = 90°, 270°$ أو $\theta = 180°$	

التحقق:

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$
$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180°$
$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$
$0 = 0$ ✓

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$
$\sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$
$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$
$1 = 1$ ✓

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$
$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$
$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$
$-1 \neq 1$ ✗

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

4 $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$	المعادلة الأصلية
$2(1 + \tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$	خاصية التوزيع
$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$	اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر
$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$	حلّل
$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta = -1$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي : $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$ ؛حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك.
ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا.
واكتب حلولك بأبسط طريقة.

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو π، وهذا يبرر كتابة الحلول في الصورة:

$\theta = 60° + 180°k$

$\theta = 120° + 180°k$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

مقطع توضيحي
للزوايا الشهيرة 💡

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

(5A $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

(5B $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 5 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها

1) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0 \; ; 0° \le \theta \le 360°$

2) $2\cos^2\theta + \cos\theta = 1 \; ; 0° \le \theta \le 360°$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان:

5) $4 \sin^2 \theta - 1 = 0$

6) $2 \cos^2 \theta = 1$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2 \theta + 2 = 0$

10) $\sin^2 \theta - \sin \theta = 0$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 5 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي:

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

@Hudali_math

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

15) $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

16) $\tan \theta = 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

مسائل مهارات التفكير العليا

31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2 \sin\theta \cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هلا

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin\theta$$
$$\frac{2 \sin\theta \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$$
$$2 \cos\theta = 1$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 60°, 300°$$

ليلى

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin\theta$$
$$-\sin\theta = -\sin\theta$$
$$2 \cos\theta = 0$$
$$\cos\theta = 0$$
$$\theta = 90°, 270°$$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 - 3 حل المعادلات المثلثية

تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta \tan^2\theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ B $\frac{7\pi}{4}$ C 2π D $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَلّ المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟

A $30°$ أو $150°$ B $60°$ أو $120°$

C $210°$ أو $330°$ D $240°$ أو $300°$

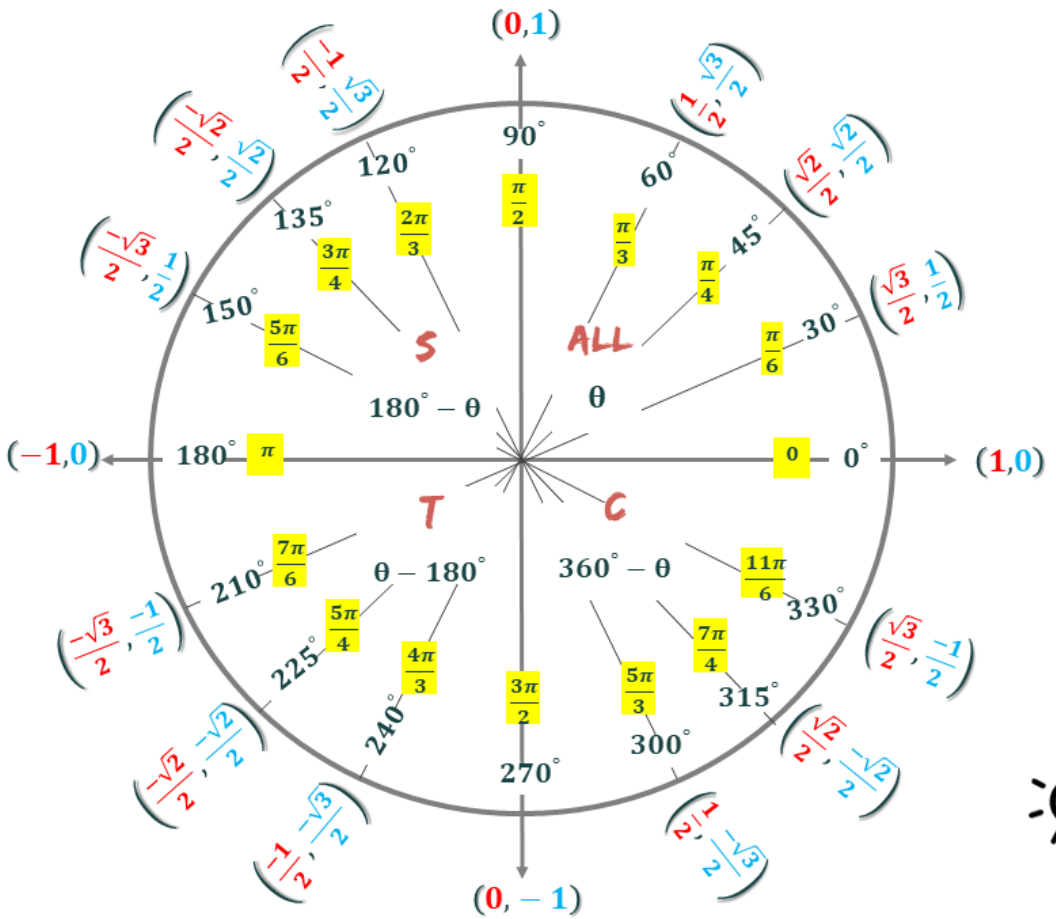
@Hudali_math

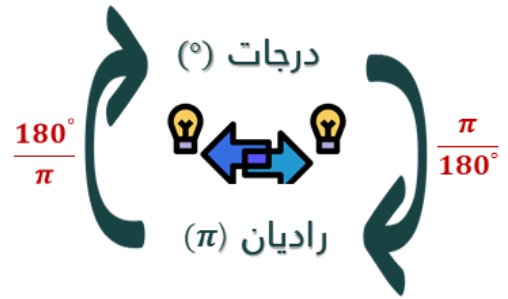
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

ملخص

الفصل الثالث / المتطابقات المثلثية

دائرة الوحدة

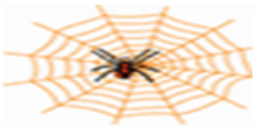




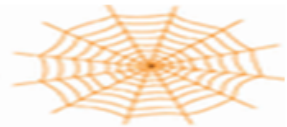
(cos , sin)

اكتشف كلمة السر للدوال المثلثية

اكتشف كلمة السر



اكتشف كلمة السر



$0^\circ < \theta < 90^\circ$ ، $2sin\theta\ cos\theta = sin\theta$	I	$tan(-\theta)$	G
$sin\theta\ sec\theta cot\theta$	U	$(1+cos\theta)(1-cos\theta)$	A
$cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$	I	$\frac{1-sin^2\theta}{cos\theta}$	E
$0^\circ < \theta < 180^\circ$ ، $3sin^2\theta - sin\theta = 0$	N	$cos75^\circ$	S

M ما قيمة $\cos\theta$ إذا كان $270^\circ < \theta < 360^\circ$ $\sin\theta = \frac{1}{4}$

الآن ضع الحرف المقابل للنتائج لتكتشف كلمة السر

-1	$cos\theta$	90°	60°	1	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

45°	$sin^2\theta$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$

كلمة السر

IAM GENIUS

@Hudali_math

5 – 3 حل المعادلات المثلثية

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

(5 – 3) حل المعادلات المثلثية

اسم الطالب :..... الشعبة : .....

اختر الإجابة الصحيحة:

1 اذا كانت $0^\circ < \theta < 360^\circ, -2sin^2\theta = 7 - 15sin\theta$ فإن حل المعادلة هو :

A	180°	B	$30^\circ, 150^\circ$	C	$60^\circ, 180^\circ$	D	30°

2 حل المعادلة $sin^2 2\theta + cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ :

A	$\frac{\pi}{2} + \pi k$	B	$\frac{\pi}{3} + \pi k$	C	$\frac{2\pi}{3} + \pi k$	D	$\frac{\pi}{5} + \pi k$

أكمل الفراغات التالية :

1 اذا كان قياس θ با الراديان فإن حل المعادلة $2cos^2\theta = 1$ .....

2 اذا كان قياس θ بالدرجات فإن حل المعادلة $cos2\theta - sin^2\theta + 2 = 0$ .....

@Hudali_math

جدول التعلم

	ماذا أعرف
	ماذا أريد أن أعرف
	ماذا تعلمت
	كيف أتعلم أكثر

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :