العمليات على الدوال وتركيب دالتين

بسمة math

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

1-6

المفردات:

تركيب الدالتين

composition of functions

فيما سبق :

درست إيجاد قيم الدوال

والآن :

- أجري العمليات على الدول
- اجد تركيب الدوال

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

لماذا ؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3

مفهوم أساسي

العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

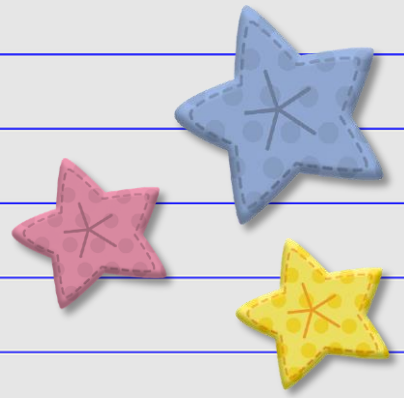
الضرب: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

القسمة: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x)=0$ في دالة القسمة.

بسمة math



مقطع توضيحي

بسمة math

مثال1

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = \sqrt{x+2}, h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

a $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2 + 4x) + \left(\sqrt{x+2}\right)$$
$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f, g، وهو $[-2, \infty)$.

b $(f-h)(x)$

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (x^2 + 4x) - (3x - 5)$$
$$= x^2 + 4x - 3x + 5$$
$$= x^2 + x + 5$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$، لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c $(f \cdot h)(x)$

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$$
$$= (x^2 + 4x)(3x - 5)$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x$$
$$= 3x^3 + 7x^2 - 20x$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$ ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$.

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B $f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

$1+2=3$

تـــــدريب

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال

4) $f(x)=x^2+x$

$g(x)=9x$

بسمة math

تركيب الدوال

تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

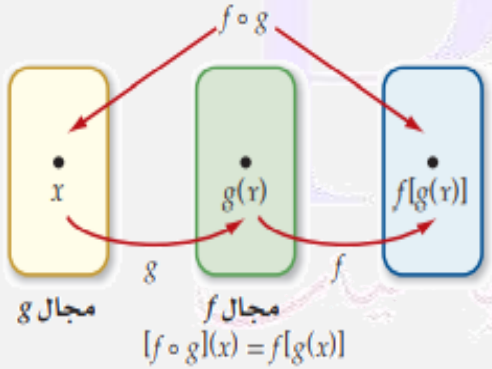
مفهوم أساسي

تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f وَ g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيثُ تُطبَّقُ الدالة g أولًا ثم الدالة f.

إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين:
يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

مثال2

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1 \, , g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x - 4)$ $g(x) = x - 4$

$= (x - 4)^2 + 1$ عوّض $(x - 4)$ بدلًا من x في $f(x)$

$= x^2 - 8x + 16 + 1$ بسّط

$= x^2 - 8x + 17$

b $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ تعريف $g \circ f$

$= g(x^2 + 1)$ $f(x) = x^2 + 1$

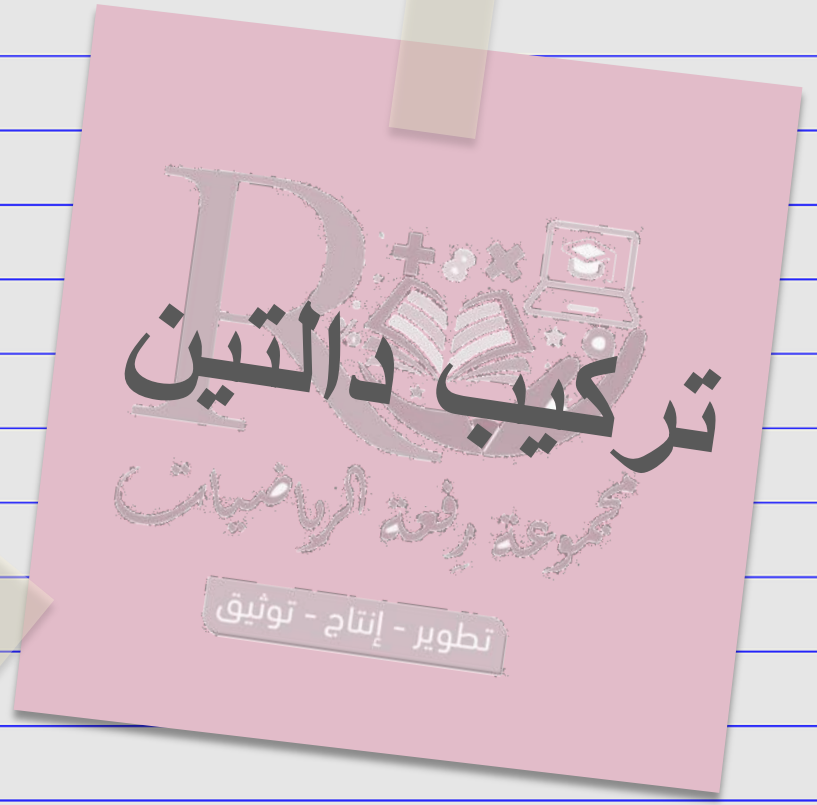
$= (x^2 + 1) - 4$ عوّض $(x^2 + 1)$ بدلًا من x في $g(x)$

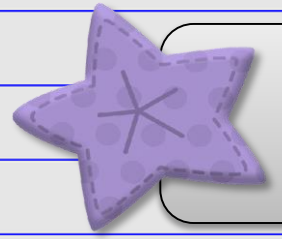
$= x^2 - 3$ بسّط

c $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع **a** عندما $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ عوّض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$



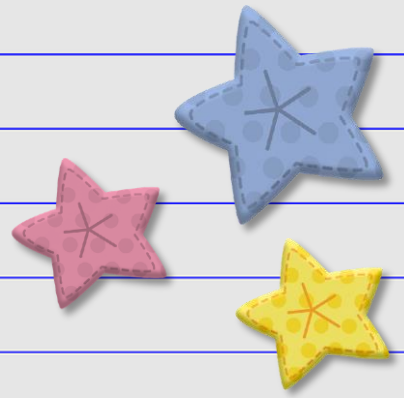


تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

(2A $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

(2B $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$



مقطع توضيحي

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3

تدرب

أوجد $[f \circ g](6)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية.

11) $f(x) = 2x - 3$

$g(x) = 4x - 8$

بسمة math

مثال3

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x^2 - 9)$ $g(x) = x^2 - 9$

$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$ عوّض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين:
من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال3

b $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x-3}$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$، ونطرح منها 2.
لذا فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$.
نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(\sqrt{x-3})$ $g(x) = \sqrt{x-3}$

$= (\sqrt{x-3})^2 - 2$ عوّض $\sqrt{x-3}$ بدلًا من x في $f(x)$

$= x - 3 - 2 = x - 5$ بسّط

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$؛ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$ ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

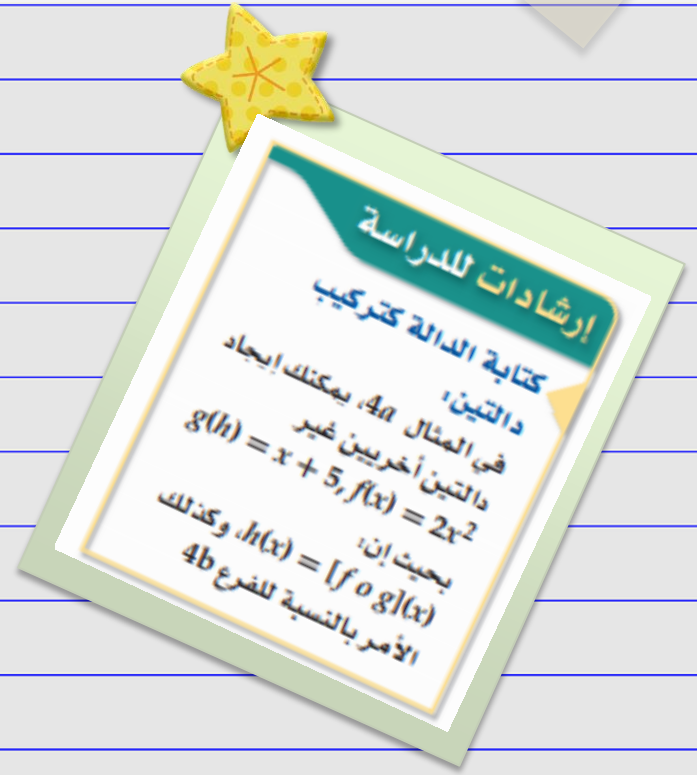
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(3A $f(x)=\sqrt{x+1}\ ,\ g(x)=x^2-1$

(3B $f(x)=\frac{5}{x}\ ,\ g(x)=x^2+x$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h، فإنك تجد دالتين (f, g مثلًا) بحيث يكون تركيبهما هو h.



مثال4

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$

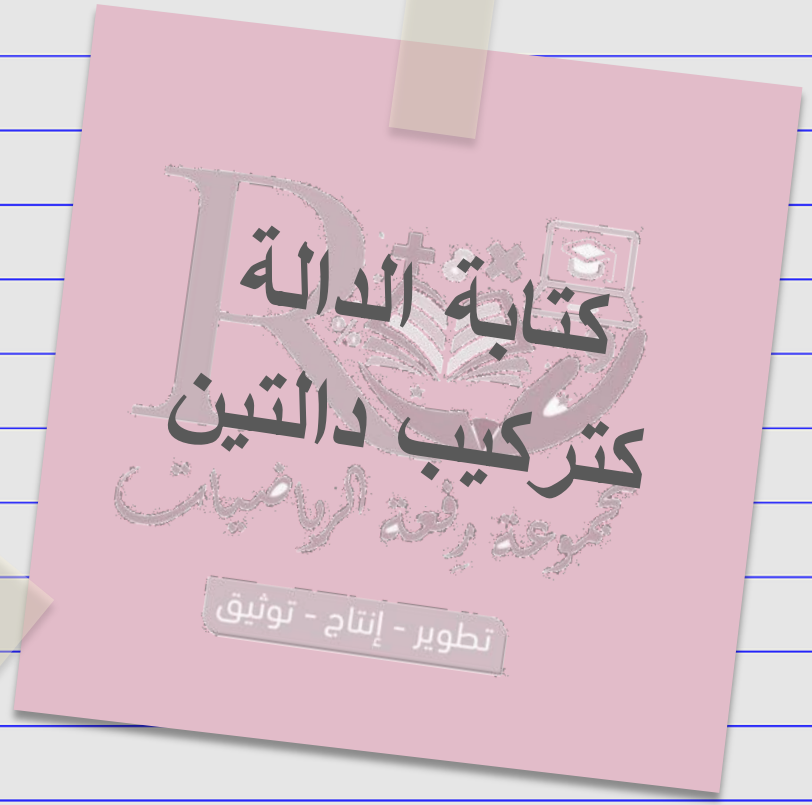
أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2, g(x) = x + 5$، وعندئذٍ:

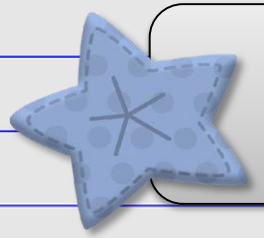
$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

b $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

لاحظ أن الدالة h يمكن أن تكتب كتركيب دالتين f, g حيث يمكن اختيار $g(x) = -7x$، وكتابة: $h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9(-7x)}{7}$، وعندئذ: $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{7}$

$$h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9(-7x)}{7} = \sqrt{g(x)} - \frac{9(g(x))}{7} = f(g(x)) = [f \circ g](x)$$





تحقق من فهمك

(4A $h(x) = x^2 - 2x + 1$

(4B $h(x) = \frac{1}{x+7}$

مثال5

مؤثرات حركية : تُصمِّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L ، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$. أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L(L + 40) = L^2 + 40L$ ، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$ ، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

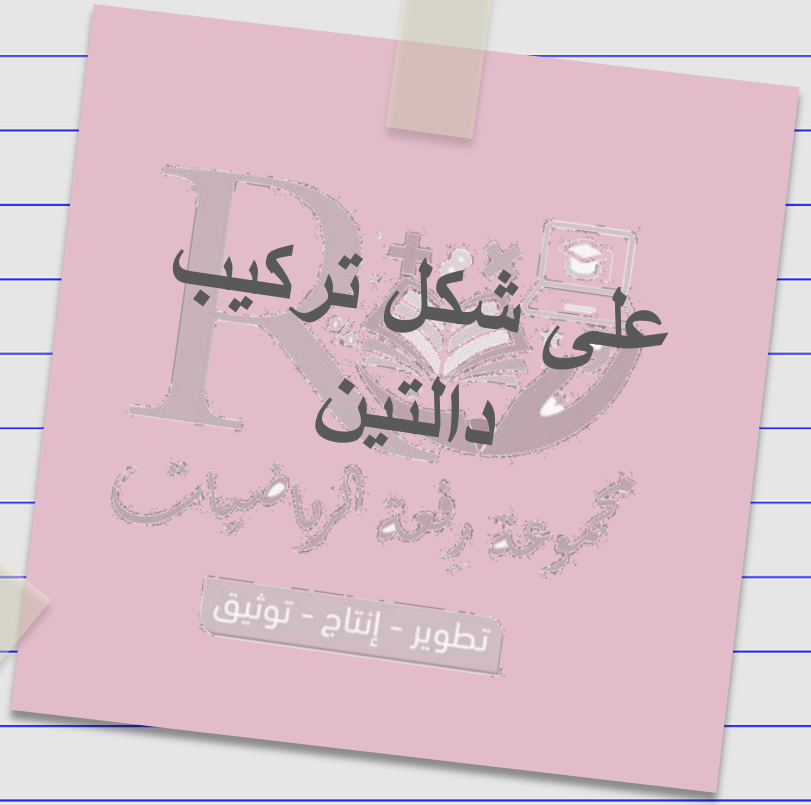
b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$$A \circ L = A[L(t)] \quad \text{تعريف } A \circ L$$
$$= A(20 + 15t) \quad L(t) = 20 + 15t$$
$$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t) \quad \text{عوّض } (20 + 15t) \text{ بدلًا من } L \text{ في } A(L)$$
$$= 225t^2 + 1200t + 1200 \quad \text{بسّط}$$

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن

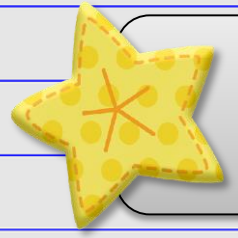
c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟

مساحة المستطيل الأصلي 60×20 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. وبحل المعادلة بالنسبة إلى t تجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. وبما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال $L(t)$، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريبًا.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3



تحقق من فهمك

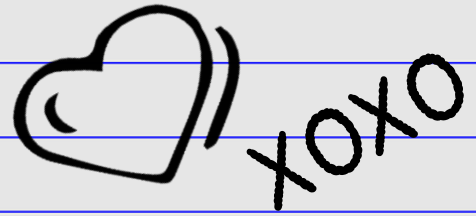
5) أعمال: أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

بسمة math



تدرب

أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة: $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

28) $h(x) = \dfrac{8}{(x-5)^2}$

83) إذا كان $f(2)=3, g(3)=2, f(3)=4, g(2)=5$، فما قيمة $[f \circ g](3)$؟

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

$f + g$

$f(x) = x + 10 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+1}$

$(f+g)(x) = x + 10 + \sqrt{x+1}$

مجال $f+g$ = مجال f ∩ مجال g
$= \mathbb{R} \cap [-1, \infty)$
$= [-1, \infty)$

$f - g$

$f(x) = x + 10 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+1}$

$(f-g)(x) = x + 10 - \sqrt{x+1}$

مجال $f-g$ = مجال f ∩ مجال g
$= \mathbb{R} \cap [-1, \infty)$
$= [-1, \infty)$

$f \circ g$

$f(x) = 2x - 3 \quad , \quad g(x) = 4x - 8$

$(f \circ g)(x) = 8x - 19$

مجال $f \circ g$ = مجال الدالة الناتجة ∩ مجال g
$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$
$= \mathbb{R}$

$f . g$

$f(x) = x + 10 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+1}$

$(f.g)(x) = x\sqrt{x+1} + 10\sqrt{x+1}$

مجال $f.g$ = مجال f ∩ مجال g
$= \mathbb{R} \cap [-1, \infty)$
$= [-1, \infty)$

$\frac{f}{g}$

$f(x) = x + 10 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+1}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+10}{\sqrt{x+1}}$

مجال $\frac{f}{g}$ = مجال f ∩ مجال g $- \{$أصفار المقام$\}$
$= \mathbb{R} \cap [-1, \infty) - \{-1\}$
$= (-1, \infty)$

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :