$1+2=3$

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

٢-٣

المفردات:

اللوغاريتم	logarithm
الدالة اللوغاريتمية	logarithmic function

فيما سبق :

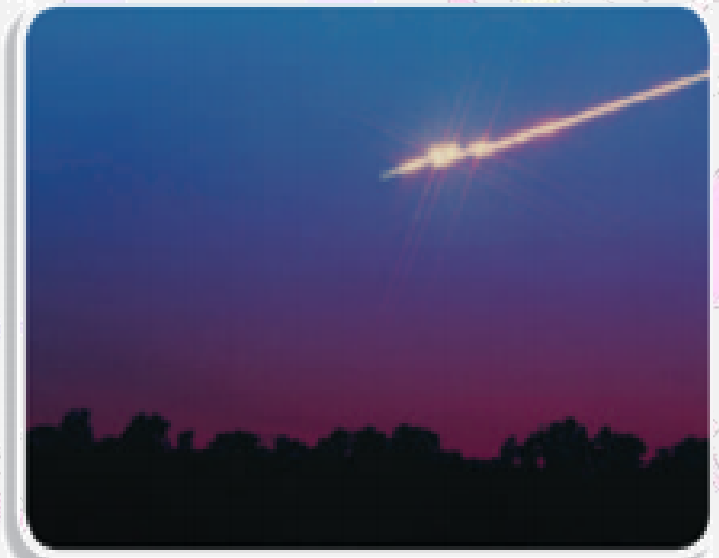
درست إيجاد الدالة العكسية لدالة .

والآن :

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية
- أمثل دوال لوغاريتمية بيانيا .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

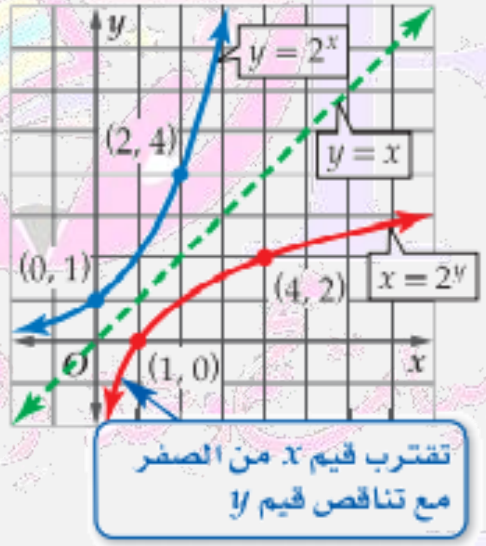
لماذا؟



يُرجّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال والعبارات اللوغاريتمية: يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًّا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.



$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مفهوم أساسي

اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \text{ إذا وفقط إذا كان } b^y = x$$

مثال:

$$\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مقطع توضيحي

مثال ١

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

التحويل من الصورة اللوغاريتمية الى الصورة الأسية

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٢

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a) $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

التحويل من الصورة الأسية الى الصورة اللوغاريتمية

تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

$\log_4 16 = 2$ (1A

$\log_3 729 = 6$ (1B

$125^{\frac{1}{3}} = 5$ (2B

تـــــدرب

(11 $9^{-1} = \frac{1}{9}$

(6 $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

مثال ٣

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

بفرض أن العبارة اللوغاريتمية تساوي y — $\log_{16} 4 = y$

تعريف اللوغاريتم — $4 = 16^y$

$16 = 4^2$ — $4^1 = 4^{2y}$

خاصية المساواة للدوال الأسية — $1 = 2y$

اقسم كلا الطرفين على 2 — $\frac{1}{2} = y$

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

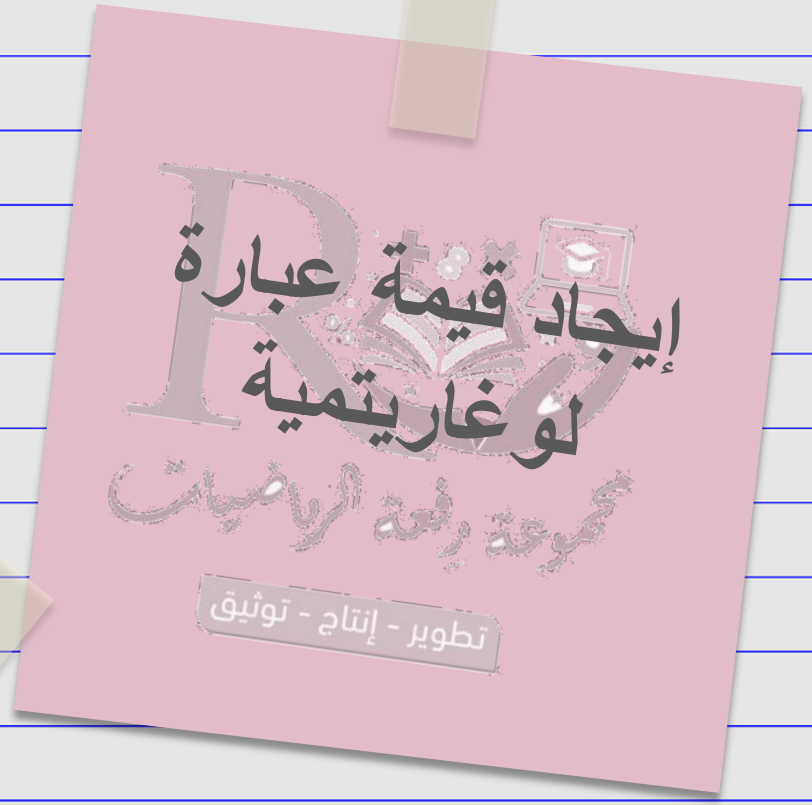
بفرض أن العبارة اللوغاريتمية تساوي y — $\log_7 \frac{1}{49} = y$

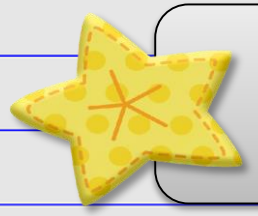
تعريف اللوغاريتم — $\frac{1}{49} = 7^y$

$\frac{1}{49} = 7^{-2}$ — $7^{-2} = 7^y$

خاصية المساواة للدوال الأسية — $-2 = y$

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

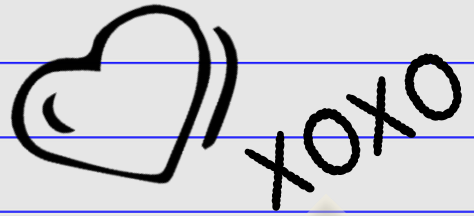




تحقق من فهمك

(3A $\log_3 81$

(3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$



مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:

- $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

مثال ٤

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$

$= 3$

$5^3 = 125$

$\log_b b^x = x$

b) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$

$= -3$

$0.001 = 10^{-3}$

$\log_b b^x = x$

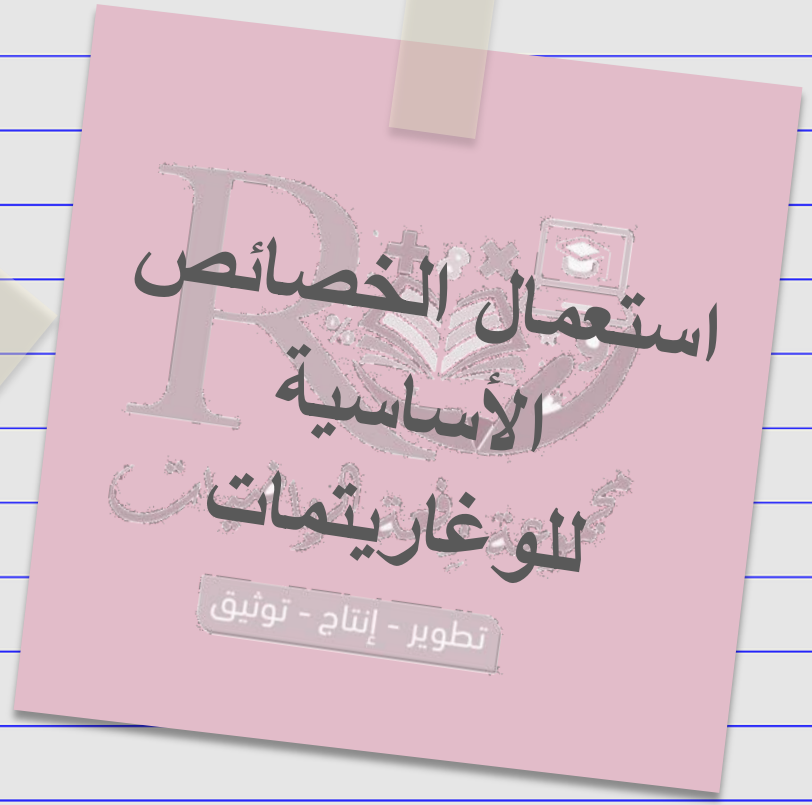
c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$

$b^{\log_b x} = x$

d) $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$، فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.



تحقق من فهمك

(4A $\log_9 81$

(4B $3^{\log_3 1}$

تدرب

(26 $\log_{27} 3$

(27 $\log_{32} 2$

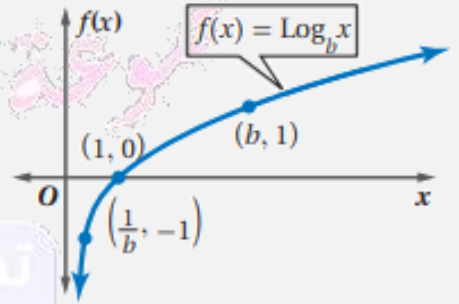
(28 $\log_{121} 11$

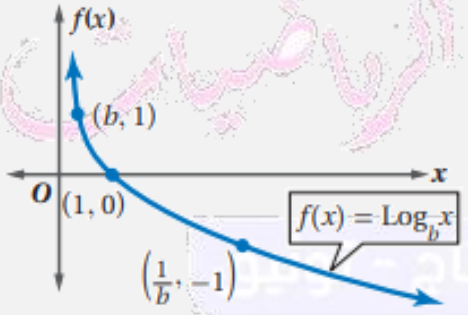
مقطع توضيحي

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = \log_b x,\ b>1$	الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = \log_b x,\ 0<b<1$
خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد	خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)	المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)	المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
خط التقارب: المحور y	خط التقارب: المحور y
مقطع المحور x: 1	مقطع المحور x: 1

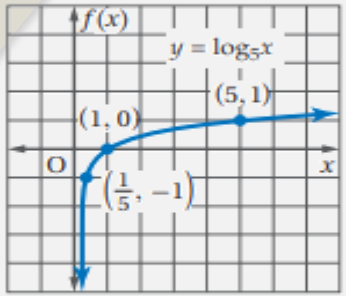




مثال ٥

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

(a $f(x) = \log_5 x$



الخطوة 1: حدّد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

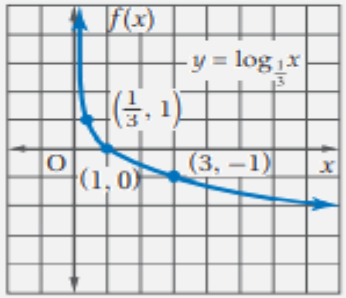
بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $\left(\frac{1}{5}, -1\right), (1, 0), (5, 1)$.

الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

(b $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

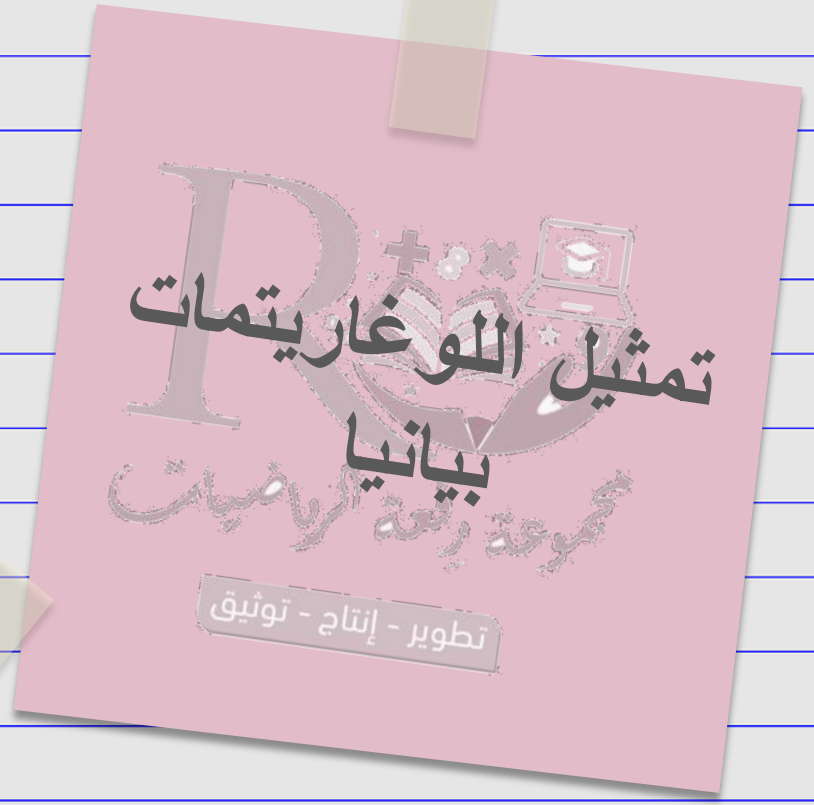


الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $\left(\frac{1}{3}, 1\right), (1, 0), (3, -1)$.

الخطوة 3: ارسم المنحنى.



تحقق من فهمك

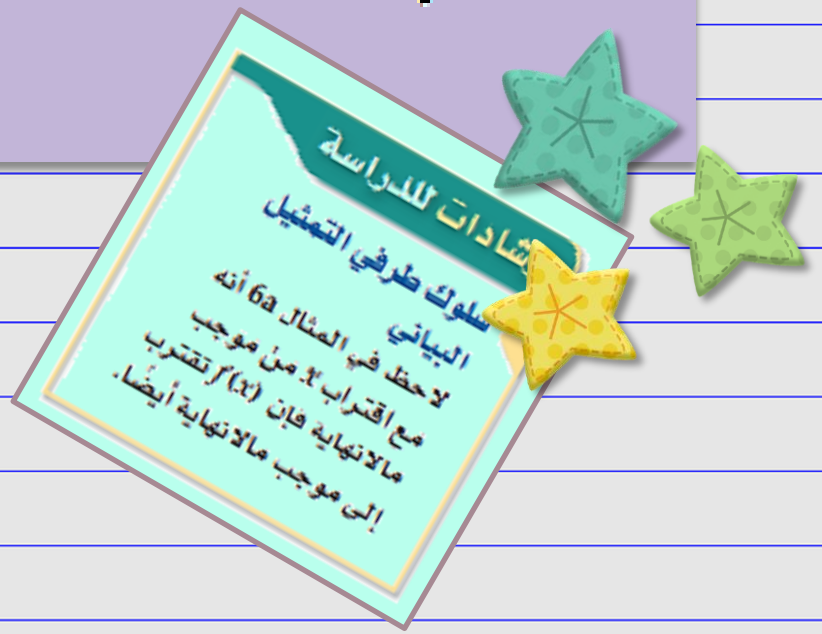
(5A $f(x) = \log_2 x$

(5B $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

$1+2=3$

وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

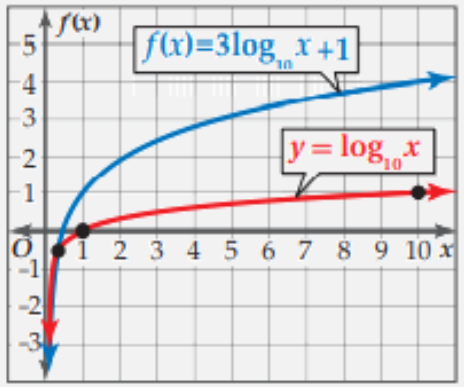


مثال ٦

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a $f(x) = 3\log_{10} x + 1$

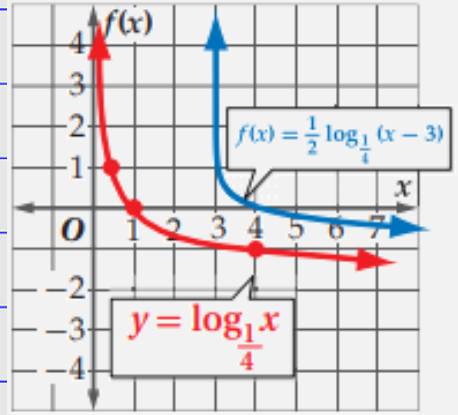
حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10 > 1$ فاستعمل النقاط $(b\ ,\ 1)$ ، $(1\ ,\ 0)$ ، $(1\ ,\ -1)$ ، $(\frac{1}{b}\ ,\ -1)$، أي النقاط $(10\ ,\ 1)$ ، $(1\ ,\ 0)$ ، $(\frac{1}{10}\ ,\ -1)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.



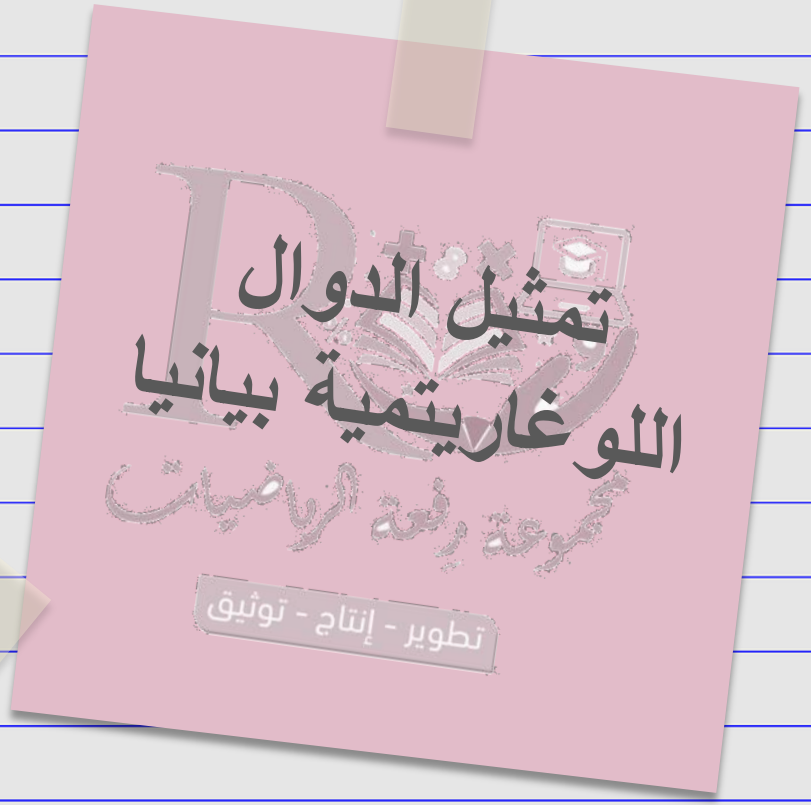
- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.

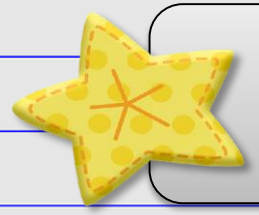
b $f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} (x - 3)$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.



- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.





تحقق من فهمك

(6A $f(x) = 2\log_3(x-2)$

(6B $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

مثال ٧

هزات أرضية : يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$ الدالة الأصلية

$= 10^{9.2-1}$ عوّض 9.2 بدلاً من x

$= 10^{8.2}$ بسّط

$= 158489319.2$ استعمل الحاسبة

b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

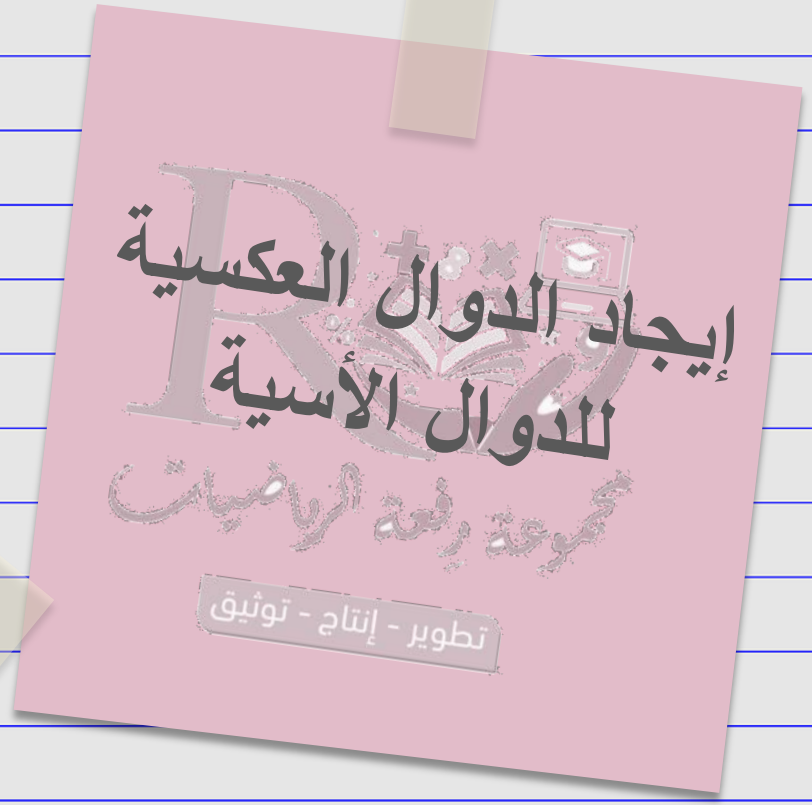
بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

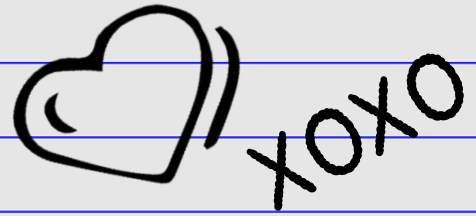
$y = 10^{x-1}$ المعادلة الأصلية

$x = 10^{y-1}$ بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y

$y - 1 = \log_{10} x$ تعريف اللوغاريتمات

$y = \log_{10} x + 1$ أضف العدد 1 لكلا الطرفين





تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب

49) اكتشف المختلف: حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\log_3 9$ $\log_2 4$ $\log_2 16$ $\log_4 16$

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{4}{3}$ D 2

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :