الاتصال والنهايات

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

فيما سبق :

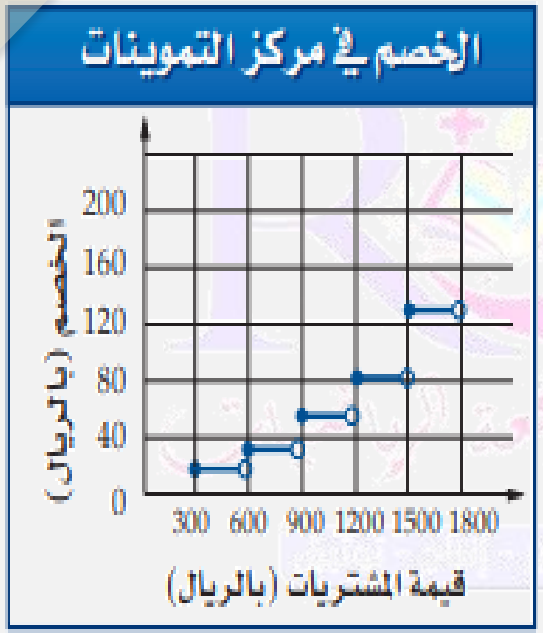
درست إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني

والآن :

- استعمل النهايات للتحقق من اتصال دالة ، واطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة .
- استعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة .

الاتصال والنهايات
1-3

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



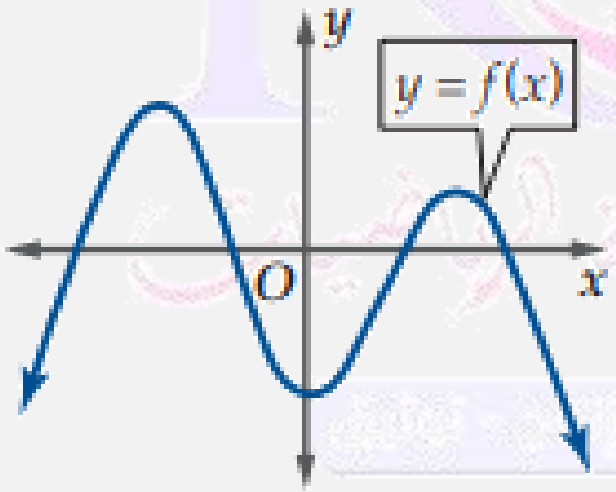
لماذا ؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=900$, $x=600$.

مفهوم الاتصال

الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

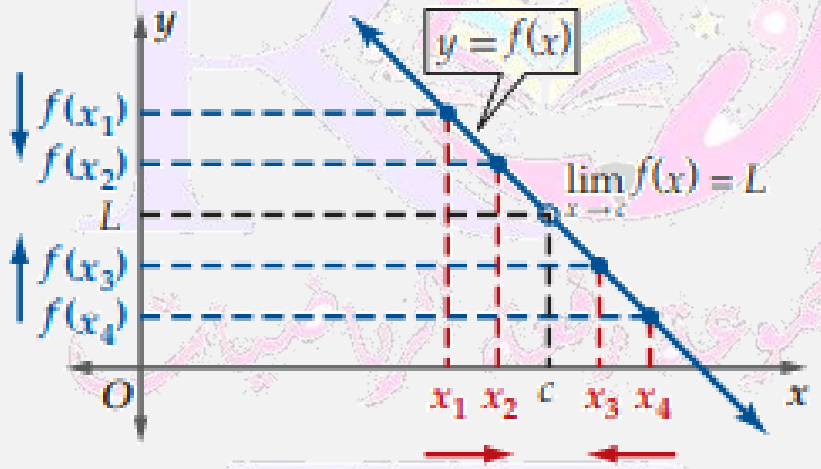
1+2=3

مفهوم أساسي

النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

الرموز: نقول: إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .



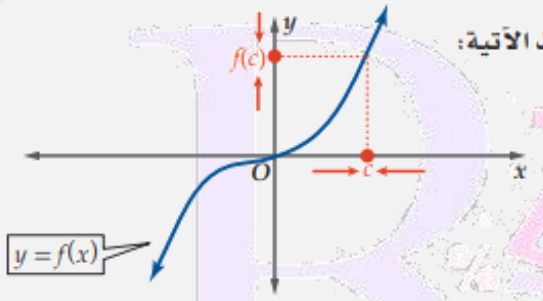
اختبار الاتصال

ملخص المفهوم

اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.



إرشادات للدراسة

النهايات:

إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال1

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

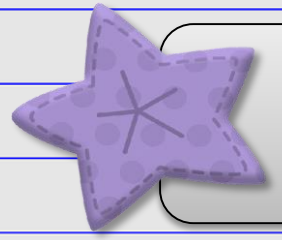
يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

3) هل $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

التحقق من الاتصال عند نقطة

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



تحقق من فهمك

(1A $f(x) = x^3$

(1B $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

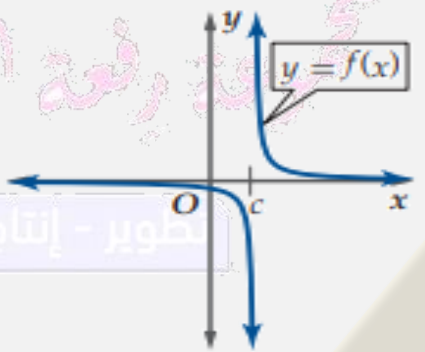
1+2=3

مفهوم أساسي

أنواع عدم الاتصال

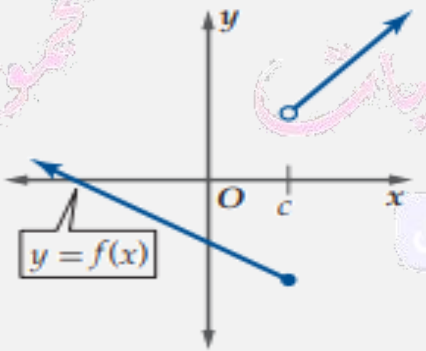
للدالة عدم اتصال لانهائي عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



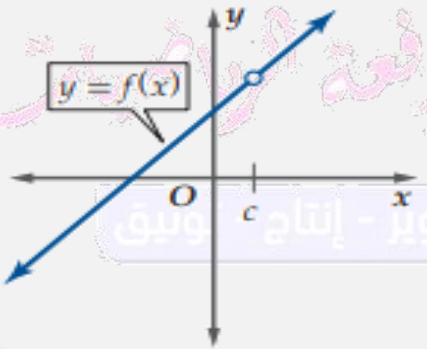
للدالة عدم اتصال قفزي عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة عدم اتصال قابل لإزالة عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مقطع توضيحي

مثال2

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

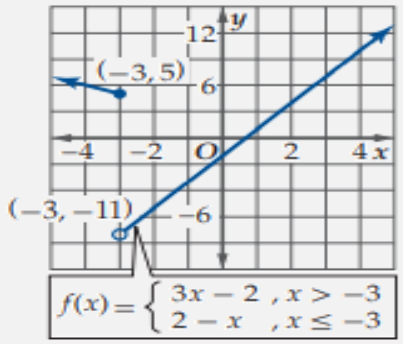
a) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \quad x>-3\\ 2-x & , \quad x\le -3\end{cases}$ عند $x=-3$.

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3)=5$.

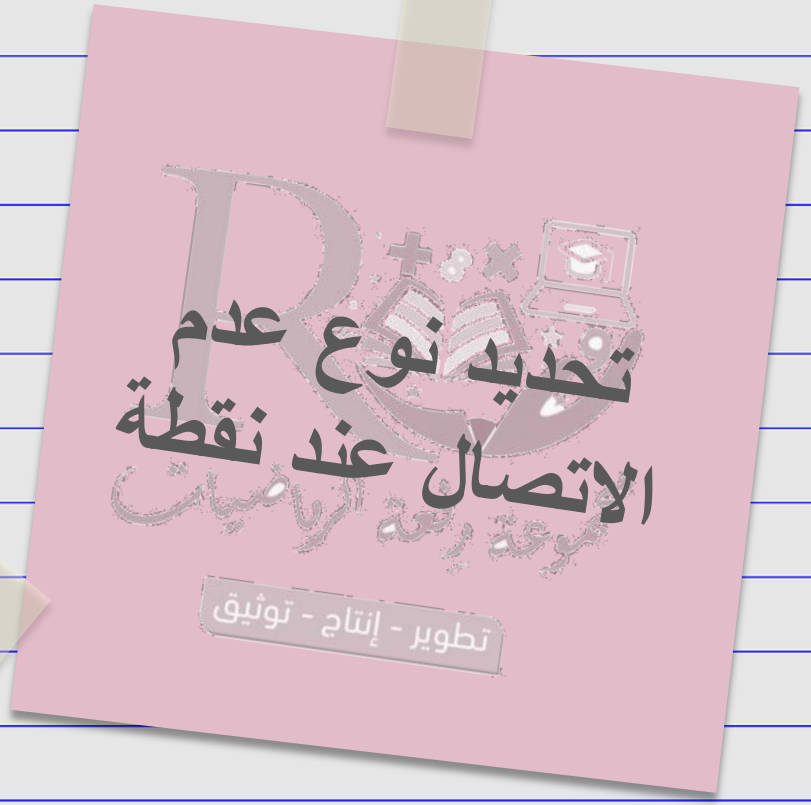
2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x=-3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x=-3$.



الشكل 1.3.2



مثال2

b) $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=-3, x=3$.

عند $x=3$

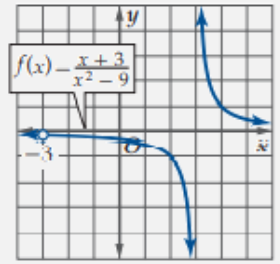
1) $f(3)=\frac{6}{0}$، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x=3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة.

3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x=3$؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.



الشكل 1.3.3

تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 2

عند $x = -3$

1) $f(-3) = \frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3.

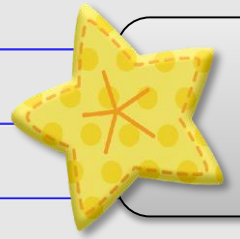
x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim_{x \to -3} f(x) \approx -0.167$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = -3$. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



تحقق من فهمك

(2A $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

(2B $f(x)=\begin{cases}5x+4 & , \quad x>2\\ 2-x & , \quad x\le 2\end{cases}$ ، عند $x=2$

تدرب

1) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ، عند $x=-5$.

3) $h(x)=\dfrac{x^2-36}{x+6}$ ، عند $x=-6, x=6$.

7) $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & , \quad x\le -6 \\ -x+2 & , \quad x>-6 \end{cases}$ ، عند $x=-6$.

شروط اتصال دالة $x = c$:

1. $f(c)$ موجودة
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة ، حيث: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

حالات عدم اتصال الدالة

قابل للإزالة

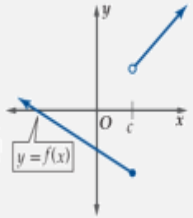
إذا تحققت الحالة التالية :

$$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$

قفزي

إذا تحققت الحالة التالية :

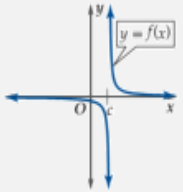
$$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$

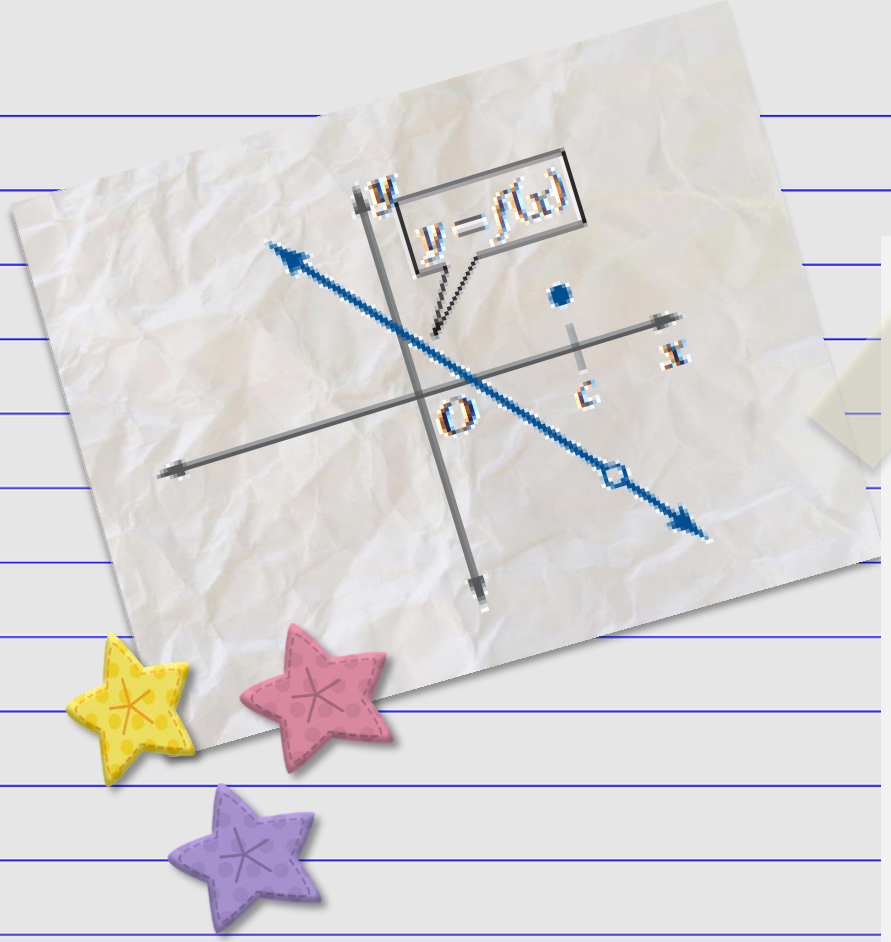


لا نهائي

إذا تحققت الحالة التالية :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$





لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

بسمة math

مثال3

أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$؛ لتصبح متصلة عند $x=4$.

1) $f(4)=\frac{0}{0}$، أي أن $f(4)$ غير موجودة.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

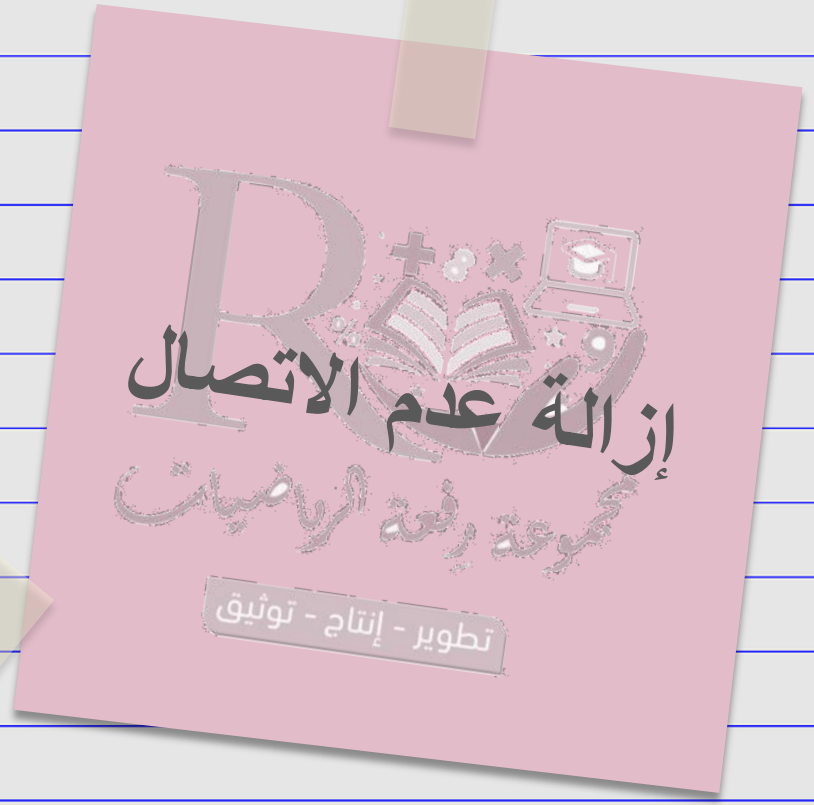
يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x\to4} f(x)=8$.

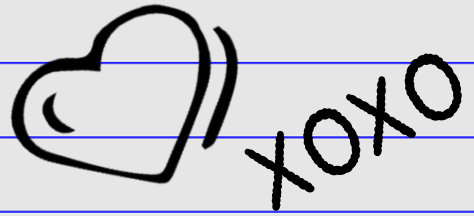
3) $f(x)$ غير متصلة عند $x=4$؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x\to4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=4$

4) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=4$، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4}, & x\neq 4\\ 8, & x=4\end{cases}$$

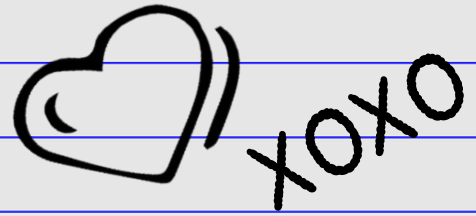
لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x=4$؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8





تحقق من فهمك

3) أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x=1$.



تـــــدرب

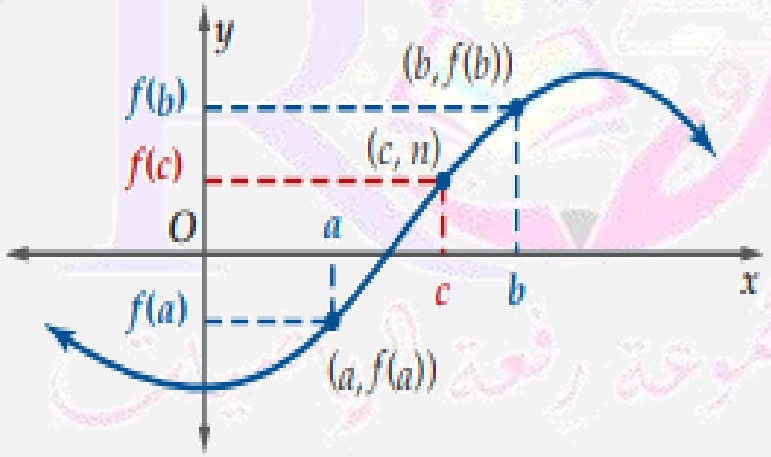
$x = -3$ ، $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ (9

1+2=3

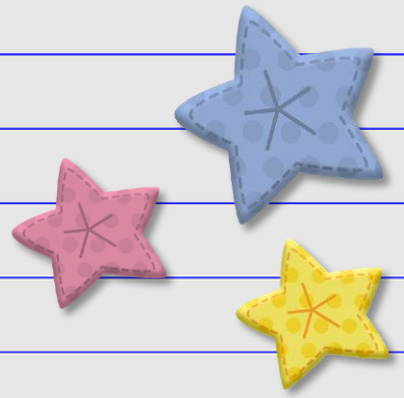
نظرية

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b، بحيث $f(c) = n$.



نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b.



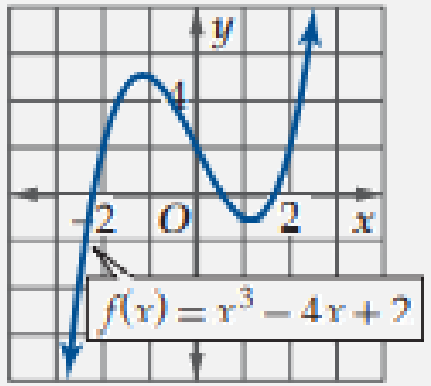
مقطع توضيحي

مثال4

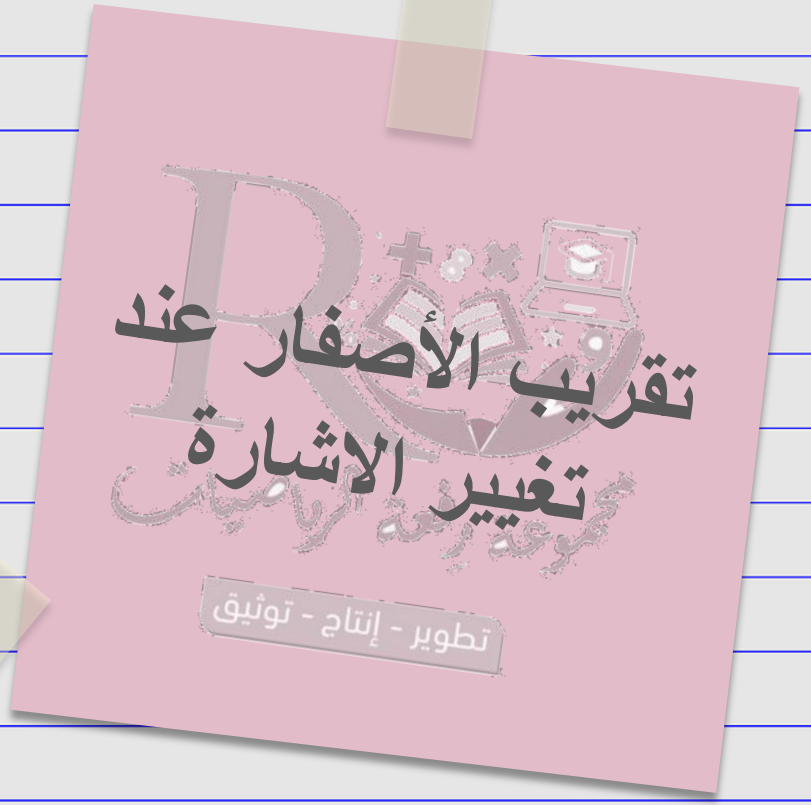
حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -2 و -3. لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 وَ -2، والعددين 0 وَ 1 والعددين 1 وَ 2. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.



الشكل 1.3.4



تحقق من فهمك

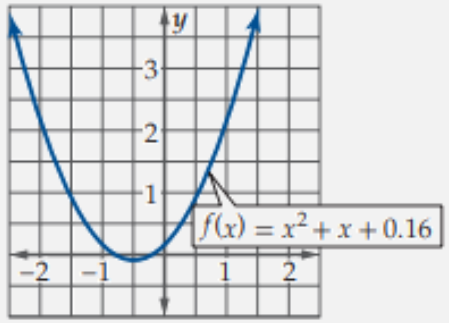
(4A $[-6, 4]$ ،$f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$

(4B $[-3, 4]$ ،$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$

مثال 5

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

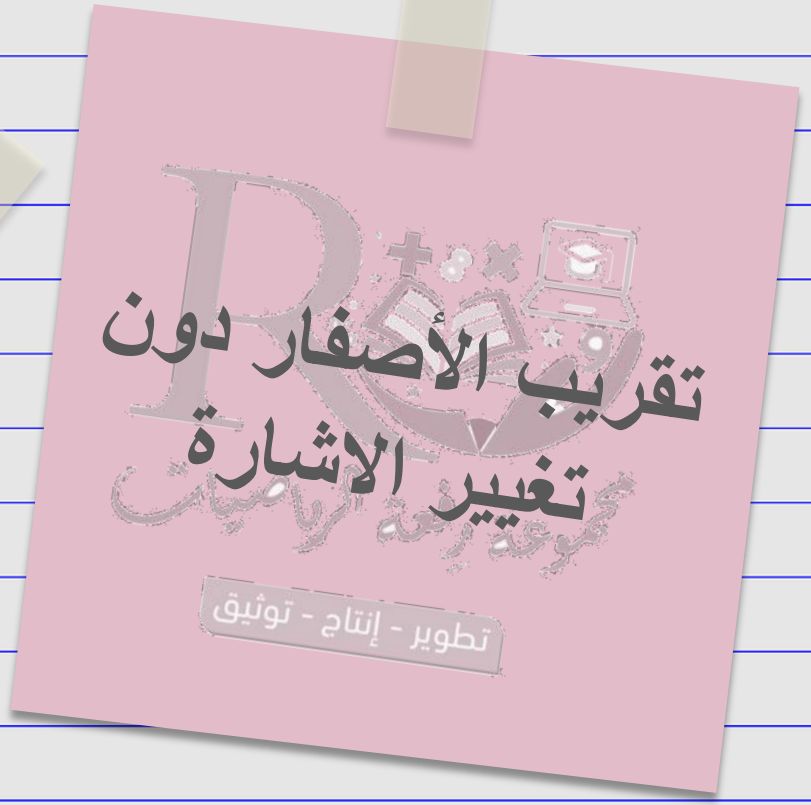


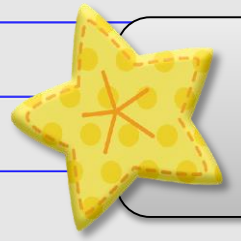
تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0. مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.

يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

إرشاد تقني

قد يُظهر التمثيل البياني للدالة صفرًا واحدًا؛ لذا اختر التدريج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.





تحقق من فهمك

(5A $[-5, 5]$ ، $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$

(5B $[0, 4]$ ، $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

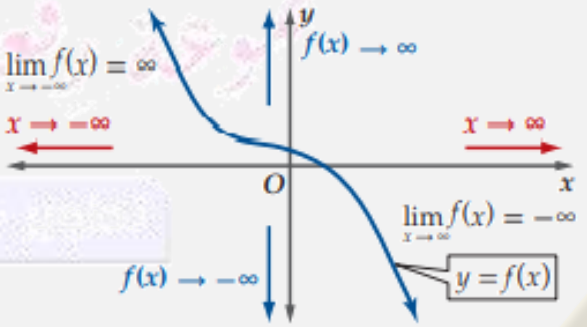
سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

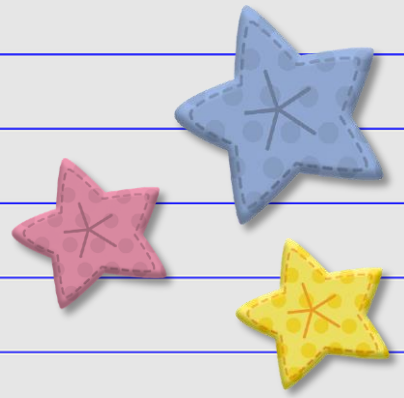
أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.



قراءة الرياضيات

النهايات:

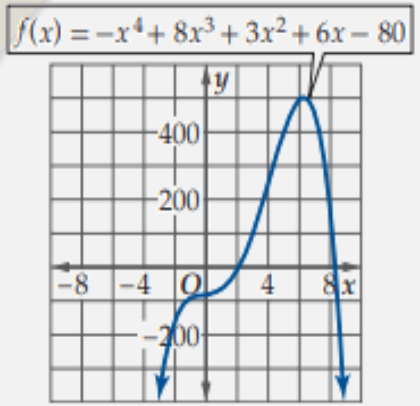
تقرأ العبارة $\lim_{x\to\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.



مقطع توضيحي

مثال6

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	-80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

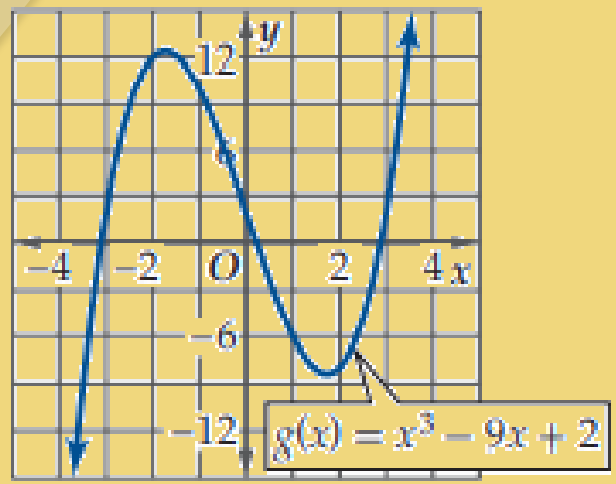
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

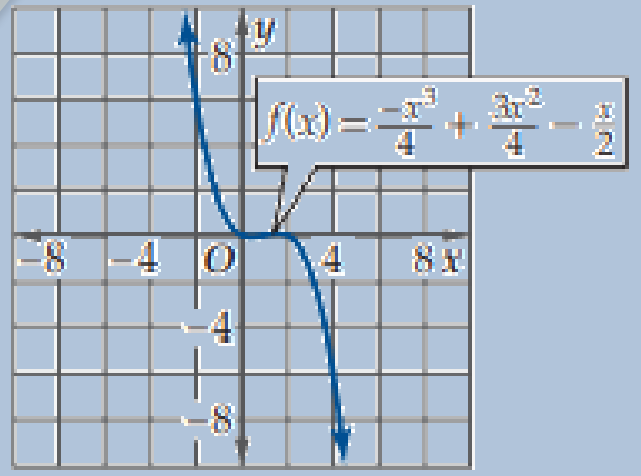
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(6A

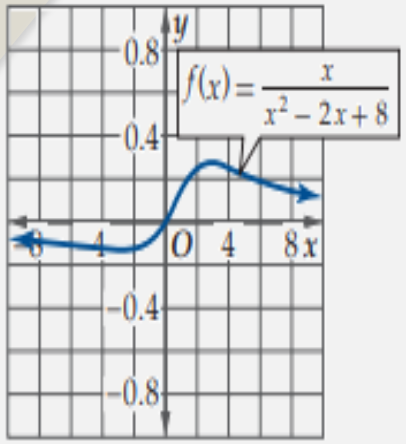


(6B



مثال7

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ وأن $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

التعزيز عدديًّا:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1\cdot10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1\cdot10^{-4}$

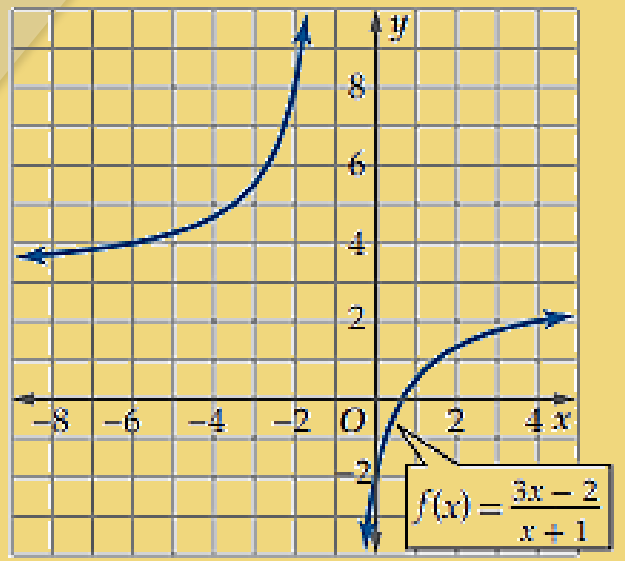
لاحظ أنه عندما $x\to-\infty$، فإن $f(x)\to0$ و عندما $x\to\infty$، فإن $f(x)\to0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

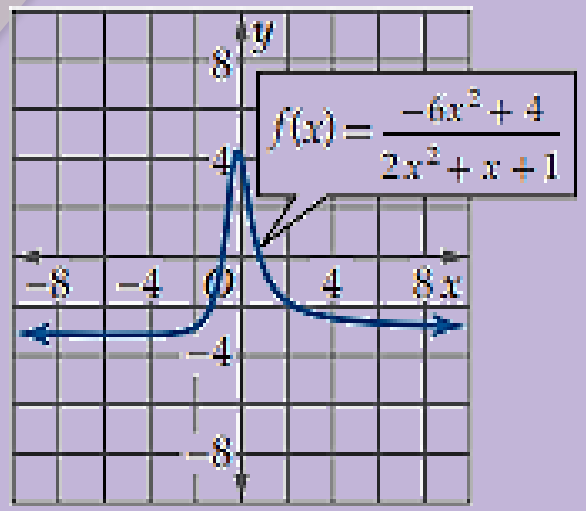
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

تحقق من فهمك

(7A

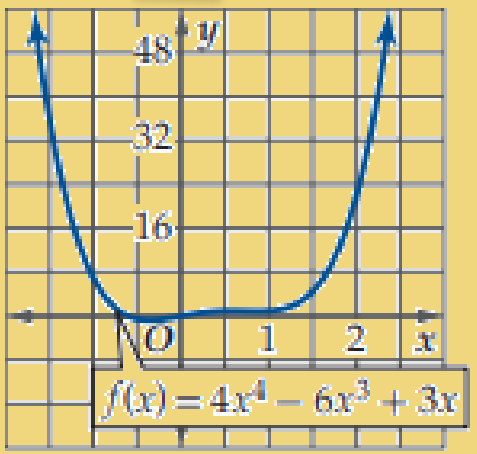


(7B

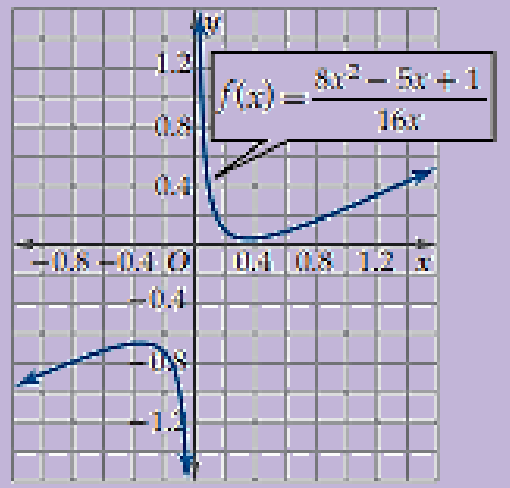


تـــــدرب

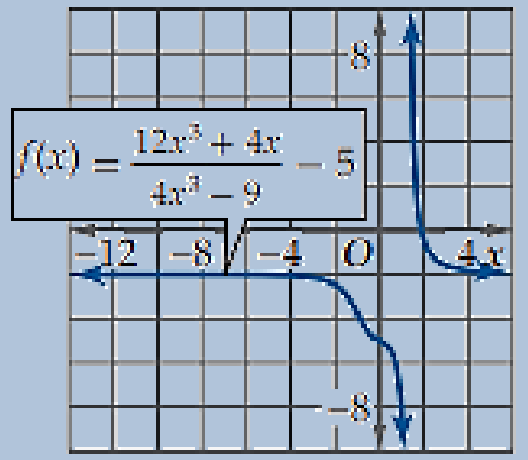
(17



(21



(22



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3

تـــــدرب

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

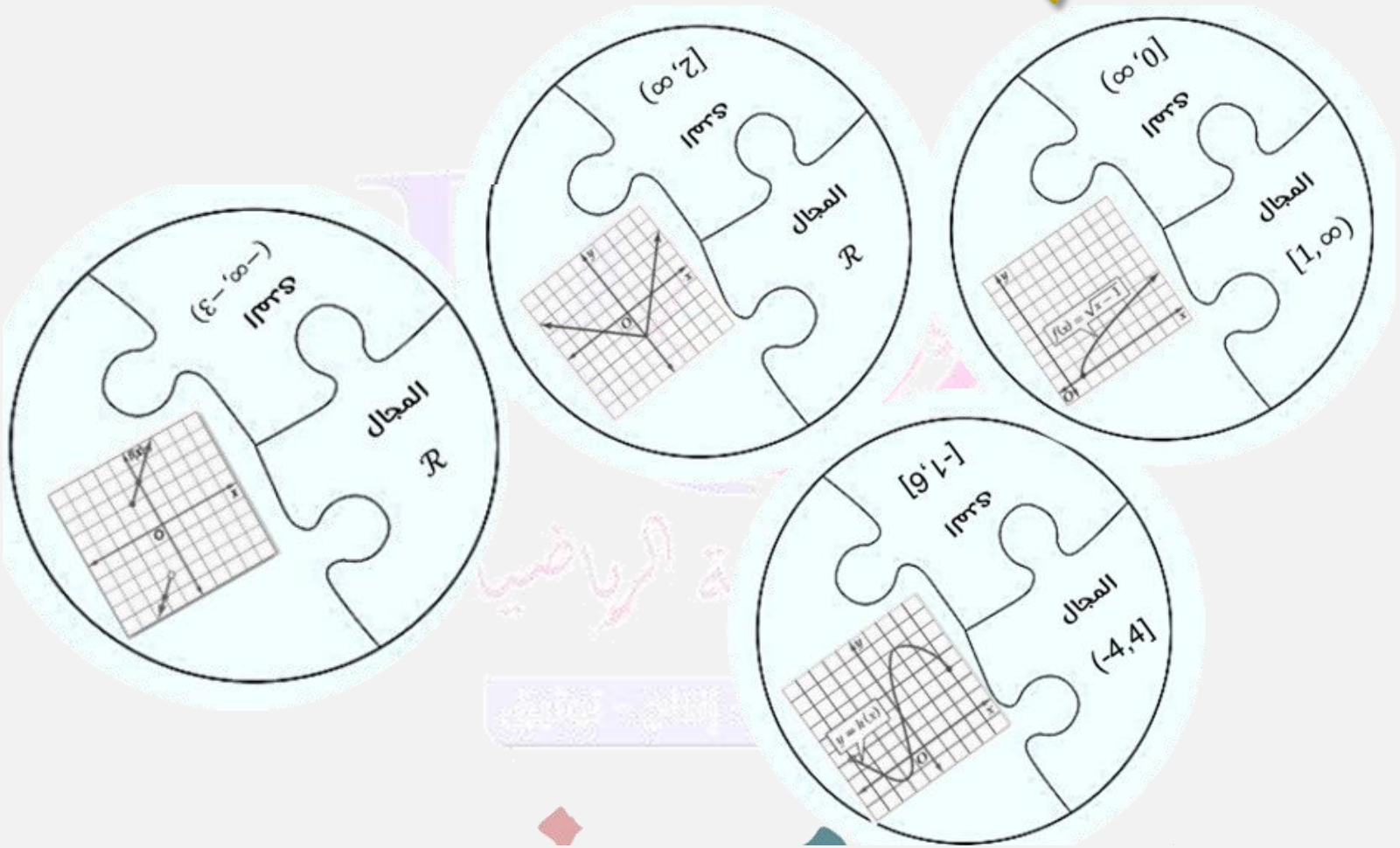
39) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^6}{x^5}$

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

العب واستمتع

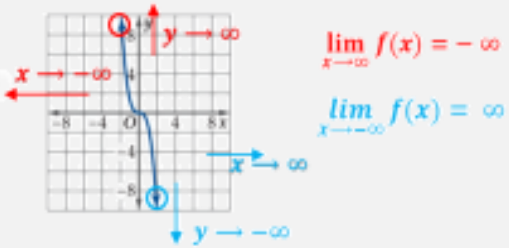
1+2=3



بسمة math

تحليل الدالة بيانياً 2

سلوك طرفي التمثيل البياني



الدوال الزوجية والفردية

زوجية

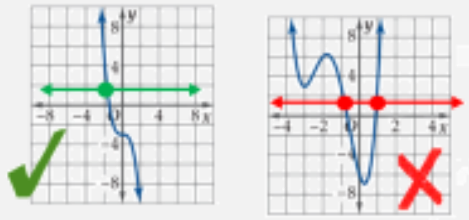
إذا حققت العبارة: $f(-x) = f(x)$

فردية

إذا حققت العبارة: $f(-x) = -f(x)$

هل الدالة لها دالة عكسية؟!

إذا حققت اختبار الخط الأفقي



جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :