الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

المفردات:

- الدالة الرئيسة (الأم) parent function
- الدالة الثابتة constant function
- الدالة المحايدة identity function
- الدالة التربيعية quadratic function
- الدالة التكعيبية cubic function
- دالة الجذر التربيعي square root function
- دالة المقلوب reciprocal function
- دالة القيمة المطلقة absolute value function
- الدالة الدرجية step function
- دالة أكبر عدد صحيح greatest integer function
- التحويل الهندسي transformation
- الإزاحة (الانسحاب) translation
- الانعكاس reflection
- التمدد dilation

فيما سبق :

درست التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها

والآن :

- أقوم بتعيين الدوال الرئيسية (الأم) وأصفها ، وأمثلها بيانيا .
- أقوم بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسية ، وأمثلها بيانيا .

الدوال الرئيسية (الأم) والتحويلات الهندسية

1-5

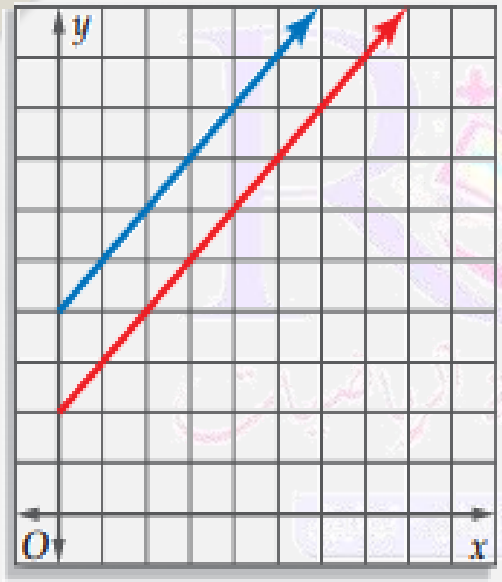
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

لماذا ؟



استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

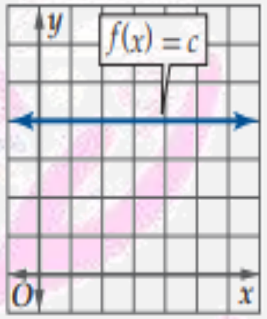
بسمة math

أنواع الدوال الرئيسية

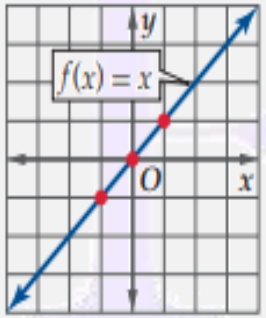
مفهوم أساسي

الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

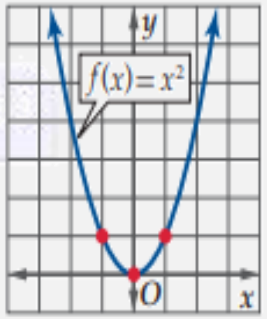
تكتب الدالة الثابتة على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



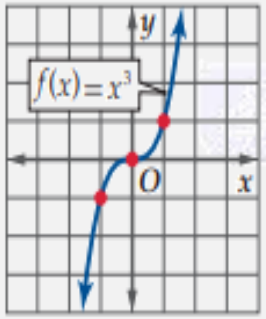
تمر الدالة المحايدة $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



أنواع الدوال الرئيسية (أم)

مفهوم أساسي

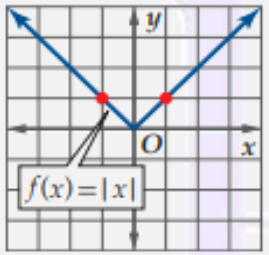
دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, \ |0| = 0, \ |4| = 4$

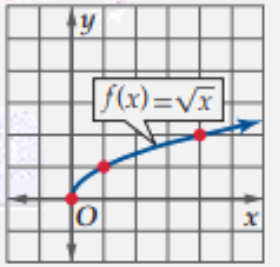
النموذج



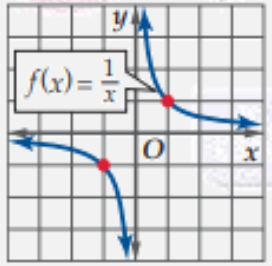
مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب دالة الجذر التربيعي على الصورة $f(x) = \sqrt{x}, \ x \geq 0$.



تكتب دالة المقلوب على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}, \ x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



أنواع الدوال الرئيسية (1)

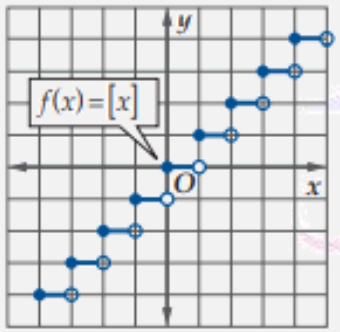
مفهوم أساسي

دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

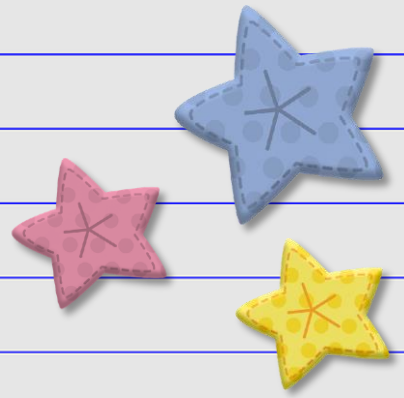
أمثلة: $[-4] = -4, [-1.5] = -2, [\frac{1}{3}] = 0$

النموذج



مجموعة رفعة الرياضيات

مقطع توضيحي



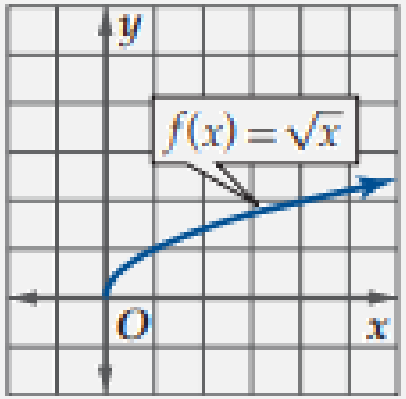
بسمه math

مثال1

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

وصف خصائص الدالة الرئيسية (الأم)

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3

تحقق من نفسك

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$

بسمة math

تـــــدرب

1) $f(x) = [x]$

4) $f(x) = x^2$

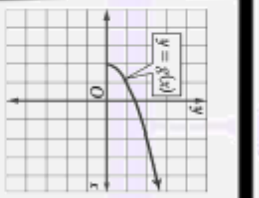
6) $f(x) = x$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

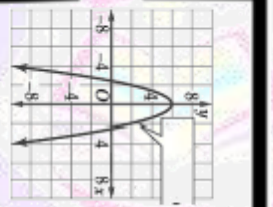
العب واستمتع

$1+2=3$

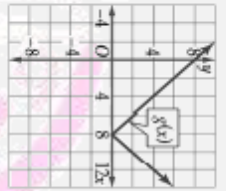
$\sqrt{x+2}$



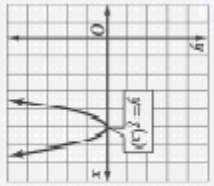
x^2+6



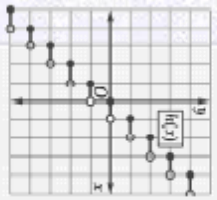
$|x-8|$



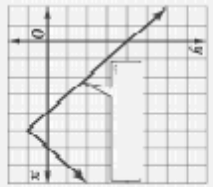
$-(x-5)^2$



$[x]$



$|x-5|-1$



تحديد المجال جبرياً

كثيرة الحدود

المجال/ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الدالة الكسرية

المجال $\mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$

الدالة الكسرية الجذرية

(الجذر في البسط)

المجال $\{$أصفار المقام$\} - 0 >$ ما بداخل الجذر

الدالة الجذرية

الدليل زوجي

الجذر في البسط

المجال $0 \geq$ ما بداخل الجذر

الجذر في المقام

المجال $0 <$ ما بداخل الجذر

الدليل فردي

الجذر في البسط

المجال/ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الجذر في المقام

المجال $\mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$

التحويلات الهندسية

قياسية

تغير موقع المنحنى فقط

(لا تغير شكله أو أبعاده)

- الانسحاب
- الانعكاس

غير قياسية

تغير شكل المنحنى

- التمدد
- القيمة المطلقة

مقطع توضيحي

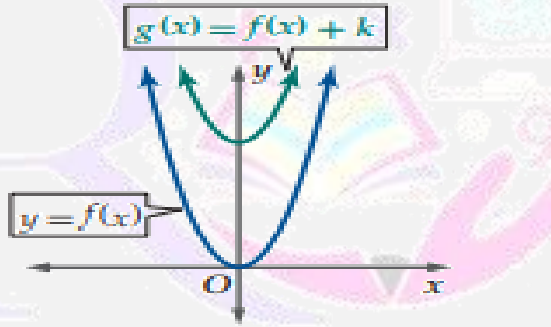
مفهوم أساسي

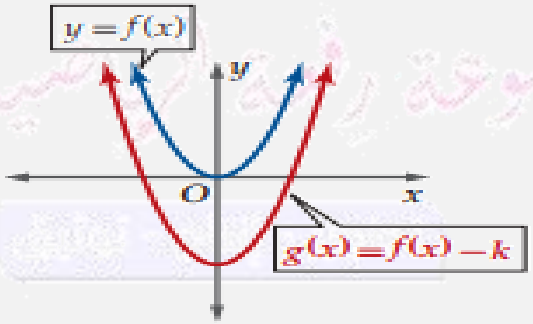
الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

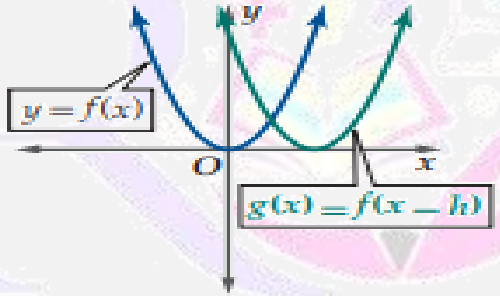


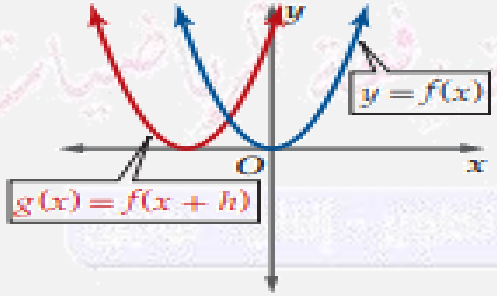


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





مثال2

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 4$

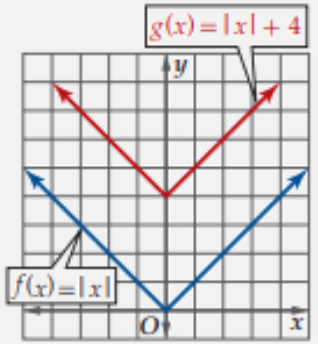
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

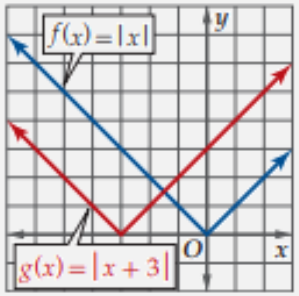
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

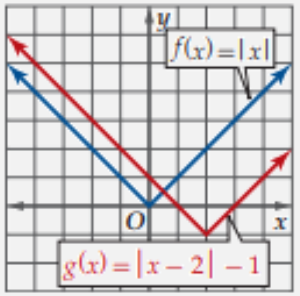
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



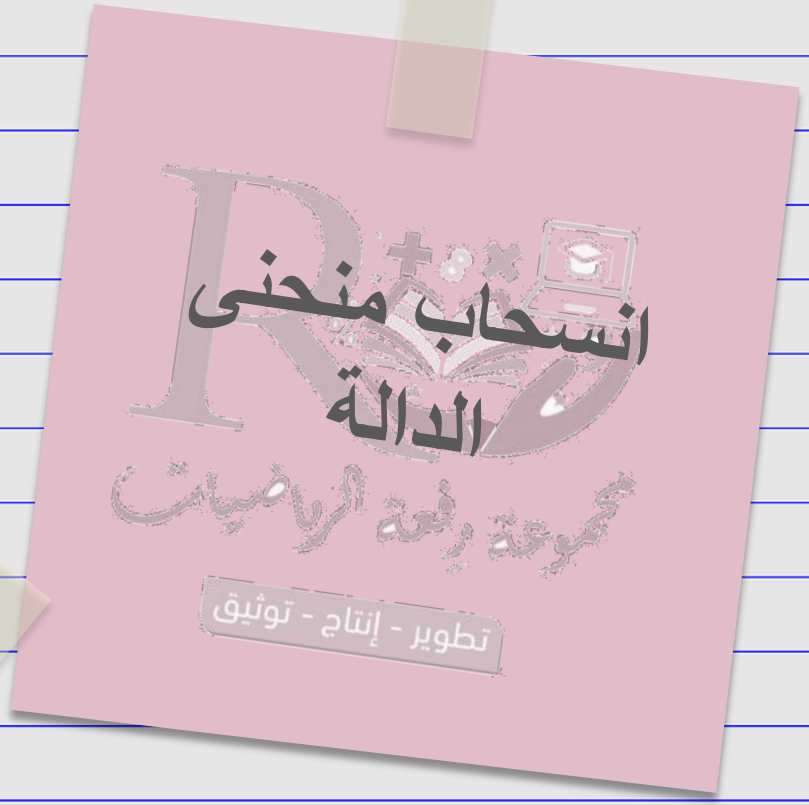
الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4



تحقق من فهمك

$h(x) = x^3 - 5$ (2A

$h(x) = 8 + x^3$ (2B

$h(x) = (x + 2)^3 + 4$ (2C

بسمة math

تدرب

7) $g(x) = \sqrt{x-4}$

8) $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

9) $g(x) = \frac{1}{x} + 4$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3

تدرب

52) **اكتشف الخطأ:** وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [\![x + 4]\!]$. فقال محمد أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار وقال عبد الله إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى الأعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

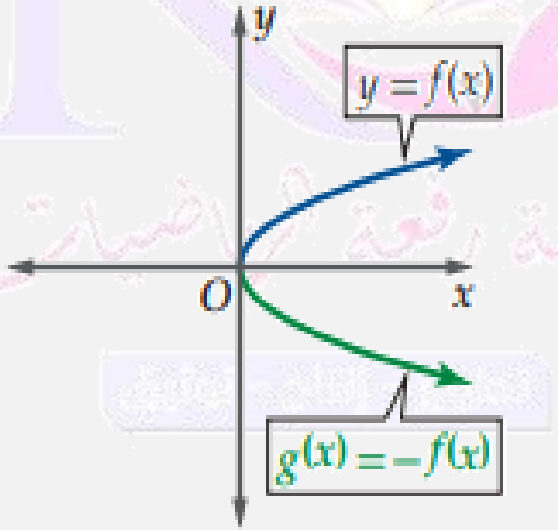
بسمة math

مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

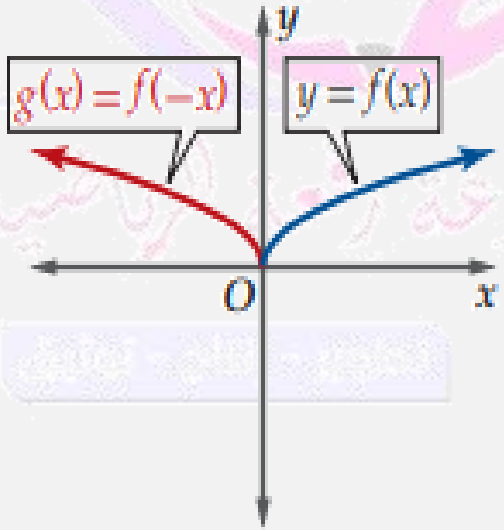
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x .

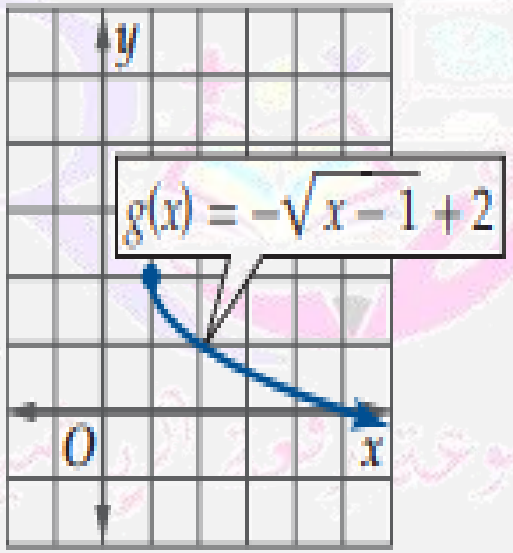


الانعكاس حول المحور y

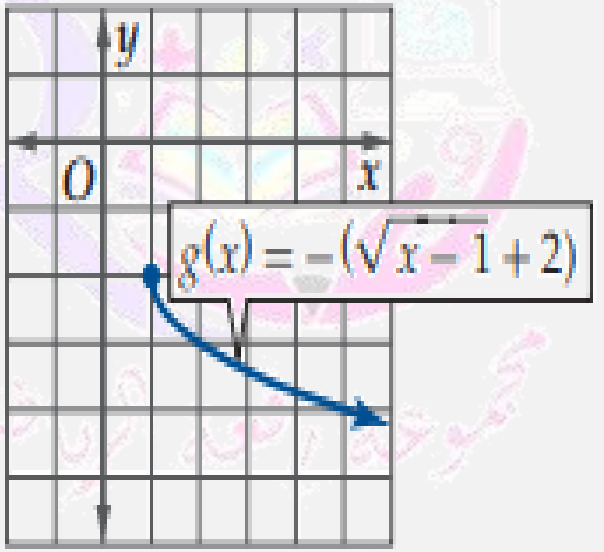
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.



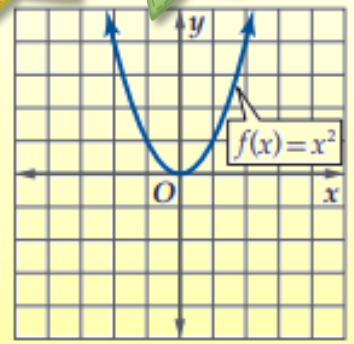
انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.



انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.

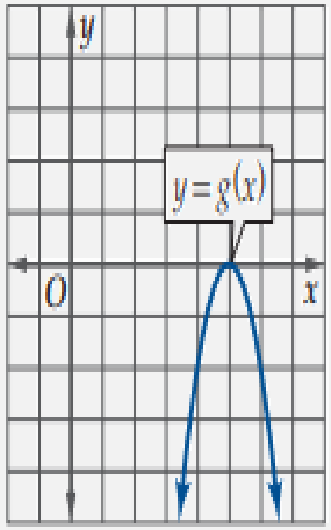
مثال3

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



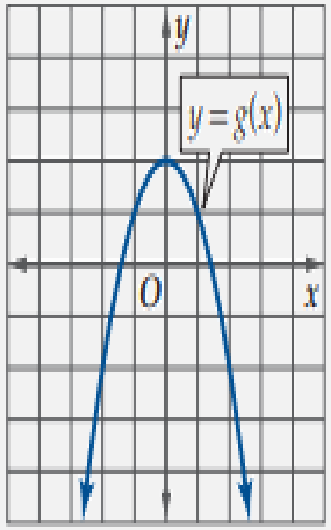
الشكل 1.5.5

(a



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x، أي أن $g(x) = -(x-5)^2$.

(b



منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

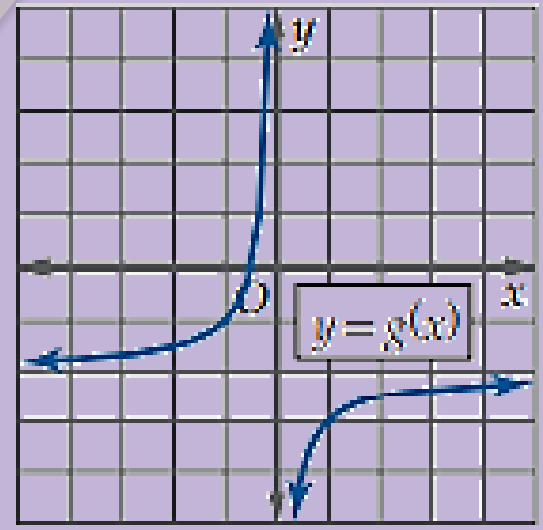
كتابة معادلات التحويل

تطوير - إنتاج - توثيق

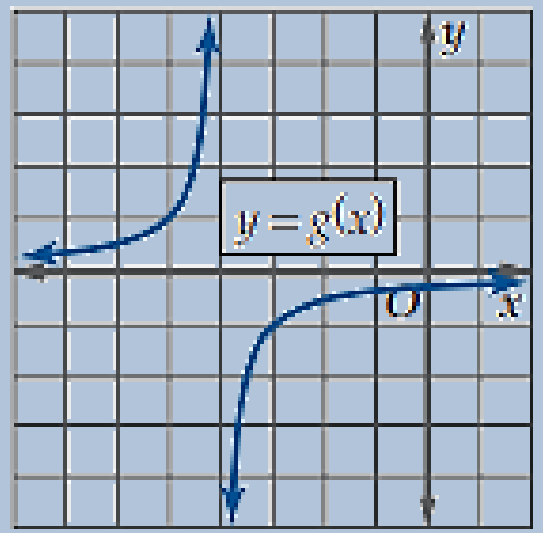
تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3A



(3B



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

$1+2=3$

تدرب

اكتب الدالة الناتجة من إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

32) $f(x)=\frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى الأعلى، و 7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2.

اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما في مستوى إحداثي واحد. (مثال 4)

15) $g(x)=3|x|-4$

بسمة math

التمدد

إرشادات للدراسة

التمدد:

يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

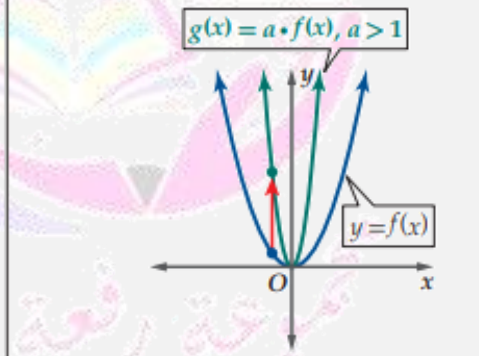
مفهوم أساسي

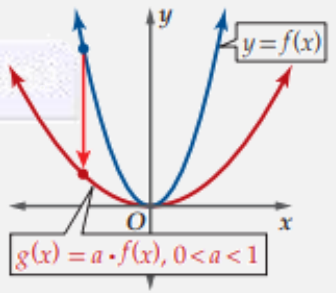
التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

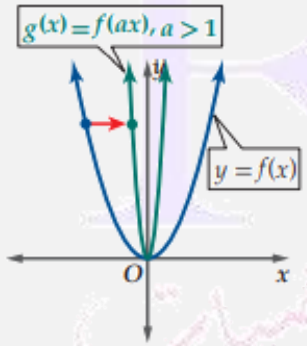


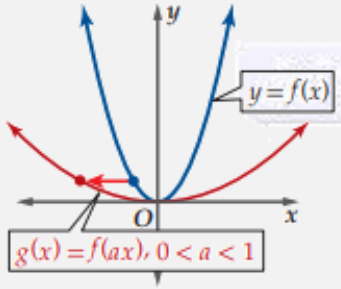


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

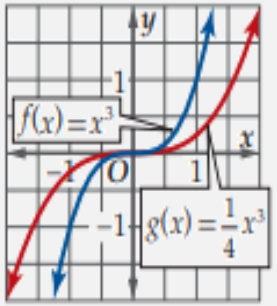




مثال4

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

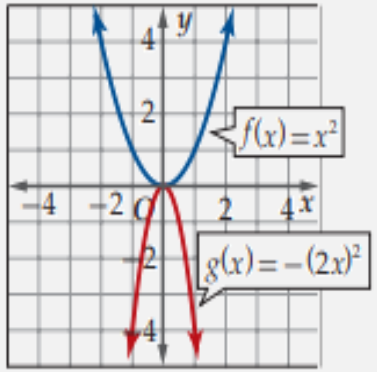
(a $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$؛ لأن

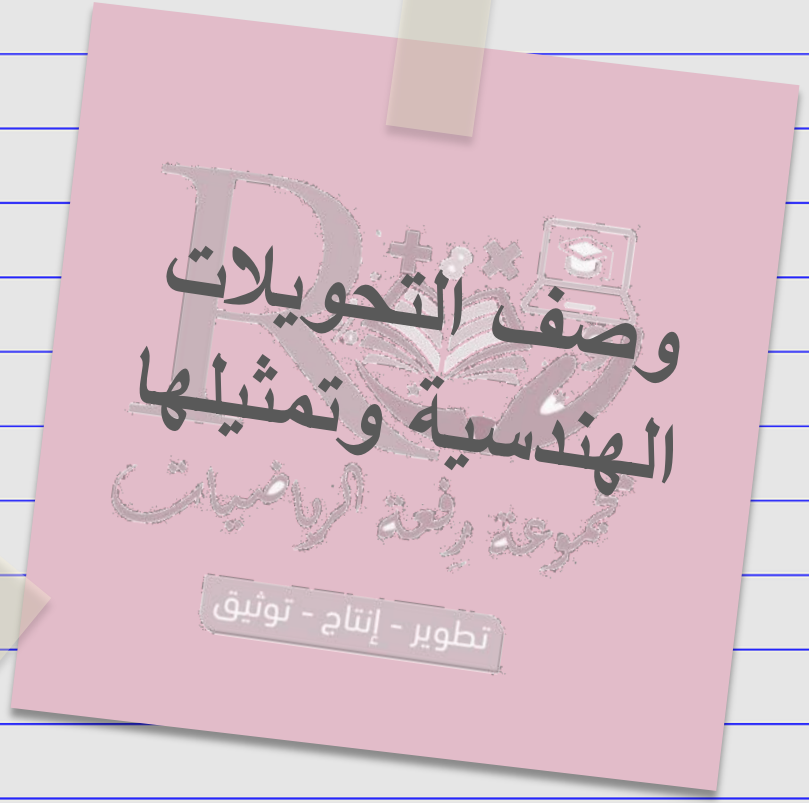
$g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.

(b $g(x) = -(2x)^2$



منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ أولًا؛ لأن

$f(x) = x^2, f(2x) = (2x)^2$ وَ $2 > 1$، ثم انعكاس حول المحور x؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$



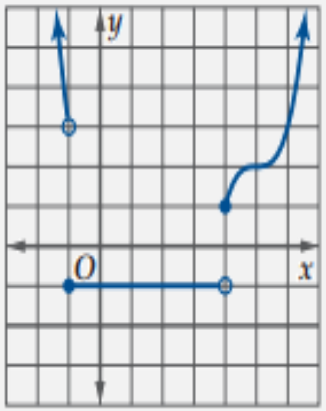
تحقق من فهمك

(4A $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

(4B $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

مثال5

مثّل الدالة بيانيًّا: $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & , \ x<-1 \\ -1 & , \ -1\le x<4 \\ (x-5)^3+2 & , \ x\ge 4 \end{cases}$.

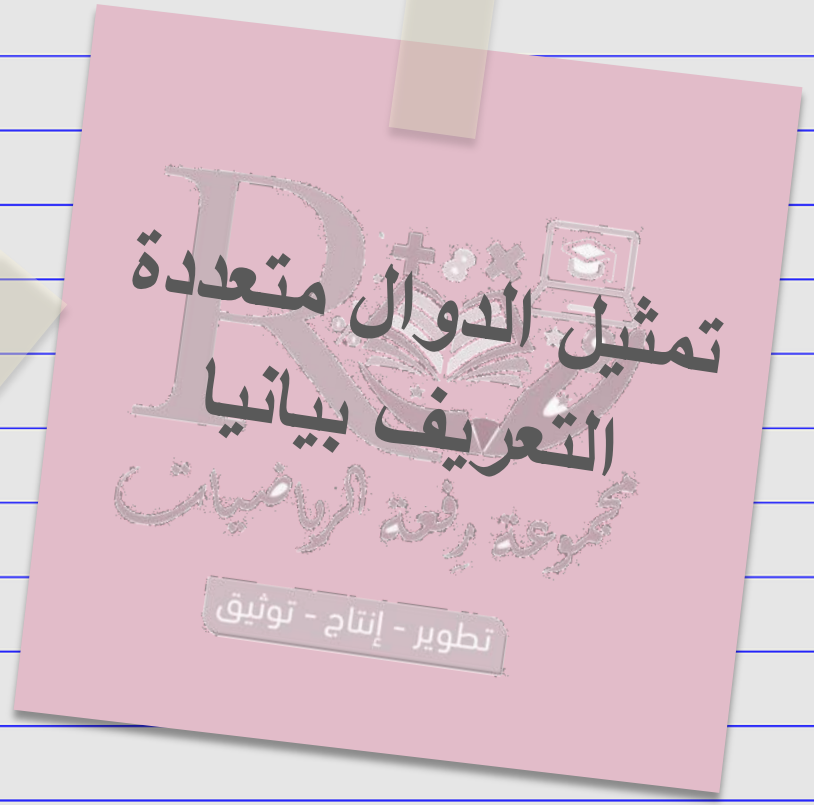


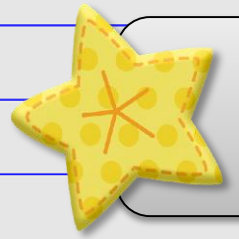
في الفترة $(-\infty,-1)$، أمثّل الدالة $y=3x^2$.

في الفترة $(-1,4]$، أمثّل الدالة الثابتة $y=-1$.

في الفترة $[4,\infty)$ أمثّل الدالة $y=(x-5)^3+2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1,3)$ و $(4,-1)$ ونقطة عند كل من $(-1,-1)$ و $(4,1)$ لأن $f(-1)=-1$ و $f(4)=1$.





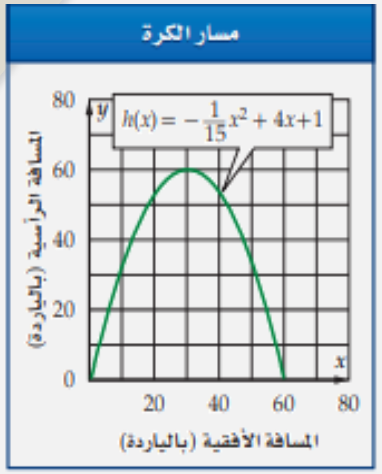
تحقق من فهمك

$$g(x)=\begin{cases} x-5 & , \quad x\le 0 \\ x^3 & , \quad 0<x\le 2 \\ \frac{2}{x} & , \quad x>2 \end{cases}$$ (5A

$$h(x)=\begin{cases} (x+6)^2 & , \quad x<-5 \\ 7 & , \quad -5\le x\le 2 \\ |4-x| & , \quad x>2 \end{cases}$$ (5B

مثال6

كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة باليادرة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية باليادرة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x - h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

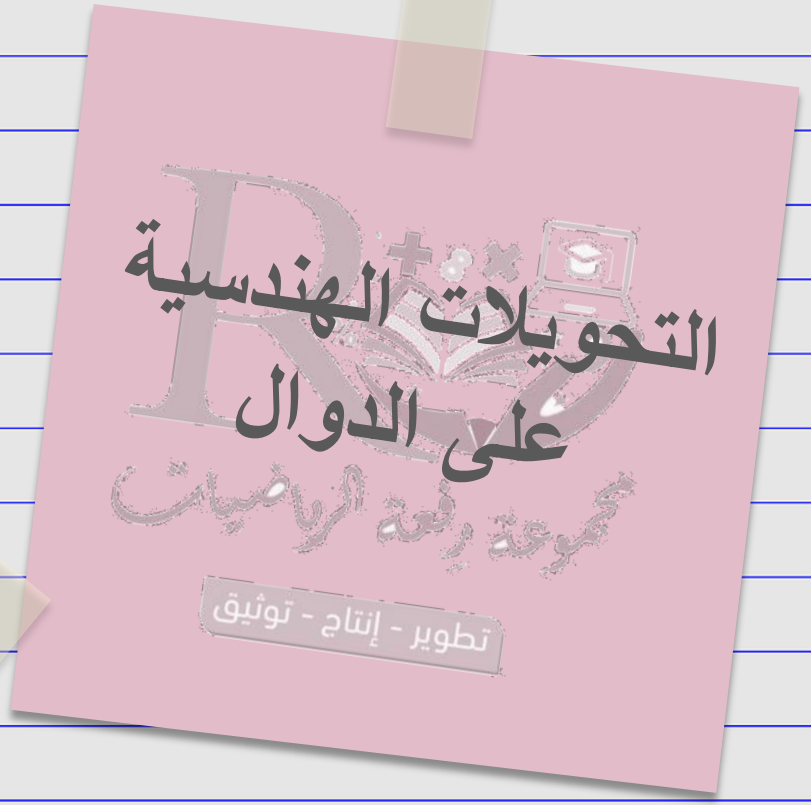
الدالة الأصلية $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$

حلّل $-\frac{1}{15}x^2 + 4x$ $= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$

أكمل المربع $= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$

اكتب $x^2 - 60x + 900$ على صورة مربع كامل ثم بسّط $= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61$

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.



1+2=3

تحقق من فهمك

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x)=\sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

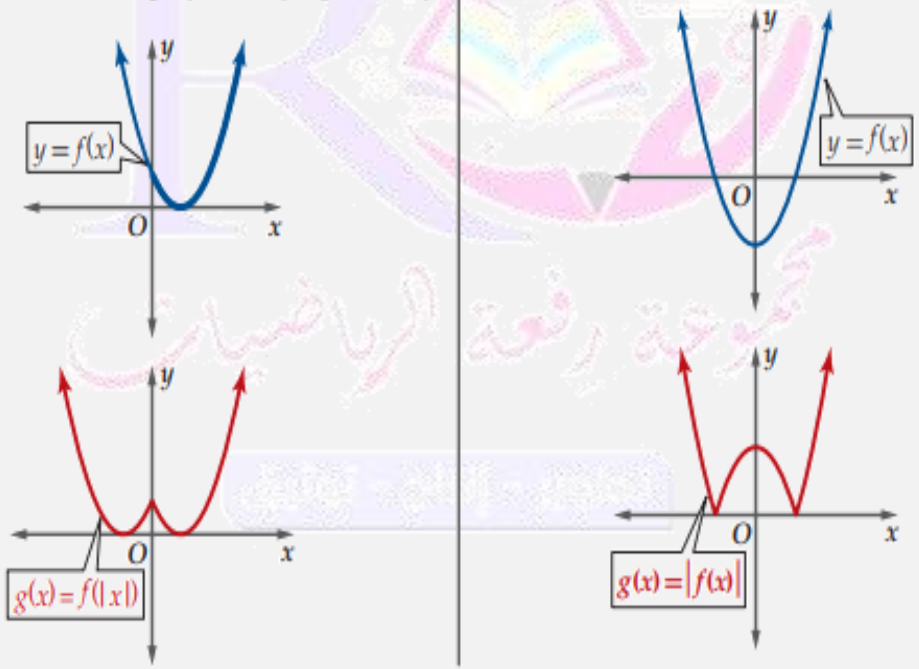
التحويلات مع دوال القيمة المطلقة

مفهوم أساسي

التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.



$g(x) = f(|x|)$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y.

إرشاد تقني

تحويلات القيمة المطلقة

يمكنك التحقق من أثر التحويل الهندسي على منحنى القيمة المطلقة باستعمال الحاسبة البيانيّة. ويمكنك أيضًا تمثيل كلا الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه .

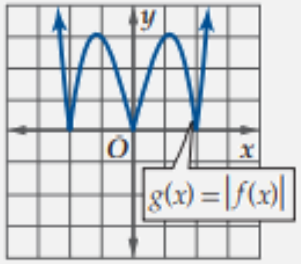
بسمة math

مثال 7

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

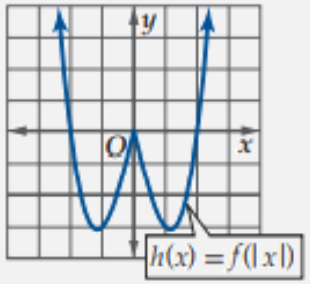
a) $g(x) = |f(x)|$

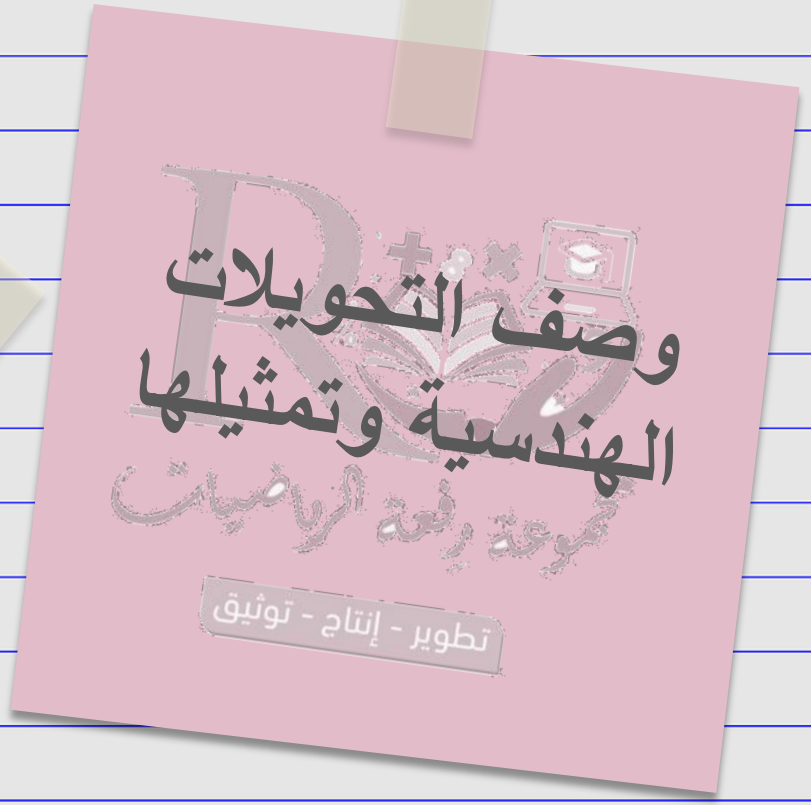
يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.

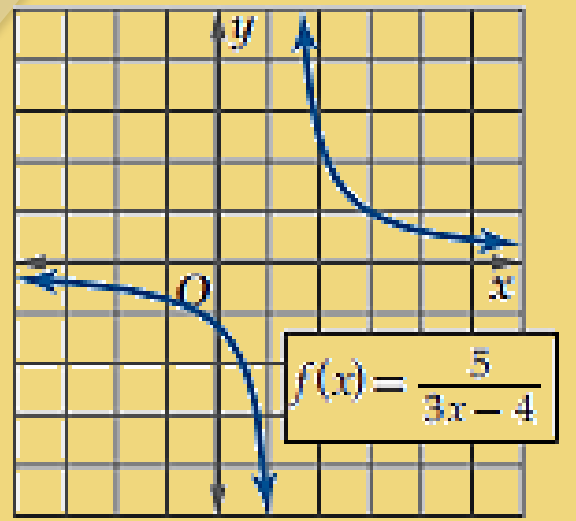




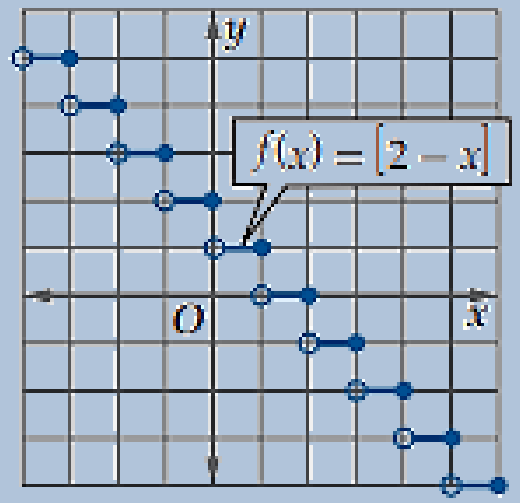
تحقق من فهمك

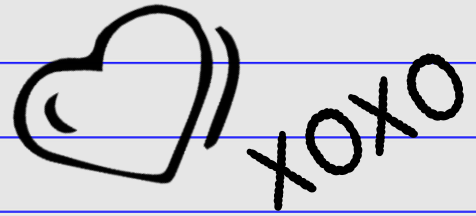
استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

(7A



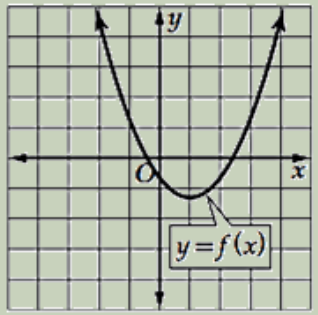
(7B





تدرب

66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟



A $(0,\infty)$

B $(-\infty,1)$

C $(-1,\infty)$

D $(1,\infty)$

67) ما مدى الدالة $y=\frac{x^2+8}{2}$ ؟

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

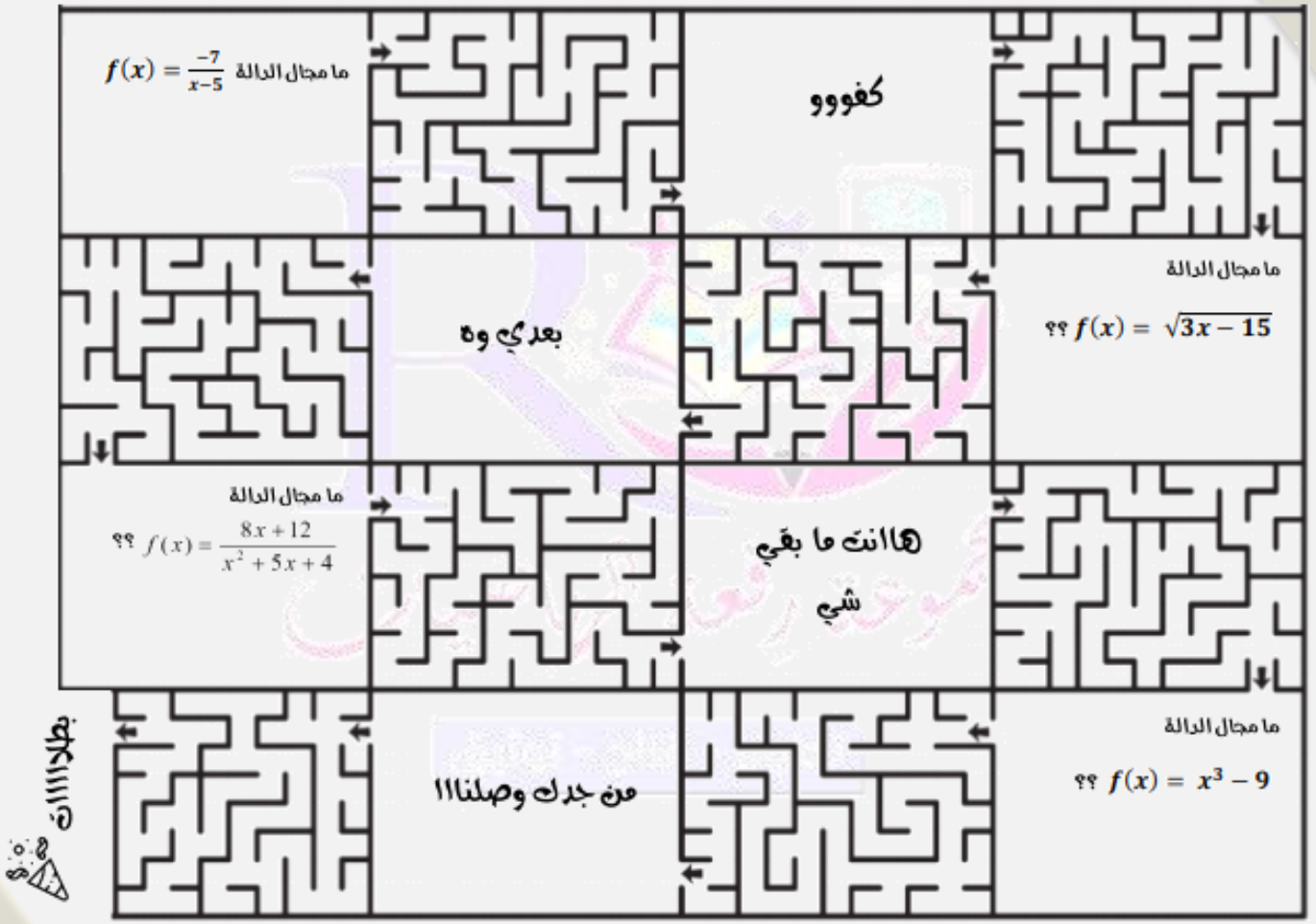
C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

العب واستمتع

1+2=3



جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

الواجب المنزلي

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :