$1+2=3$

الدوال الأسية

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

المفردات:

الدالة الأسية	exponential function
النمو الأسّي	exponential growth
عامل النمو	growth factor
الاضمحلال الأسّي	exponential decay
عامل الاضمحلال	decay factor

فيما سبق :

درست دوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانيا .

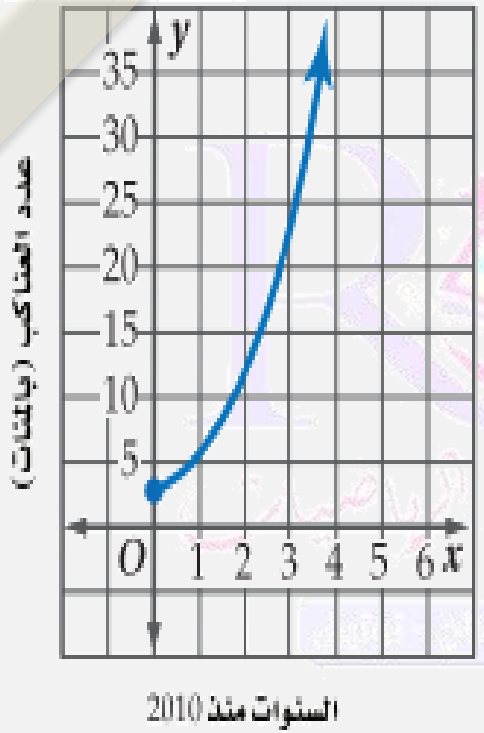
والآن :

- أتعرف الدالة الأسية .
- أمثل الدالة الأسية .
- أمثل دوال النمو الأسي بيانيا .
- أمثل دوال الاضمحلال الأسي بيانيا .

الدوال الأسية

١-٢

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



لماذا؟

قد تبدو عناكب الرتيلاء (*Tarantulas*) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيِّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.

لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًّا، وليس تربيعيًّا أيضًا، وإنما يمثِّل الدالة $y = 3(2)^x$، والتي هي مثال على الدالة الأسية.

تمثيل الدوال الأسيّة : **الدالة الأسية** هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.

لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

مفهوم أساسي

الدالة الأسية

التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة

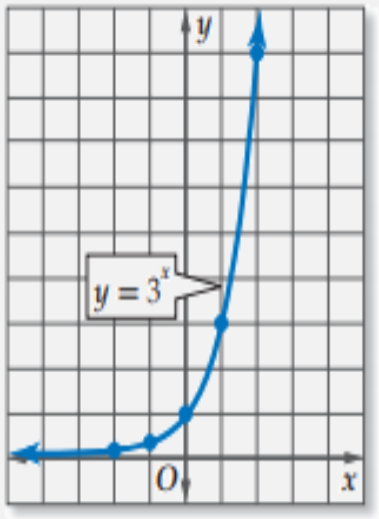
$$y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$$

أمثلة: $y = (\frac{1}{2})^x$ $y = 4^x$ $y = 2(3)^x$

مقطع توضيحي

مثال ١

a) مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدد مجال الدالة ومداها.



x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9

عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(1 , 0)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y، حيث $y = 3^x$، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

إرشادات للدراسة

الدالة $y = ab^x$:

تكون الدالة الأسية $y = ab^x$ معرفة لجميع قيم x التي تحقق الشرط:

$a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

وذلك لأنه:

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم، فمثلًا تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة.

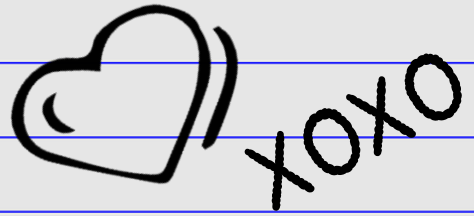
تمثيل الدالة الأسية عندما $b>1 ,a>0$

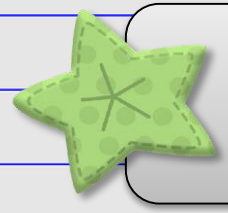
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًّا،
وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\sqrt{7^{0.5}}$





تـــــدرب

$2^{1.5}$ ، $y = 2^x$ (1

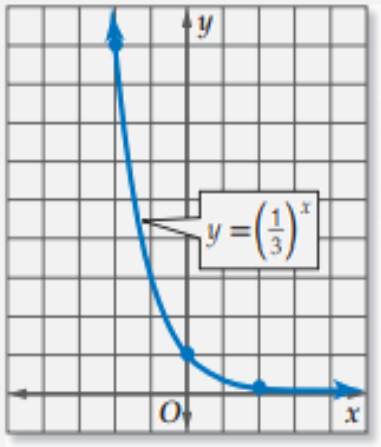
مثال ٢

a) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{3})^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

إرشادات للدراسة

$a < 0$

إذا كانت قيمة a سالبة، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x.



x	$(\frac{1}{3})^x$	y
−2	$(\frac{1}{3})^{-2}$	9
0	$(\frac{1}{3})^0$	1
2	$(\frac{1}{3})^2$	$\frac{1}{9}$

عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(1 , 0)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{3})^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

عندما $x = -1.5$، فإن قيمة $y \approx 5.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $(\frac{1}{3})^{-1.5} \approx 5.19615$).

تمثيل الدالة الأسية عندما $0<b<1, a>0$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{2})^x$ بيانيًّا،
وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{2})^{-2.5}$
ذلك.

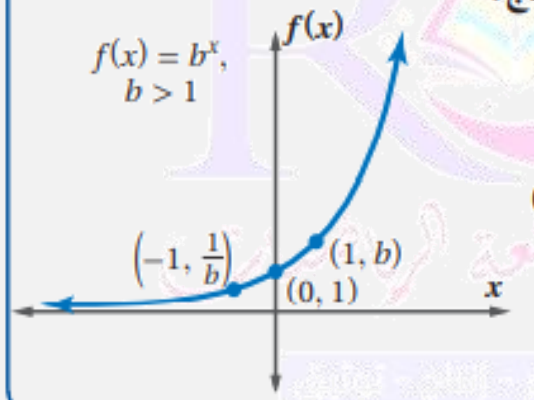
النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**، فالدالة $y = 3^x$ الواردة في المثال 1 هي دالة نمو أسي.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = b^x, b > 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية(R)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة(R^+)
خط التقارب:	المحور x
مقطع المحور y:	1

النموذج:



يمكنك تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل الدوال الأسية، كما يمكنك الاستفادة من النقاط: $(-1, \frac{1}{b})$, $(0, 1)$, $(1, b)$

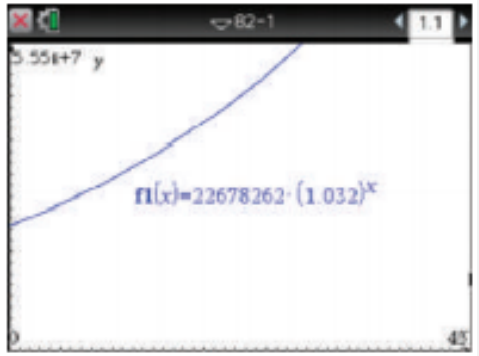
لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x. ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a(1 + r)^t$، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 + r)$ ويُسمى **عامل النمو**.

وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مثال ٣

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431-1425 3.2% تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثّل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

$$y = 22678262\,(1.032)^t$$

b) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.

تمثيل دوال النمو الأسي بيانيا

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3

تحقق من فهمك

3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنويًا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430 هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

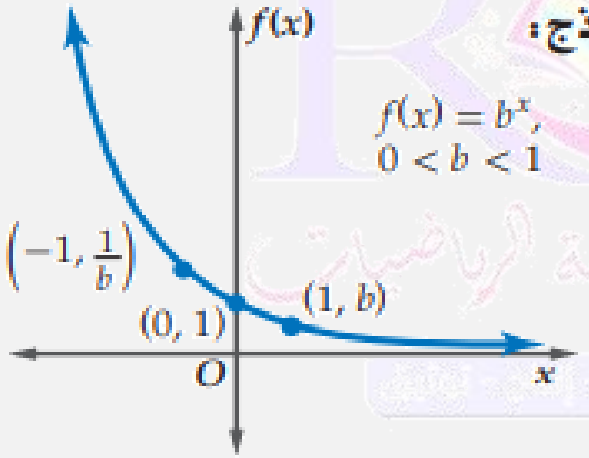
الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$ دالة **الاضمحلال الأسّي**، فالدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ الواردة في المثال 2 هي دالة اضمحلال أسي.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, 0 < b < 1$

النموذج:



خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

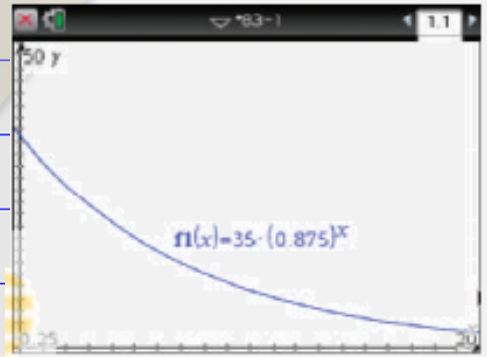
يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1 - r)^t$، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.

مثال ٤

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريبًا من كمية الكافايين من أجسامهم في الساعة.



a) أوجد دالة أسّية تمثّل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

$$y = a(1 - r)^t$$
$$= 35(1 - 0.125)^t$$
$$= 35(0.875)^t$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$ — المعادلة من الفرع a

$= 35(0.875)^3$ — عوّض 3 بدلًا من الزمن t

≈ 23.45 — استعمل الحاسبة

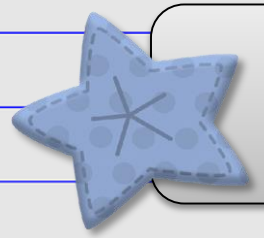
سيبقى في جسم هذا الشخص $23.45mg$ من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيا

تطوير - إنتاج - توثيق

بسمة math

1+2=3



تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التحويلات الهندسية

التحويلات الهندسية: تؤثّر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من دالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي كما هو الحال في باقي الدوال، وستقتصر دراستنا على بعض التحويلات الهندسية لهاتين الدالتين.

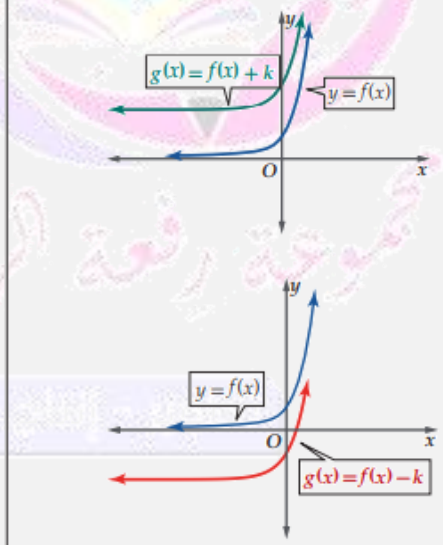
مفهوم أساسي

الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

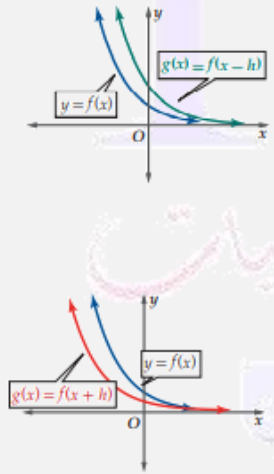
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



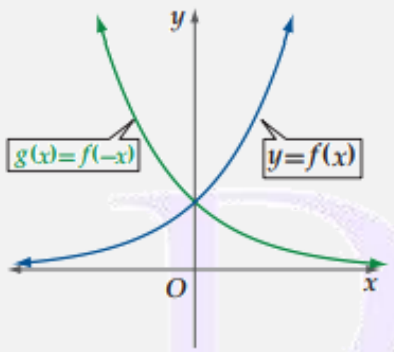
مجموعة رفعة الرياضيات
بسمة math

التحويلات الهندسية

مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .

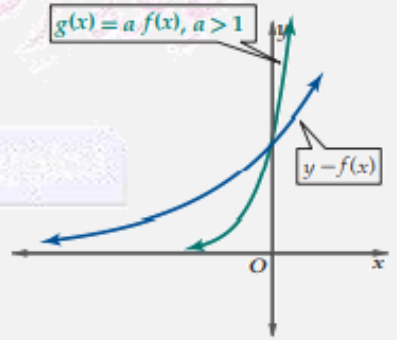


مفهوم أساسي

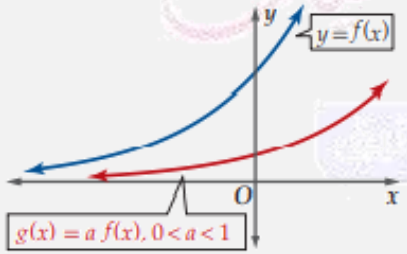
التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.



تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



إرشادات للدراسة

الاضمحلال الأسي:

تأكد من عدم الخلط بين تصييق التمثيلات البيانية، حيث $|a| < 1$. والاضمحلال الأسي، حيث $0 < b < 1$

مقطع توضيحي

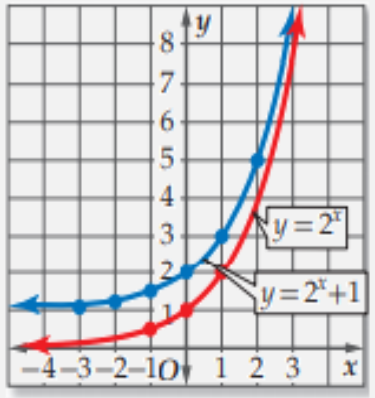
مثال ٥

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدِّد مجالها، ومداها:

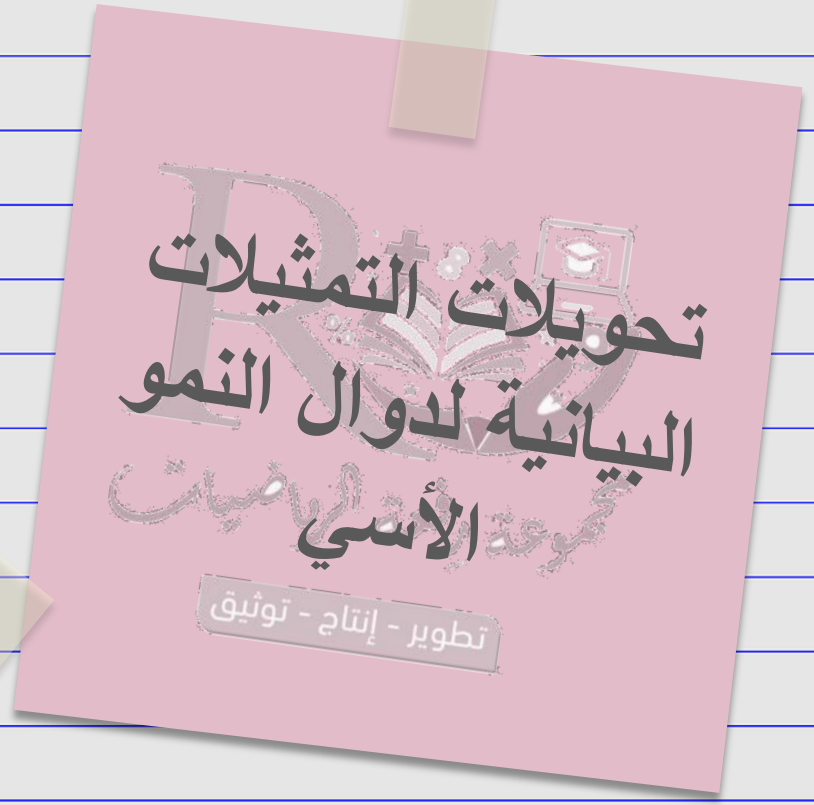
a) $y = 2^x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2 > 1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1, b)$، $(0, 1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1, 2)$، $(0, 1)$، $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$، والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$، بما أن $k = 1$ فإن المعادلة $y = 2^x + 1$ تمثّل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبالاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x + 1$ يكون كما هو موضح أدناه.

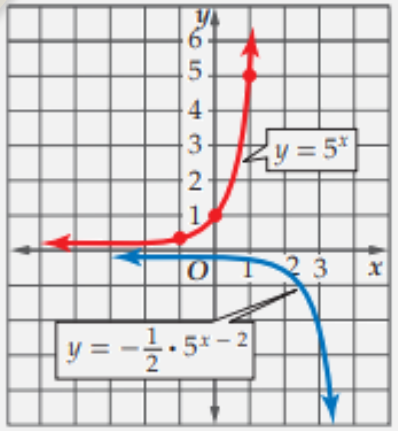
x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3} + 1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} + 1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} + 1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^0 + 1$	2
1	$2^1 + 1$	3
2	$2^2 + 1$	5



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$



مثال ٥



b) $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,5)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{5}\right)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًّا.
- $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي للتمثيل البياني.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

تطوير - إنتاج - توثيق

بسمة math

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 5 هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R). تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني مع اقتراب x من مالانهاية أو سالب مالانهاية. نلاحظ في المثال $(5a)$ أنه مع اقتراب x من مالانهاية، تقترب y من مالانهاية أيضًا، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من 1. وفي المثال $(5b)$ عندما تقترب x من مالانهاية فإن y تقترب من سالب مالانهاية، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تصرب من الصفر.

إرشادات للدراسة

تمثيل تحويلات الدالة الأسية بيانيًا

يمكن استعمال إحدى الطريقتين الآتيتين؛ لتمثيل تحويلات دوال النمو الأسي والاضحلال الأسي بيانيًا:

- استعمال التحويلات الهندسية للدالة الأم، وتعزيز ذلك بجدول لقيم الدالة عندما لا تكون التحويلات الهندسية كافية وواضحة؛ لمزيد من الدقة، كما في المثال **5A**
- استعمال التحويلات الهندسية للدالة الأم فقط، كما في المثالين **5B , 6**

تحقق من فهمك

(5A $y = 2^{x+3} - 5$

(5B $y = 0.1(6)^x - 3$

تـــــدرب

$f(x) = 2(3)^x$ (7

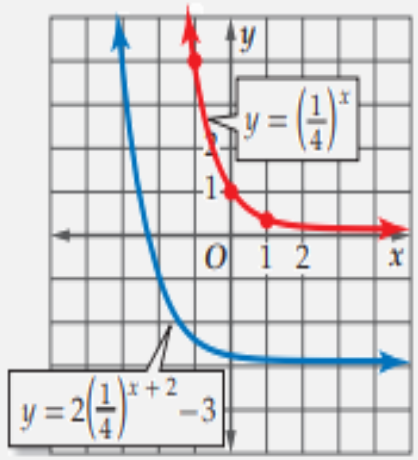
$f(x) = 3^{x-2} + 4$ (10

$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$ (18

مثال ٦

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$ ؛ فالدالة دالة اضمحلال أسي، لذا استعمل النقاط $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ ، $(0,1)$ ، $(-1,4)$



والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .

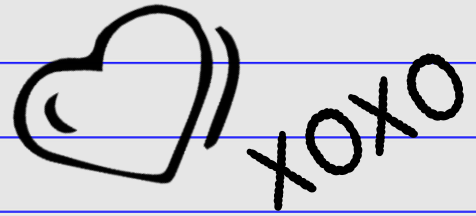
تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيا

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تـــــدرب

6) $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

مجموعة رفعة الرياضيات



تدرب

29) تبرير: حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك.

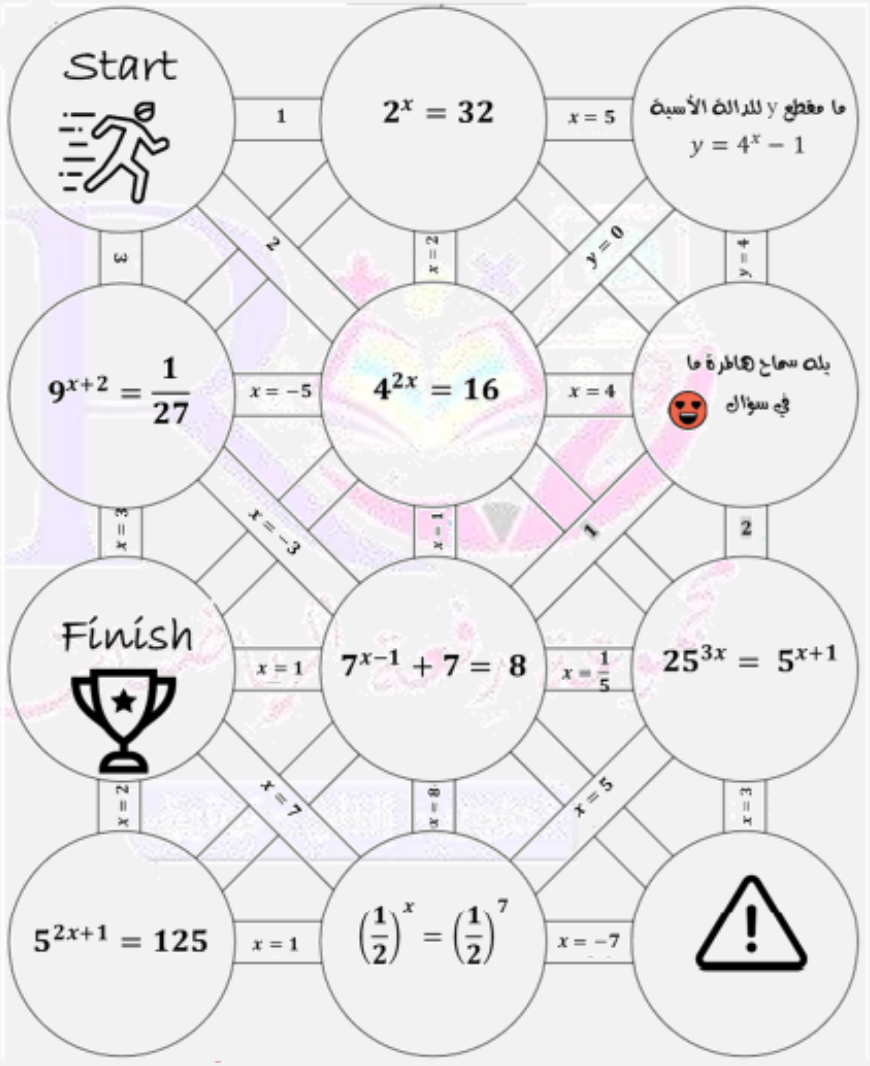
a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y.

40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$؟

A 3　　C 1

B 2　　D 0

العب واستمتع



جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :