العلاقات والدوال العكسية

بسمة math

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

المفردات:

العلاقة العكسية

inverse relation

الدالة العكسية

inverse function

الدالة المتباينة

one-to-one function

فيما سبق :

درست إيجاد تركيب دالتين

والآن :

- أستعمل اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد ان كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا .
- أجد الدالة العكسية جبريا وبيانيا.

العلاقات والدوال العكسية

1-7

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا ؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

مجموعة رفعة الرياضيات

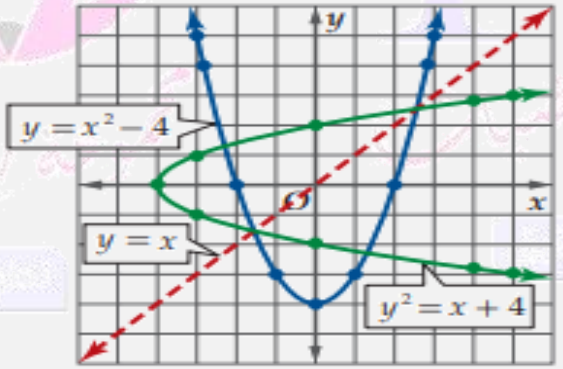
1+2=3

الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلًّا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$y^2 = x + 4$ أو $x = y^2 - 4$

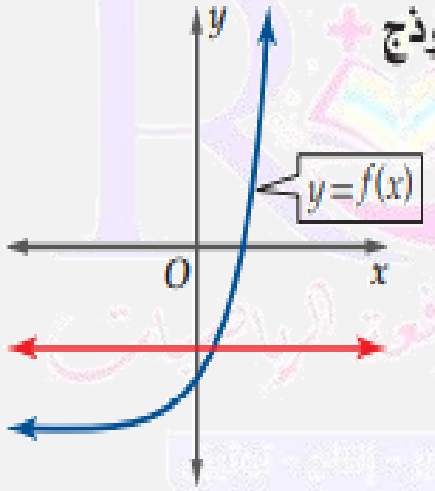
x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

مفهوم أساسي

اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

نموذج

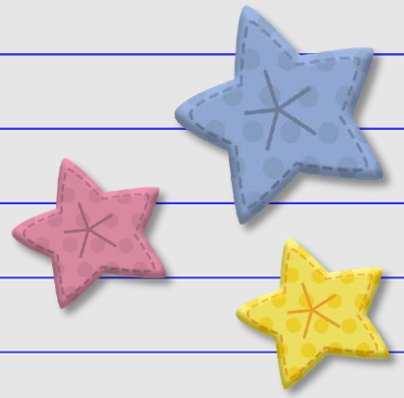


مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية

يجب ألا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

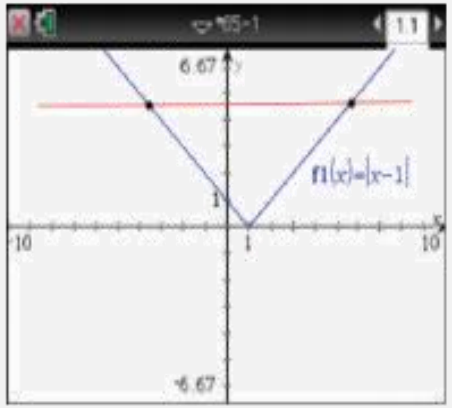


مقطع توضيحي

مثال1

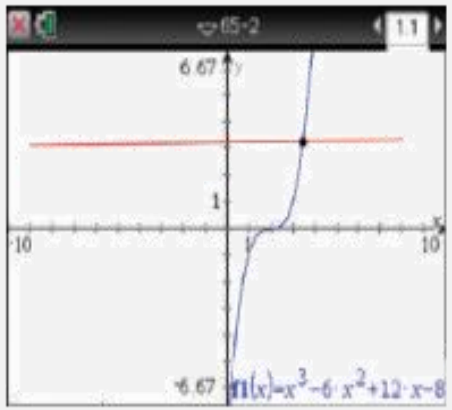
مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

a) $f(x) = |x - 1|$

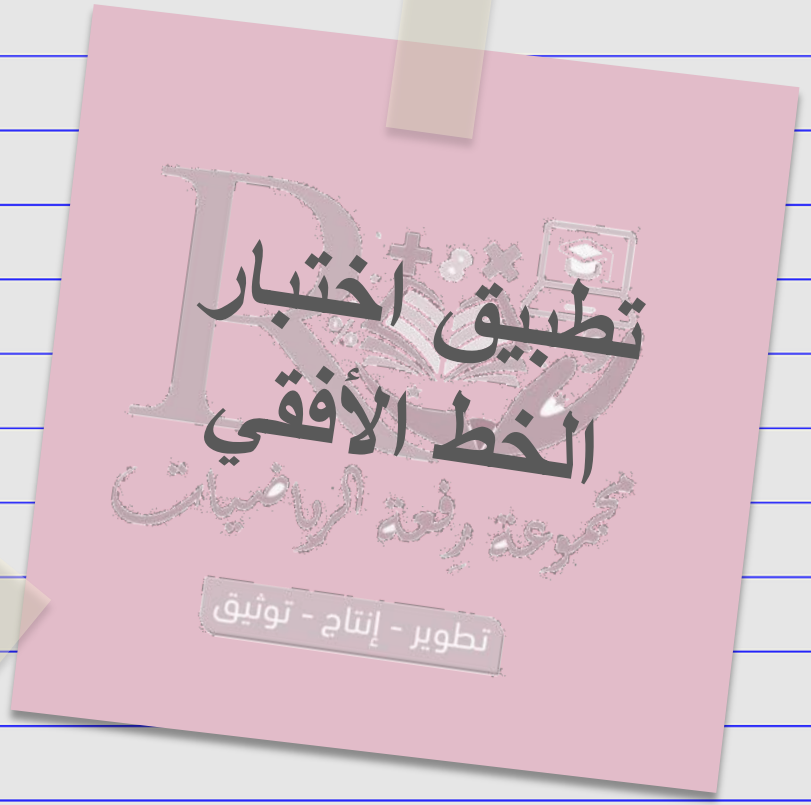


يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.



تحقق من فهمك

(1A $h(x) = \frac{4}{x}$

(1B $f(x) = x^2 + 5x - 7$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

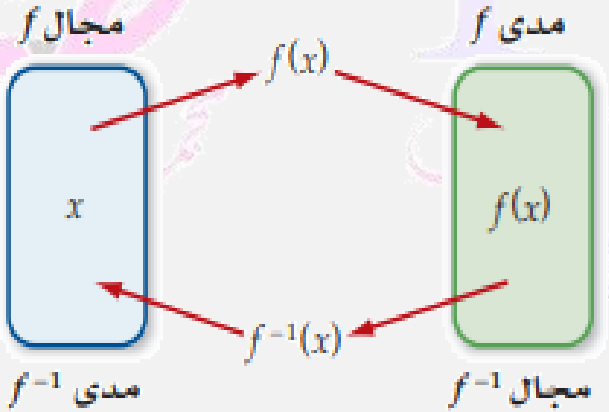
تدرب

$$1+2=3$$

$$y=\frac{8}{x+2}$$ (7

إيجاد الدالة العكسية : إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y، ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



مفهوم أساسي

إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}.

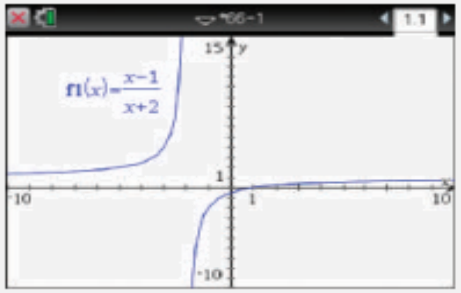
قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس:
يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.

مثال2

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

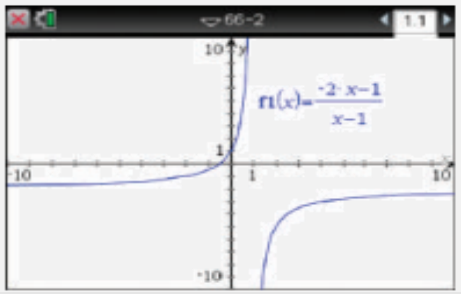
(a $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$



يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ ، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

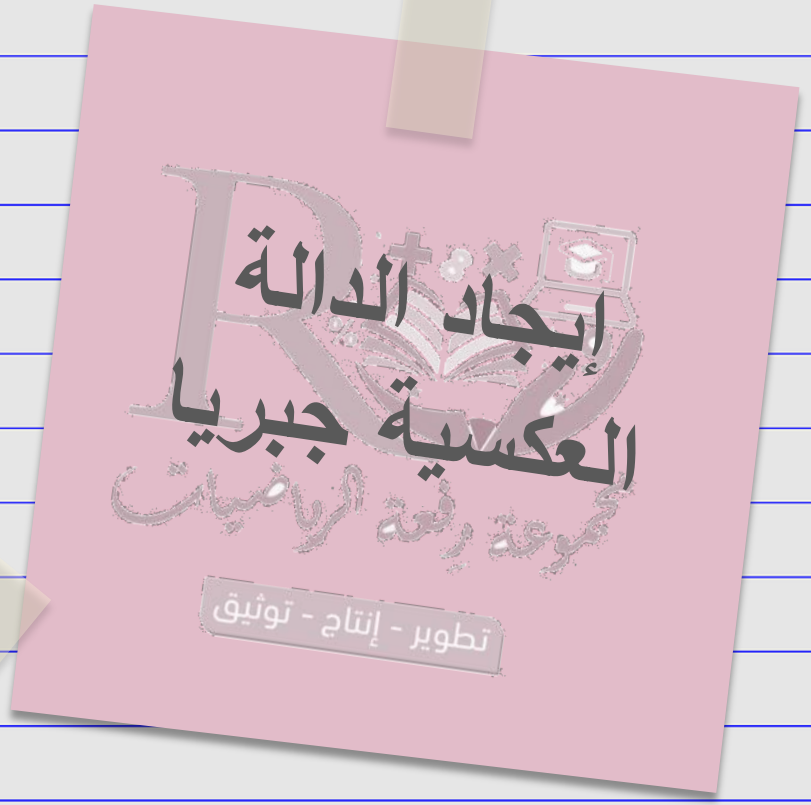
والآن أوجد f^{-1}.

$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$	الدالة الأصلية
$y = \frac{x-1}{x+2}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \frac{y-1}{y+2}$	بدّل بين x , y
$xy + 2x = y - 1$	اضرب الطرفين في $(y+2)$ ، ثم طبق خاصية التوزيع
$xy - y = -2x - 1$	ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد
$y(x-1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \frac{-2x-1}{x-1}$	حل بالنسبة لـ y
$f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y ، لاحظ أن $x \neq 1$



يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ، ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان مدى ومجال f^{-1} على الترتيب.

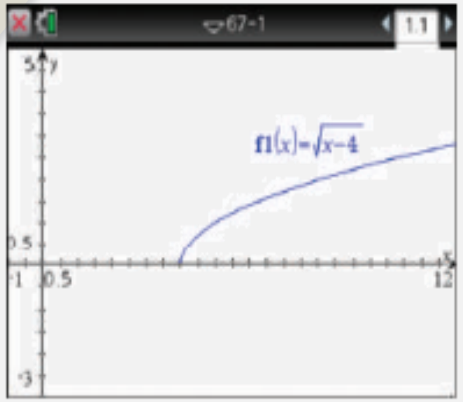
لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1}.



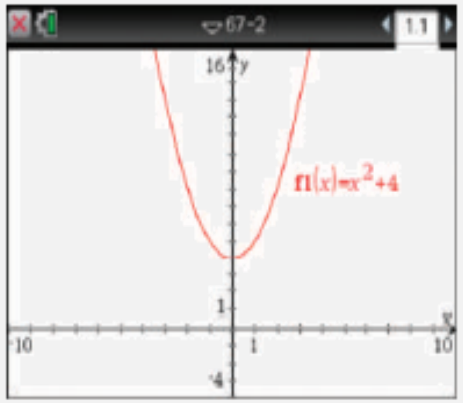
مثال2

(b $f(x) = \sqrt{x-4}$

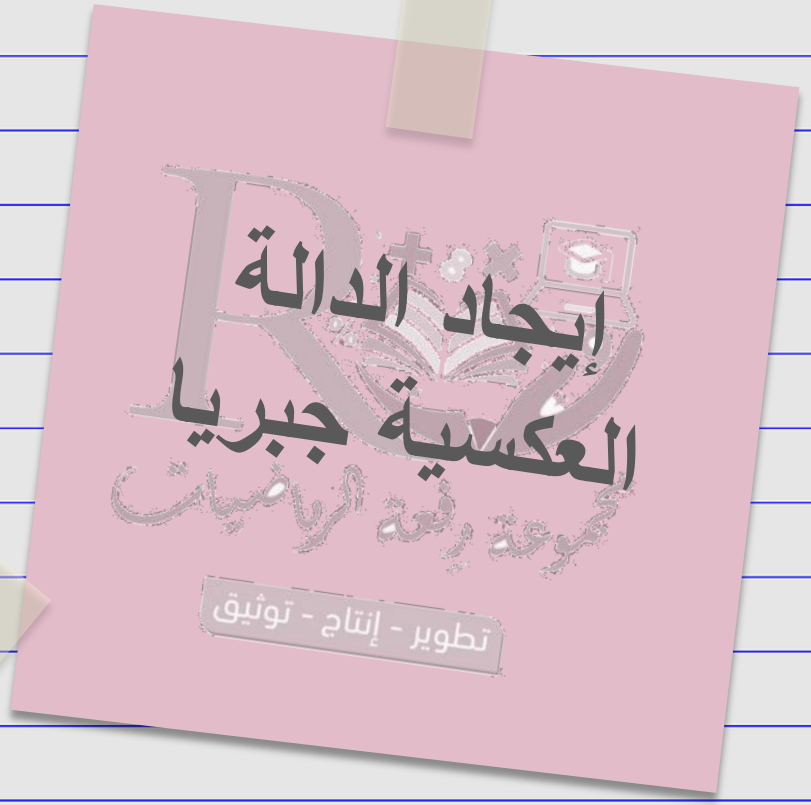
يوضّح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة f متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $[4, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1}.



$f(x) = \sqrt{x-4}$	الدالة الأصلية
$y = \sqrt{x-4}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \sqrt{y-4}$	بدّل بين x و y
$x^2 = y - 4$	ربّع الطرفين
$y = x^2 + 4$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y



يظهر من التمثيل البياني المجاور أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$ ، ومداها$[4, \infty)$. ومن ثم فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًا لمدى f وهو $[0, \infty)$، ويبقى مداها $[4, \infty)$. والآن يصبح مجال f ومداها مساويان لمدى f^{-1}ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.



تحقق من فهمك

$f(x) = -16 + x^3$ (2A

$f(x) = \frac{x+7}{x}$ (2B

$f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$ (2C

بسمة math

مفهوم أساسي

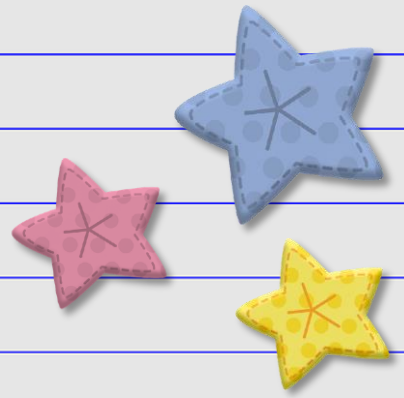
تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

بسمة math



مقطع توضيحي

مثال3

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين $f(x)=\frac{6}{x-4}$ و $g(x)=\frac{6}{x}+4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)]=x$ وَ $g[f(x)]=x$.

$$f[g(x)]=f\left(\frac{6}{x}+4\right)$$

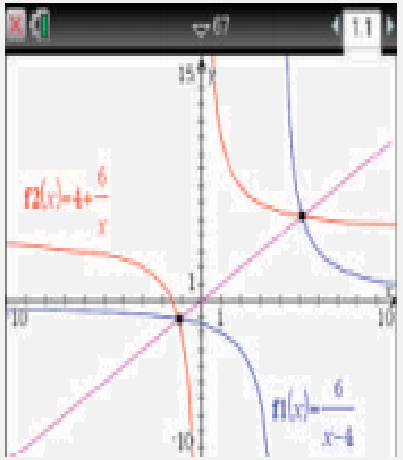
$$=\frac{6}{\left(\frac{6}{x}+4\right)-4}$$

$$=\frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)}=x$$

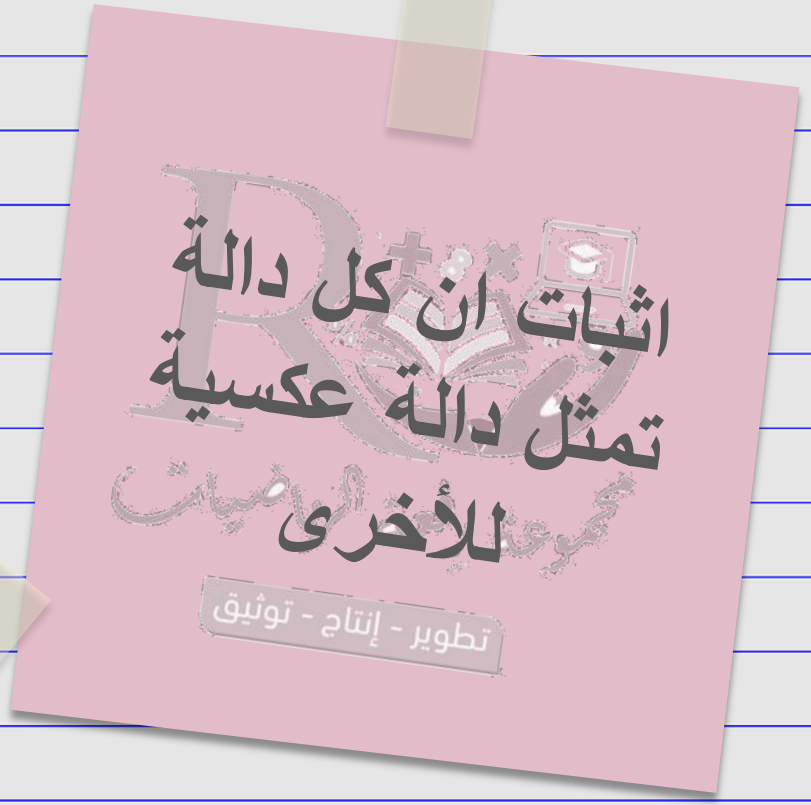
$$g[f(x)]=g\left(\frac{6}{x-4}\right)$$

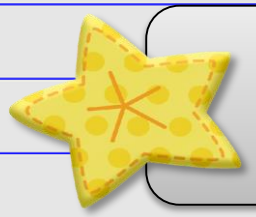
$$=\frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)}+4$$

$$=x-4+4=x$$



بما أن $f[g(x)]=g[f(x)]=x$، فإن كلًّا من الدالتين $f(x)$, $g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y=x$.





تحقق من فهمك

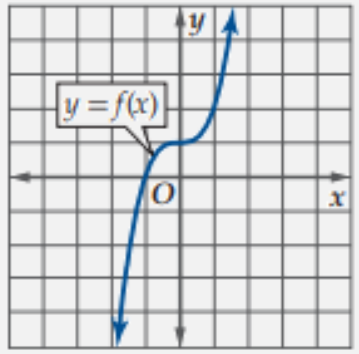
(3A $f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

(3B $f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$

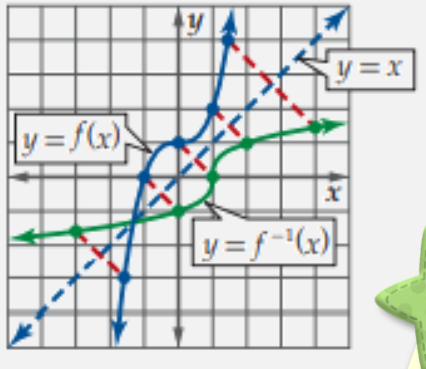
مثال4

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثّل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3



الشكل 1.7.4

إرشادات للدراسة

الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي، ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

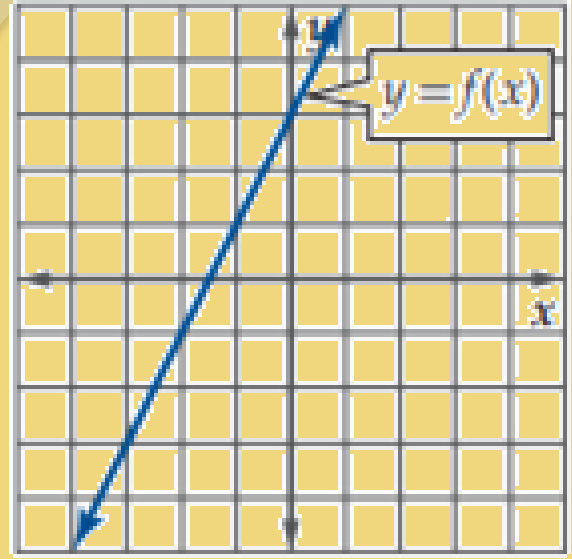
إيجاد الدالة العكسية بيانيا

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

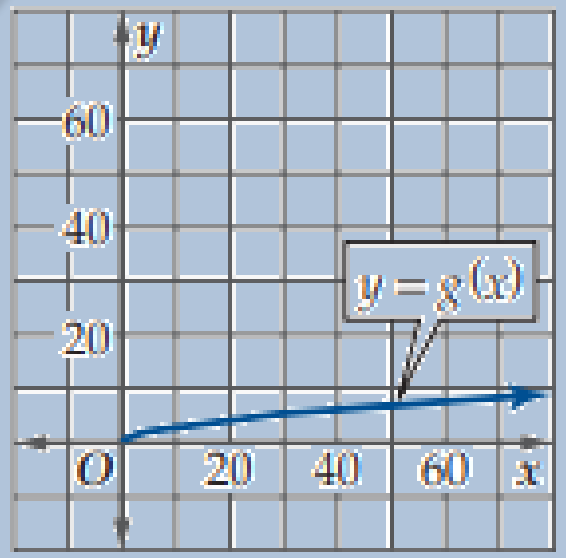
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًّا:

(4A

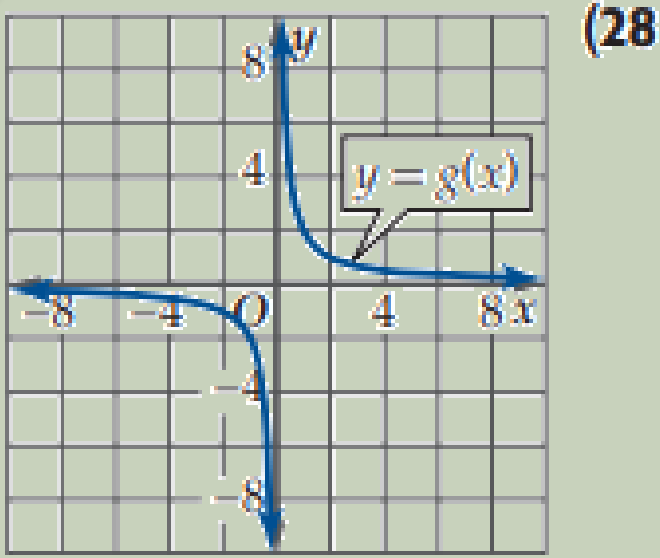


(4B

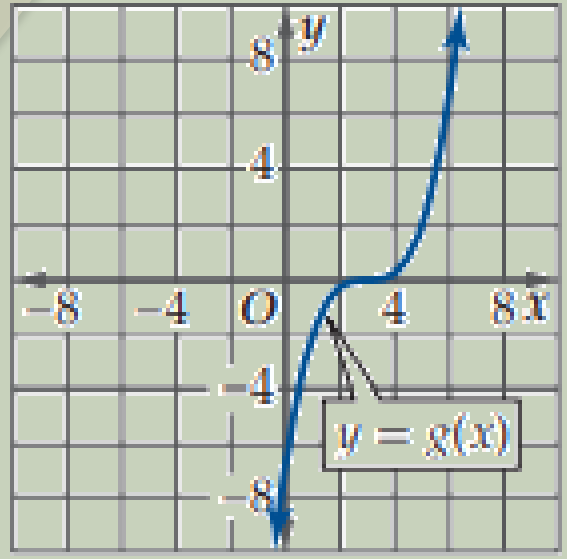


تدرب

(28

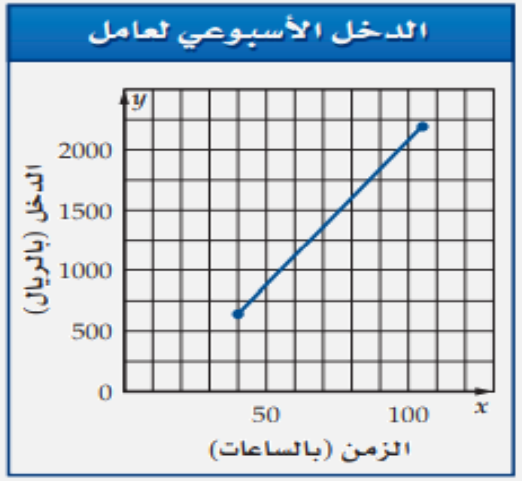


(30



مثال5

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$
أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 24x - 320$	الدالة الأصلية
$y = 24x - 320$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = 24y - 320$	بدّل بين x و y
$x + 320 = 24y$	أضف 320 إلى الطرفين
$y = \frac{x + 320}{24}$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = \frac{x + 320}{24}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضِّح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى 105 ساعات؛ لذا فإن مجال $f(x)$ هو $[40, 105]$. وبما أن $f(105) = 2200$ ، $f(40) = 640$ ، فإن مدى $f(x)$ هو $[640, 2200]$ ، وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

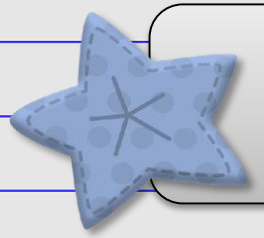
$f^{-1}(760) = \frac{760 + 320}{24} = 45$ أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع.

إرشادات للدراسة

الدالة الخطية:
يمكنك الحكم بأن منحنى الدالة الخطية يحقق اختبار الخط الأفقي دون الحاجة إلى رسمه.

استعمال الدالة العكسية

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



تحقق من فهمك

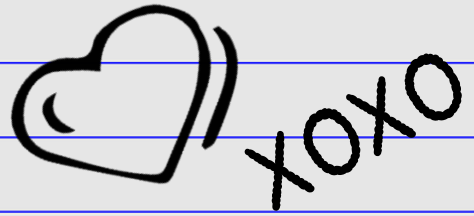
5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من $f^{-1}(x)$, x في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f^{-1}(x)$, $f(x)$ إن وجدت. وبرّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.



تدرب

58) تبرير: هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برّر إجابتك.

"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x-5}{2}$؟

A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$

C $g(x) = 2x+5$

D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

متى تكون الدالة متباينة

المعادلات

إذا كانت كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة لـ y ، ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x

✗ $y = x^2 - 3$

✓ $y = x^3 - 3$

الأزواج المرتبة

عناصر المدى لا تتكرر

✓ $\{(-1,9),(2,13),(0,1)\}$

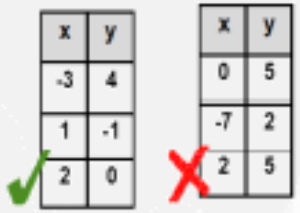
✗ $\{(5,4),(-5,2),(9,3),(-1,4)\}$

المخطط السهمي

يصل لكل عنصر في المدى سهم واحد فقط

الجدول

عناصر المدى لا تتكرر



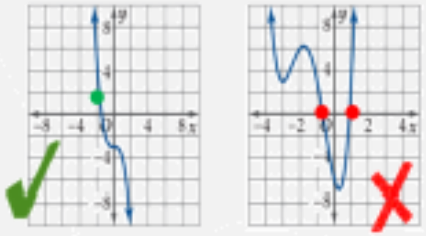
x	y
-3	4
1	-1
2	0

x	y
0	5
-7	2
2	5

بيانياً

هل الدالة لها دالة عكسية؟!

اختبار الخط الأفقي في الرسم البياني لا يمر إلا على نقطة واحدة



جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :