



تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 القطوع الزائدة

المفردات:

القطع الزائد

hyperbola

البؤرتان

foci

المركز

center

الرأسان

vertices

المحور القاطع

transverse axis

المحور المرافق

conjugate axis

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع
الناقصة والدوائر
وتمثيل منحنياتها بيانياً.
(الدرس 2-4)

والآن:

- أحل معادلات القطوع الزائدة، وأمثلها بيانياً.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

3-4 القطوع الزائدة

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقصٍ؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلاً، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجياً مفتوحاً من إحدى جهتيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمى قطوعاً زائدةً.

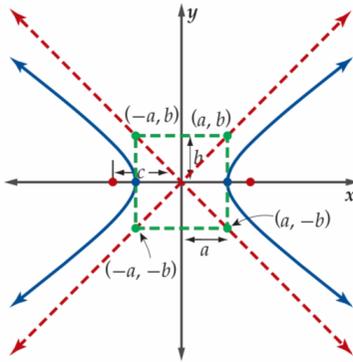


● ما وجه الاختلاف الرئيس بين القطع الزائد والقطوع المخروطية الأخرى؟

● أي من القطوع المخروطية التي درستها يمثل دالة؟

3-4 القطوع الزائدة

لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد
 $c^2 = a^2 + b^2$ ، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.

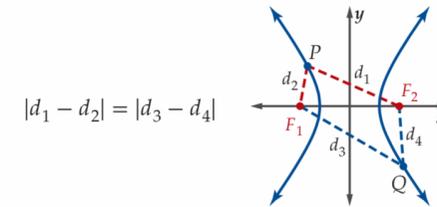


إرشادات للدراسة

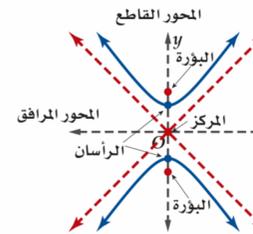
التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما $2b$ ، ويمسك القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما $2a$ ، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c$.

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً: القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً.



يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، ومركز القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، ورأسا القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.



للقطع الزائد محوراً تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.

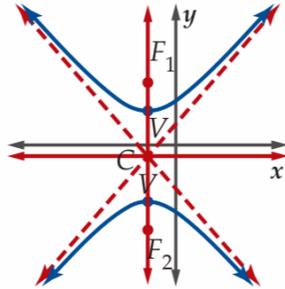
3-4 القطوع الزائدة

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

مفهوم أساسي خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

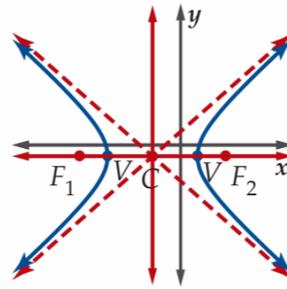
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع رأسي
المركز: (h, k)
الرأسان: $(h, k \pm a)$
البؤرتان: $(h, k \pm c)$
المحور القاطع: $x = h$ وطوله $2a$
المحور المرافق: $y = k$ وطوله $2b$
خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$
العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع أفقي
المركز: (h, k)
الرأسان: $(h \pm a, k)$
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
المحور القاطع: $y = k$ وطوله $2a$
المحور المرافق: $x = h$ وطوله $2b$
خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
طول البعد البؤري: $2C$



مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 القطوع الزائدة

مثال 1

تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16}$ ، ثمّ مثلّ منحناه بيانيّاً.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9 + 16} = 5$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x

الاتجاه: أفقي

$$(h, k)$$

$$(-1, -2)$$

المركز:

$$(h \pm a, k)$$

$$(2, -2), (-4, -2)$$

الرأسان:

$$(h \pm c, k)$$

$$(4, -2), (-6, -2)$$

البؤرتان:

خطا التقارب: $y + 2 = \frac{4}{3}(x + 1)$, $y + 2 = -\frac{4}{3}(x + 1)$, $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \quad , \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$$

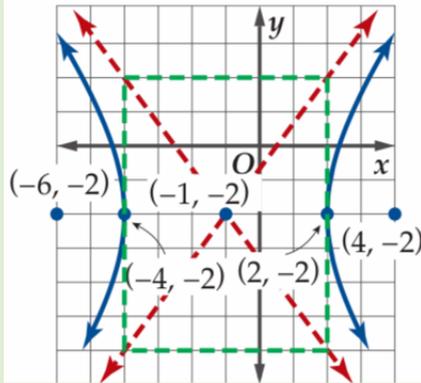
تنبيه!

عندما تمثّل منحني القطع الزائد بيانياً تذكر أن المنحنى سيقترّب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة!

اتجاه القطع الزائد

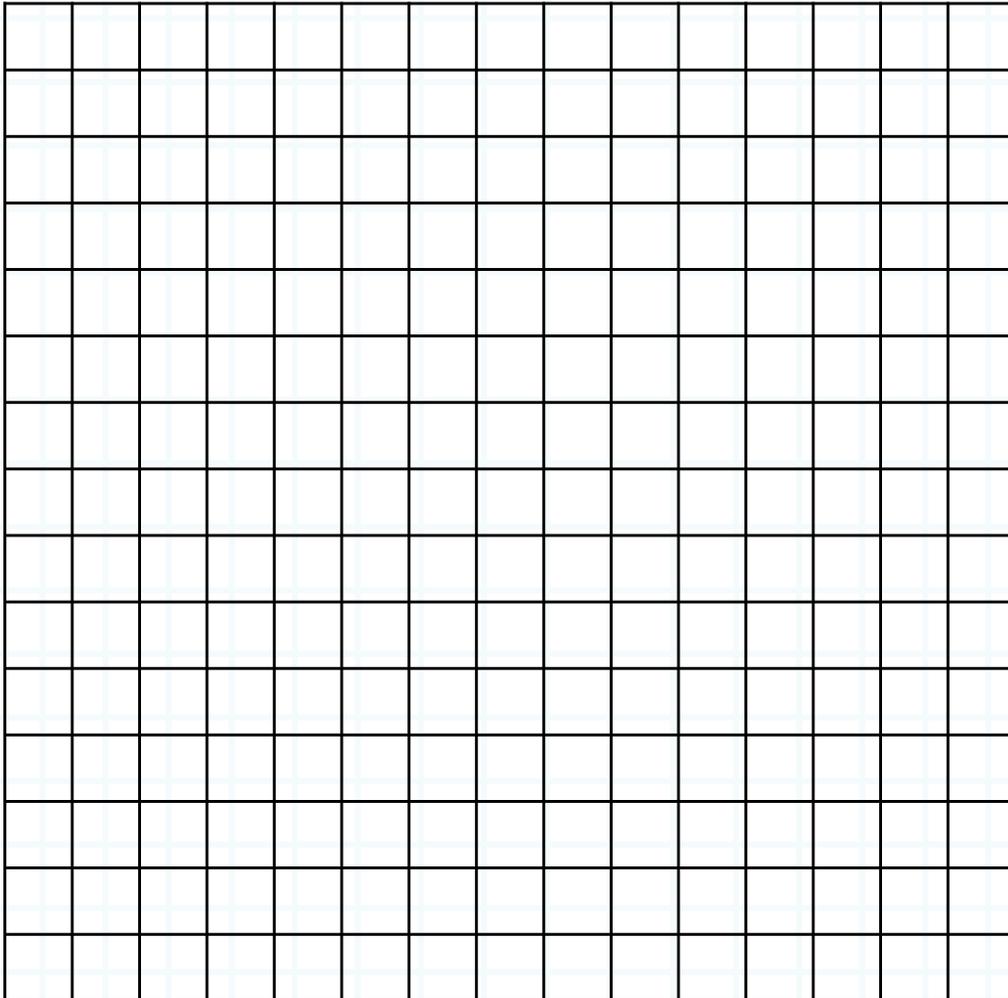
إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y ، فإن اتجاه القطع رأسي.



عيّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$ ، والبعد الآخر $2b = 8$ ، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثلّ القطع الزائد بيانياً بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصوراً بين امتداد قطريه.

3-4 القطوع الزائدة

تحقق من فهمك



$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \quad (1A)$$

الاتجاه

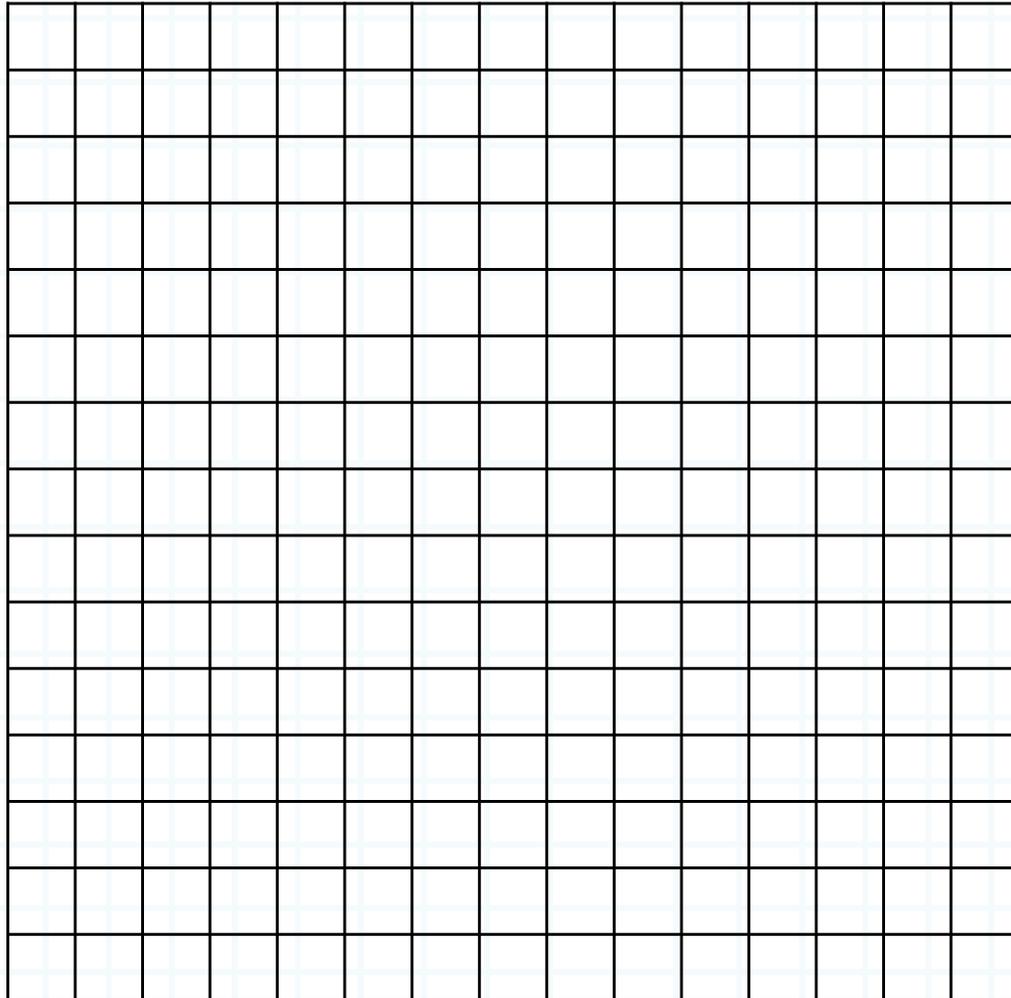
المركز

الرأسان

البؤرتان

خطا التقارب

3-4 القطوع الزائدة



$$\frac{(y + 4)^2}{64} - \frac{(x + 1)^2}{81} = 1 \quad (1B)$$

الاتجاه

المركز

الرأسان

البؤرتان

خطا التقارب

3-4 القطوع الزائدة

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

مثال 2

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدّد خصائصه ومثّل منحناه بيانياً.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

المعادلة الأصلية $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$

جمع الحدود المتشابهة $(25y^2 + 100y) + (-16x^2 + 96x) = 444$

حلّل $25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$

أكمل المربع $25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$

حلّل وبسط $25(y + 2)^2 - 16(x - 3)^2 = 400$

اقسم كلا الطرفين على 400 $\frac{(y + 2)^2}{16} - \frac{(x - 3)^2}{25} = 1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$.h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16 + 25} \approx 6.4$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائماً عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1.



تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 القطوع الزائدة



الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)

كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولونيوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طُوِّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

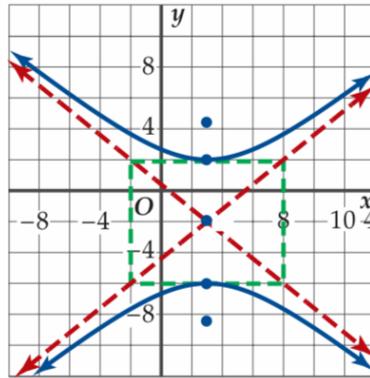
المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .

$$(h, k)$$

$$(h, k \pm a)$$

$$(h, k \pm c)$$

خطا التقارب: $y - (-2) = \frac{4}{5}(x - 3)$, $y - (-2) = -\frac{4}{5}(x - 3)$
 $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$, $y = \frac{4}{5}x - \frac{22}{5}$, $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$



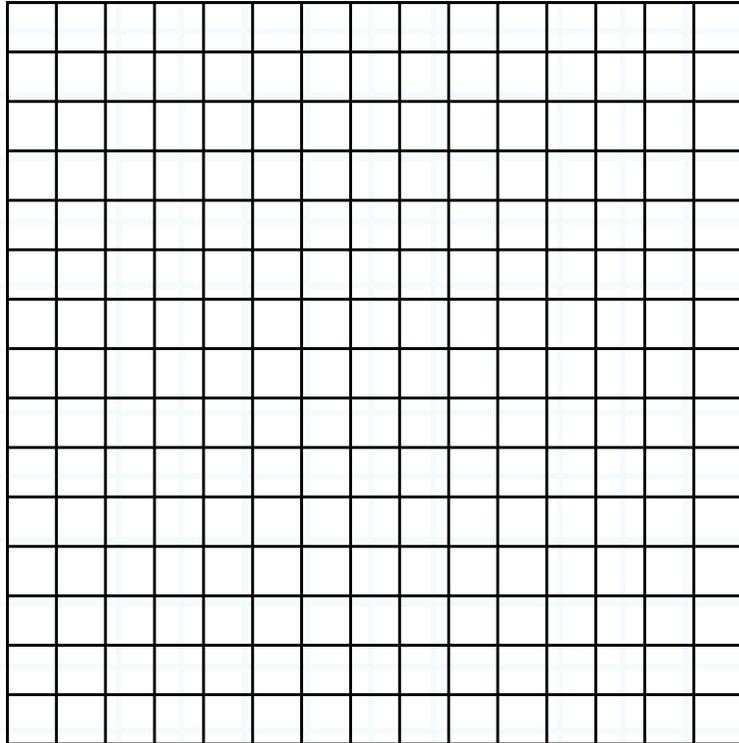
عيّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعديه $2a = 8$ والبعد الآخر $2b = 10$ وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطّي التقارب $2c = 12.8$ ، ثم مثل القطع الزائد بيانيًا، بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

3-4 القطوع الزائدة

تحقق من فهمك

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68 \quad (2A)$$

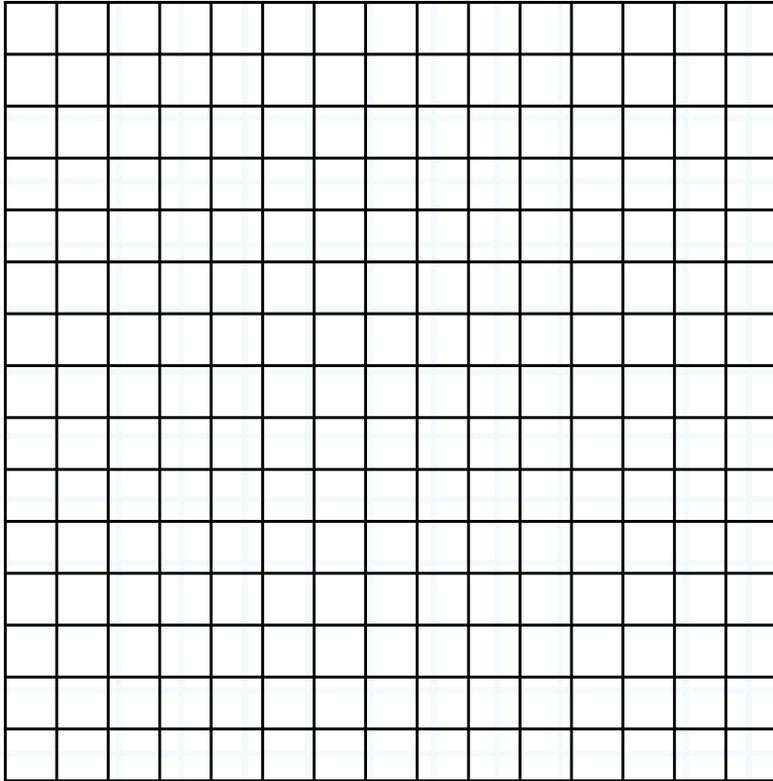
	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب



3-4 القطوع الزائدة

$$2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0 \quad (2B)$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب





مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 القطوع الزائدة

كتابة معادلة قطع زائد إذا علم بعض خصائصه

مثال 3

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلِّ ممَّا يأتي:

(a) الرأسان $(-3, 2)$ ، $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$ ، $(-3, -7)$.

بما أن إحداثي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a ، b ، c .

المركز: $(-3, -2) = \left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right)$
نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

$$a = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (-6 - (-2))^2} = 4$$

المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$$c = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (3 - (-2))^2} = 5$$

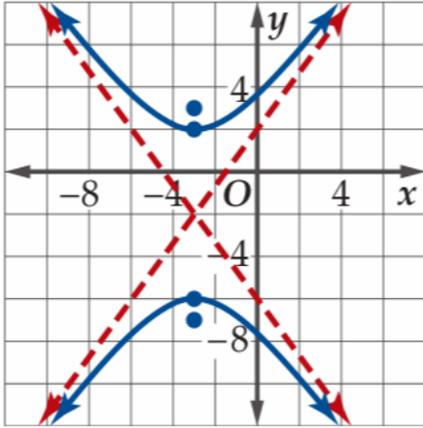
المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad b = 3$$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

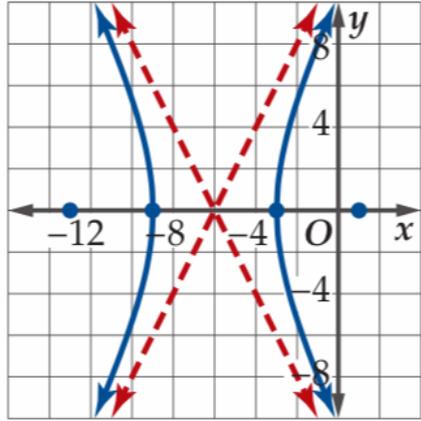
$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

انظر الشكل 4.3.1.



الشكل 4.3.1

3-4 القطوع الزائدة



الشكل 4.3.2

(b) الرأسان $(-3, 0)$ ، $(-9, 0)$ ، وخطا التقارب $y = 2x - 12$ ، $y = -2x + 12$.

بما أن إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $(-6, 0) = \left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

المسافة بين أي من الرأسين والمركز $a = 3$

ميل خطي التقارب: $\pm \frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

الميل الموجب لخط التقارب $\frac{b}{a} = 2$

$a = 3$ $\frac{b}{3} = 2$

بسّط $b = 6$

بما أن المحور القاطع أفقي، فإن a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. انظر الشكل 4.3.2.

3-4 القطوع الزائدة

تحقق من فهمك

3B البؤرتان $(2, -2)$ ، $(12, -2)$ ، وخطا التقارب $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$ ، $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$.

3A الرأسان $(3, 2)$ ، $(3, 6)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3-4 القطوع الزائدة

مثال 4

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36}$.
حدّد أولاً قيمة c ثم الاختلاف المركزي.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{العلاقة بين } a, b, c$$

$$c^2 = 48 + 36 \quad a^2 = 48, b^2 = 36$$

$$c = \sqrt{84} \quad \text{بسّط}$$

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريباً.

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{صيغة الاختلاف المركزي}$$

$$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}} \quad a = \sqrt{48}, c = \sqrt{84}$$

$$\approx 1.32 \quad \text{بسّط}$$



3-4 القطوع الزائدة

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

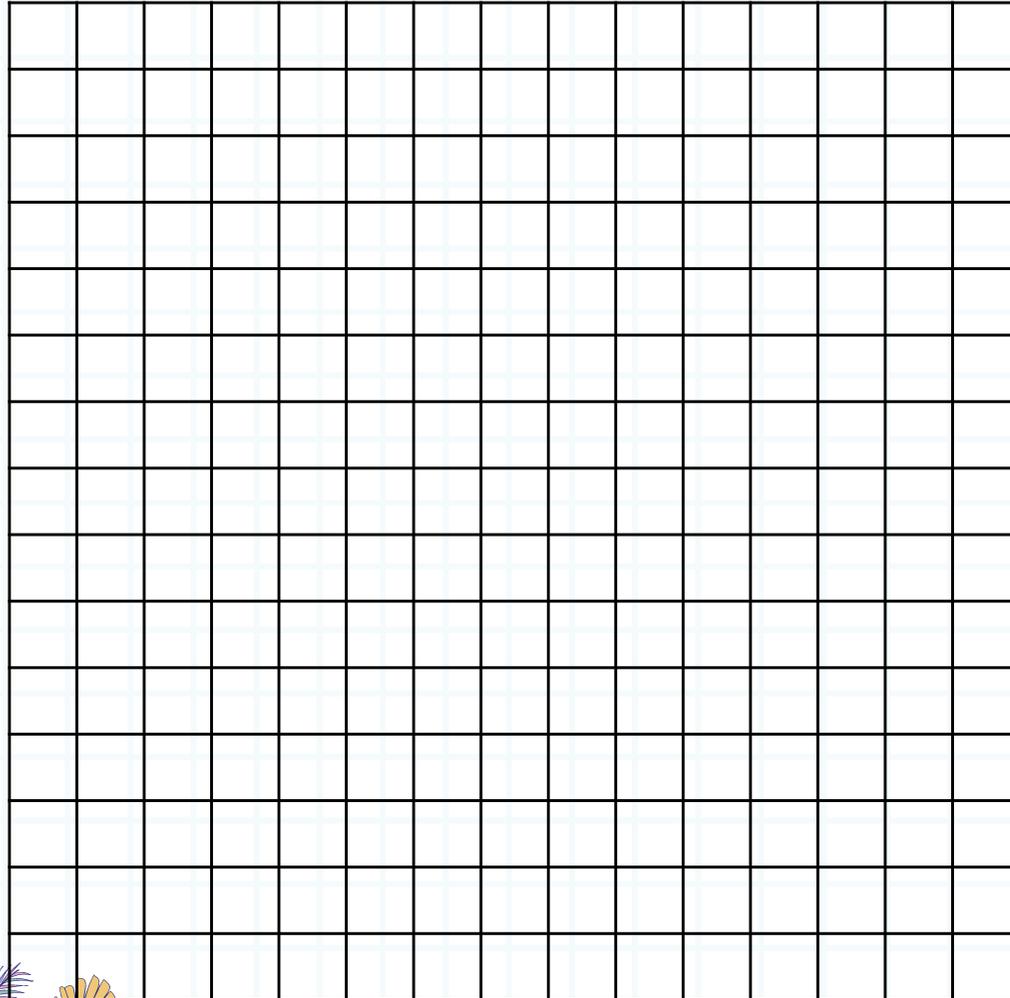
$$\frac{(y - 2)^2}{15} - \frac{(x + 9)^2}{75} = 1 \quad (4B)$$

$$\frac{(x + 8)^2}{64} - \frac{(y - 4)^2}{80} = 1 \quad (4A)$$

3-4 القطوع الزائدة

تدرب وحل المسائل

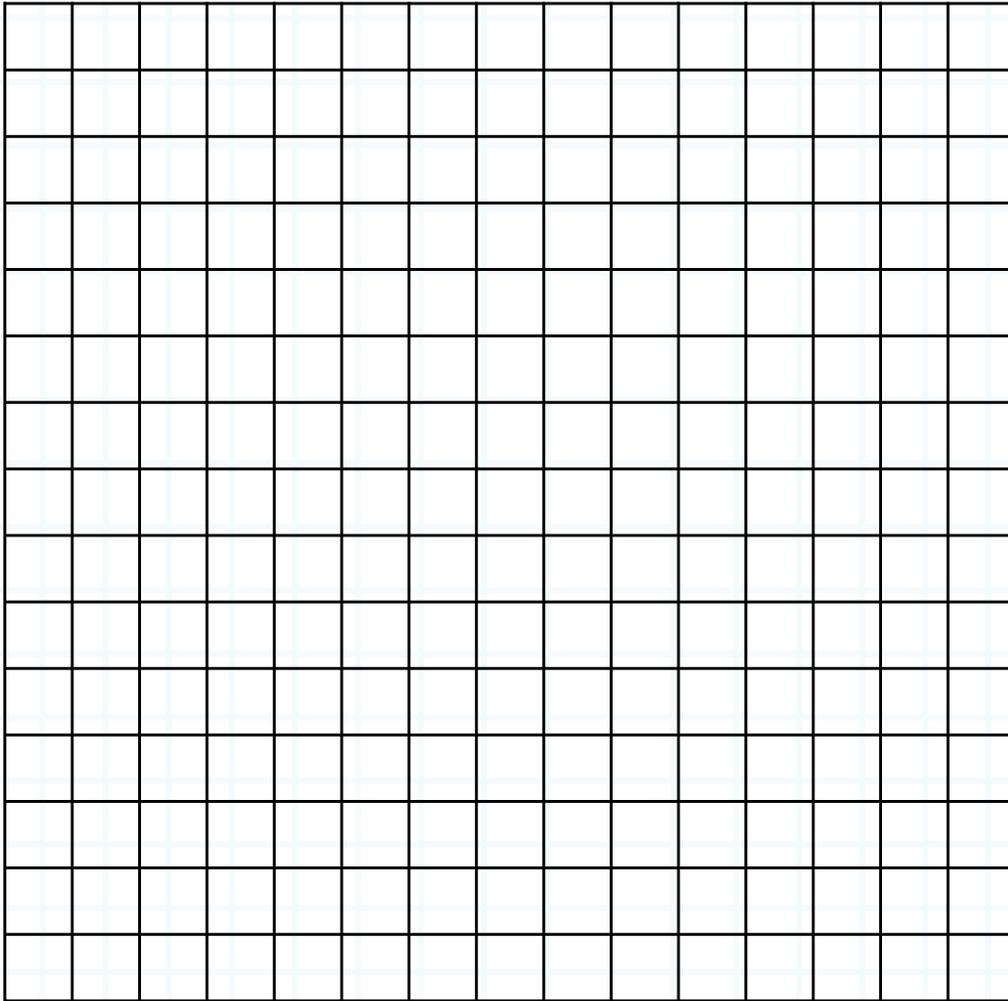
حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل
منحناه بيانياً: (مثال 1)



$$(1) \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب

3-4 القطوع الزائدة



$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1 \quad (2)$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب

3-4 القطوع الزائدة

تدرب وحل المسائل

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثل منحناه بيانياً: (مثال 2)

$$x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27 \quad (8)$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب

3-4 القطوع الزائدة

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:
(مثال 3)

14 الرأسان $(-5, 5)$, $(7, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5)$, $(11, 5)$.

13 البؤرتان $(-1, -7)$, $(-1, 9)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.



تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 القطوع الزائدة

$$\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1 \quad (21)$$

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:
(مثال 4)

3-4 القطوع الزائدة

تدريب على اختبار

48 سؤال ذو إجابة قصيرة: أوجد معادلي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1}$

47 مراجعة: يمثل منحنى $1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

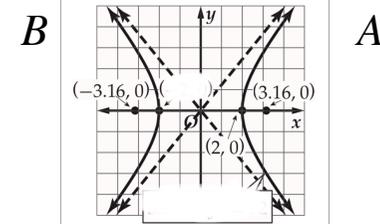
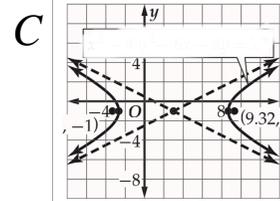
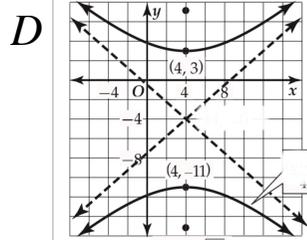
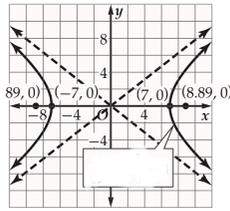
C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

3-4 القطوع الزائدة

اختر الإجابة الصحيحة:

1 التمثيل البياني الصحيح للقطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64}$:



2 معادلة القطع الزائد التي تحقق الخصائص (البؤرتان $(-1, 9), (-1, -7)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحده) هي :

A $1 = \frac{(y+1)^2}{15} - \frac{(x-1)^2}{49}$ B $1 = \frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49}$ C $1 = \frac{(y-5)^2}{64} + \frac{(x-1)^2}{36}$ D $1 = \frac{(y+5)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{36}$

3 الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13}$:

A 0.2 B 4.67 C 2.34 D 1.52

أكمل الفراغات التالية :

1 خط التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17}$

2 رأس القطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36}$



تطوير - إنتاج - توثيق

3-4 القطوع الزائدة

قصاحات القطع الناقص والزائد

(0, 3)

(4, -2)

(3, 2)

(6, -3)

(0, -3)

(3, -4)

(6, -2)

إحداثيات مركز القطع الناقص

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

إحداثيات البؤرتان للقطع الزائد

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

ضعي القصاحات بظنك
المناسب لها



$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$$

يكون رأساه هما:

$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

يكون رأساه اطرافان هما:

إحداثيات مركز القطع الناقص

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

(6, -3)

إحداثيات البؤرتان للقطع الزائد

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

(0, 3)

(0, -3)

إحداثيات مركز القطع الناقص

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

(-1, -2)

(-1, 2)

إحداثيات البؤرتان للقطع الزائد

$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

(3, -4)

(3, 2)

3-4 القطوع الزائدة

**تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات**

الحسابات الالكترونية :

