مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

$1+2=3$

خصائص اللوغاريتمات

بسمة math

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

فيما سبق :

فيما سبق درست إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية .

والآن :

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية .
- أبسط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات .

خصائص اللوغاريتمات

٤-٢

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

لماذا؟

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $pH = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$\log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}} + \log_{10}[H^+]_{\text{للماء النقي}} = -pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$

والتي تكتب بالشكل :

$$\log_{10}\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$

، وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

مقطع توضيحي

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي — خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي — خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y.$$

مثال:

$$\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$$

مثال ١

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$$

$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$

$$= \log_4 4^3 + \log_4 3$$

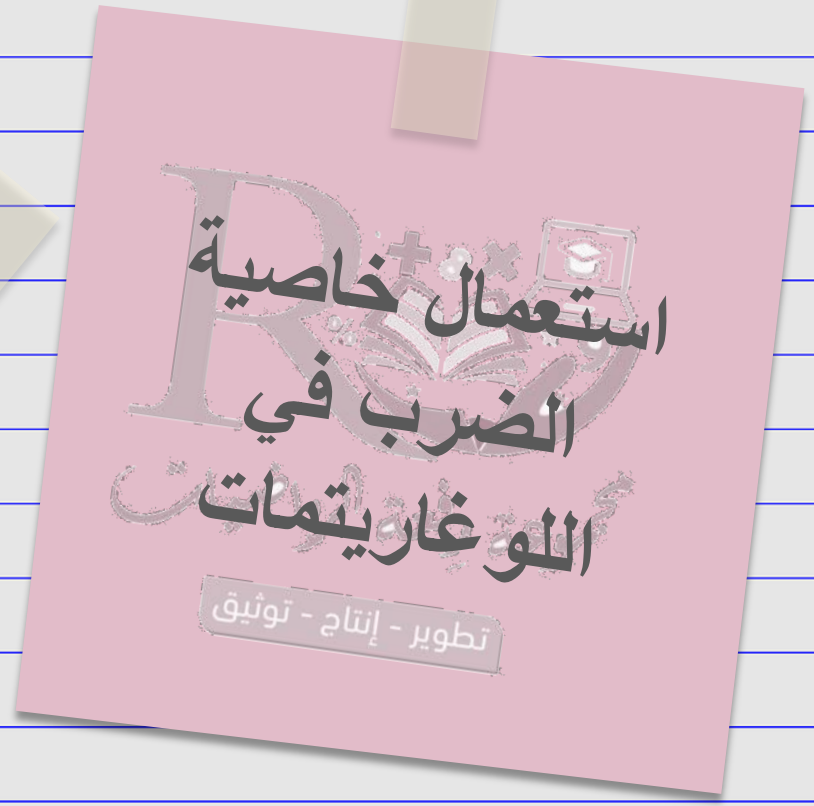
خاصية الضرب في اللوغاريتمات

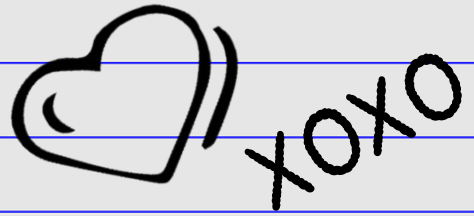
$$= 3 + \log_4 3$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$$

$\log_4 3 \approx 0.7925$

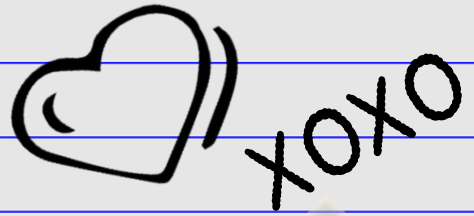




تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



مفهوم أساسي

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال:

$$\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$$

مثال ٢

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$$\log_6 7.2 = \log_6 \left(\frac{36}{5}\right)$$

$7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

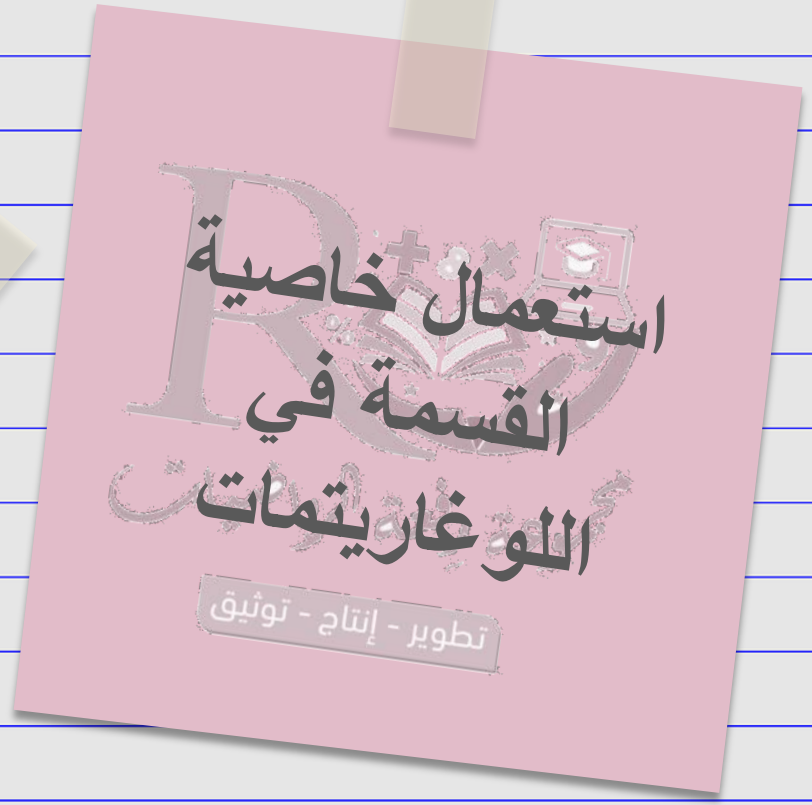
$$= \log_6 6^2 - \log_6 5$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$= 2 - 0.8982$$

$\log_6 5 \approx 0.8982$

$$= 1.1018$$



1+2=3

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تـــــدريب

1) $\log_4 15$

4) $\log_4 0.6$

مثال ٣

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $\mathrm{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

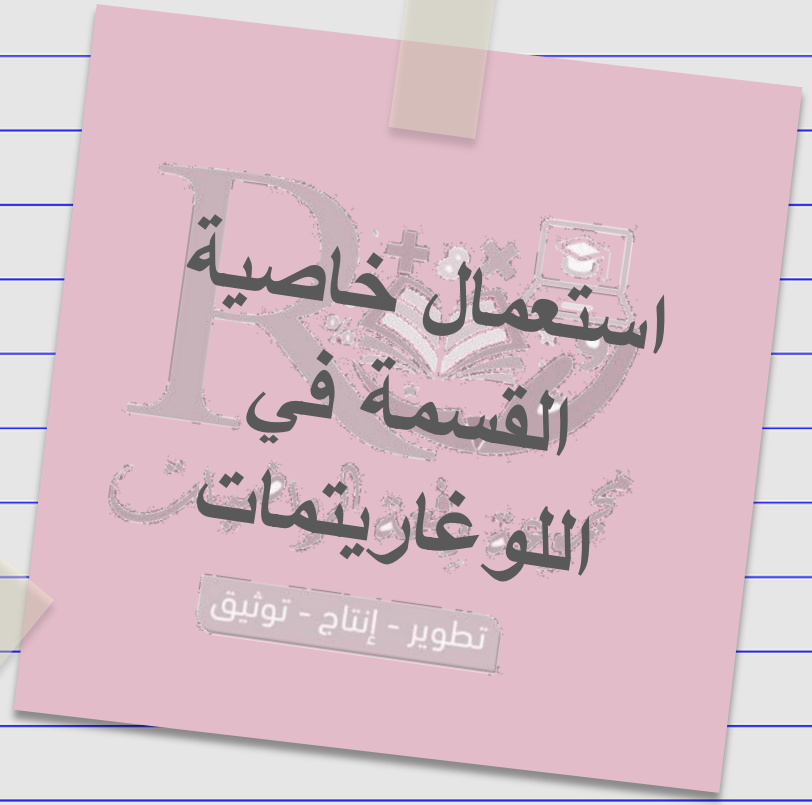
حُلّ:

$\mathrm{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	المعادلة الأصلية
$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$\mathrm{pH} = 4.2$
$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$	$\log_{10} 1 = 0$
$4.2 = -\log_{10} [H^+]$	بسّط
$-4.2 = \log_{10} [H^+]$	اضرب كلا الطرفين في -1
$10^{-4.2} = [H^+]$	تعريف اللوغاريتم

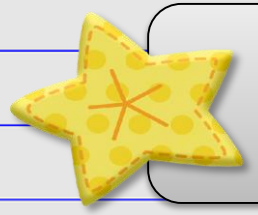
إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق:

$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$\mathrm{pH} = 4.2$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$	عوّض $[H^+] = 10^{-4.2}$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$4.2 = 4.2$ ✓	



$1+2=3$



تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .

مجموعة رفعة الرياضيات

مفهوم أساسي

خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال:

$$\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$$

مثال ٤

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$\log_2 25 = \log_2 5^2$ $\quad 5^2 = 25$

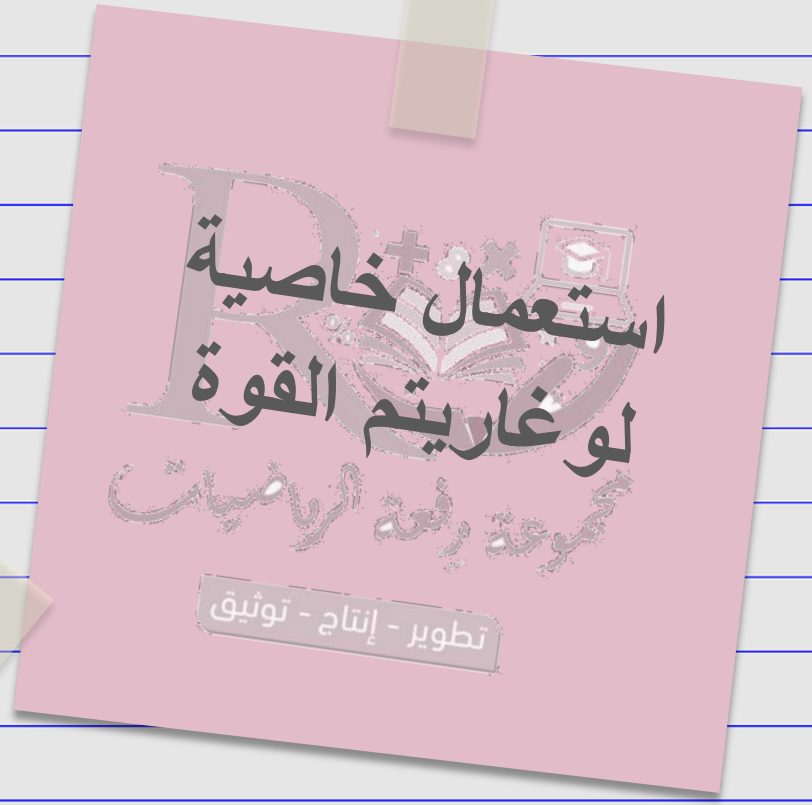
$= 2 \log_2 5$ خاصية لوغاريتم القوة

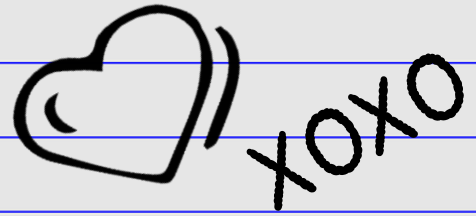
$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$ $\quad \log_2 5 = 2.3219$

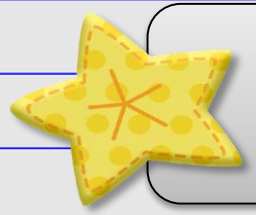
إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة

يمكنك التحقق من إجابة مثال 4 بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$ مستعملاً الحاسبة والإجابة التي ستحصل عليها هي 25 تقريبًا، ولكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ فهذا يعني أن $2^{4.6438} \approx 25$.







تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

مجموعة رفعة الرياضيات

تمرين

إذا كان $\log_3 5 \approx 1.465, \log_5 7 \approx 1.2091, \log_6 8 \approx 1.1606$,
$\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: (مثال 4)

12) $\log_3 25$

13) $\log_5 49$

مقطع توضيحي

مثال ٥

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

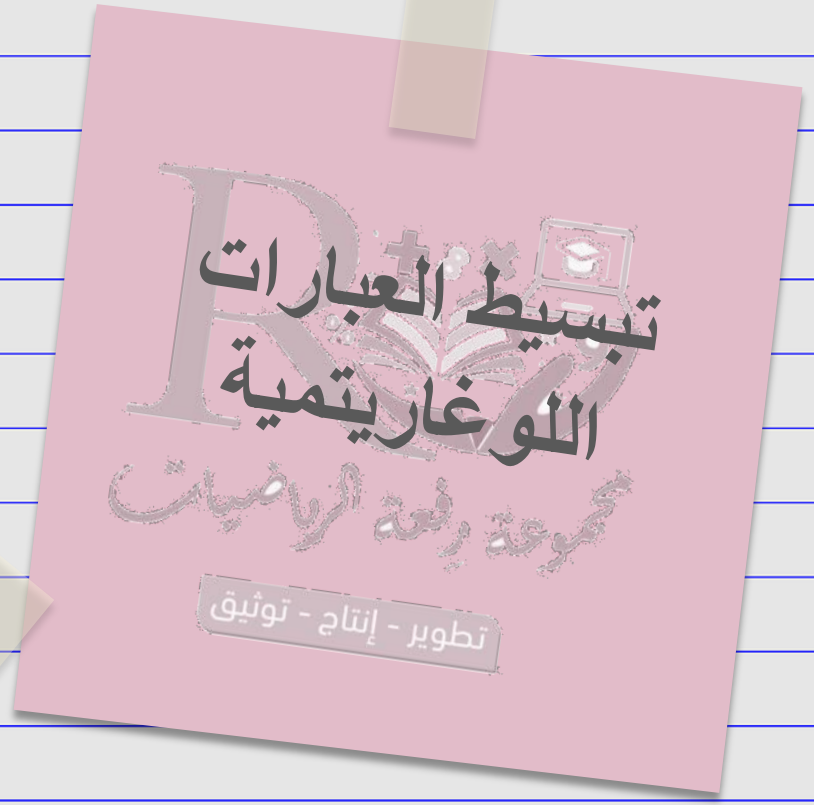
$$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}} \qquad \sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$$

$$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}} \qquad 4^3 = 64$$

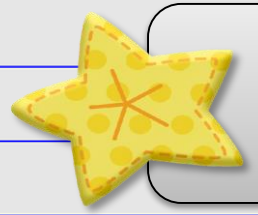
$$= \log_4 4^{\frac{3}{5}} \qquad \text{خاصية قوة القوة}$$

$$= \frac{3}{5} \log_4 4 \qquad \text{خاصية لوغاريتم القوة}$$

$$= \frac{3}{5} (1) = \frac{3}{5} \qquad \log_b b = 1$$

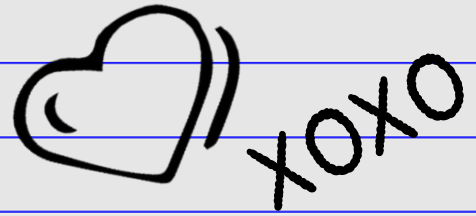


تحقق من فهمك



5A $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B $\log_7 \sqrt[6]{49}$



تـــــدرب

18) $\log_5 \sqrt[4]{25}$

19) $\log_2 \sqrt[5]{32}$

مثال ٦

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

(a $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$$ خاصية لوغاريتم القوة

(b $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$$ خاصية لوغاريتم القوة

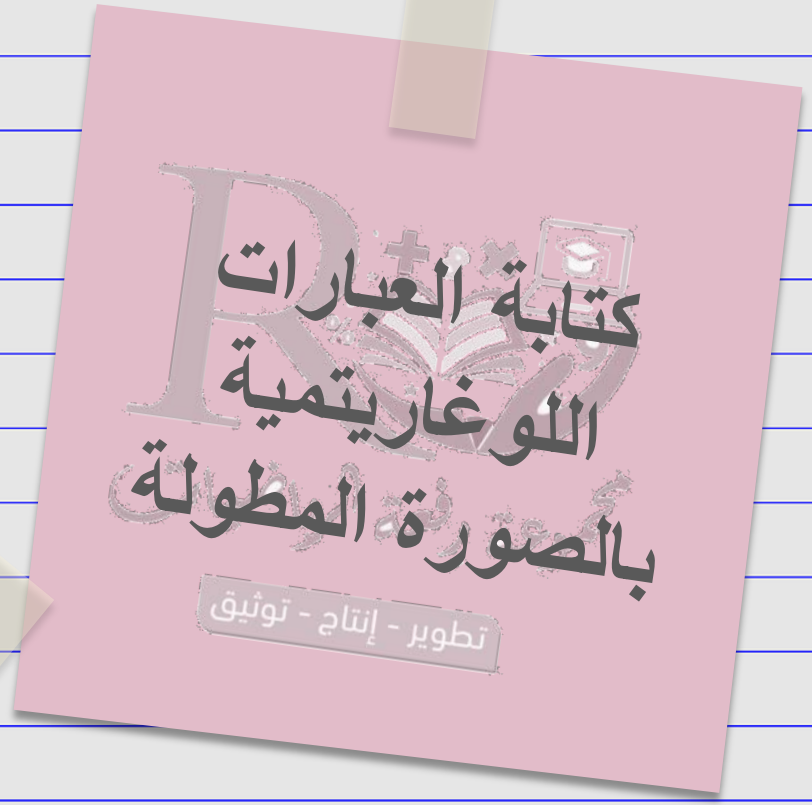
(c $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

$$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$\sqrt[5]{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{5}}$

$$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \log_3 (x-1) - \frac{1}{5}\log_3 (3-2x)$$



تحقق من فهمك

$\log_{13} 6a^3bc^4$ (6A

$\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$ (6B

$\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$ (6C

مثال ٧

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

(a $4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x+6)$

خاصية لوغاريتم القوة $4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$

$(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$ $= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات $= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$

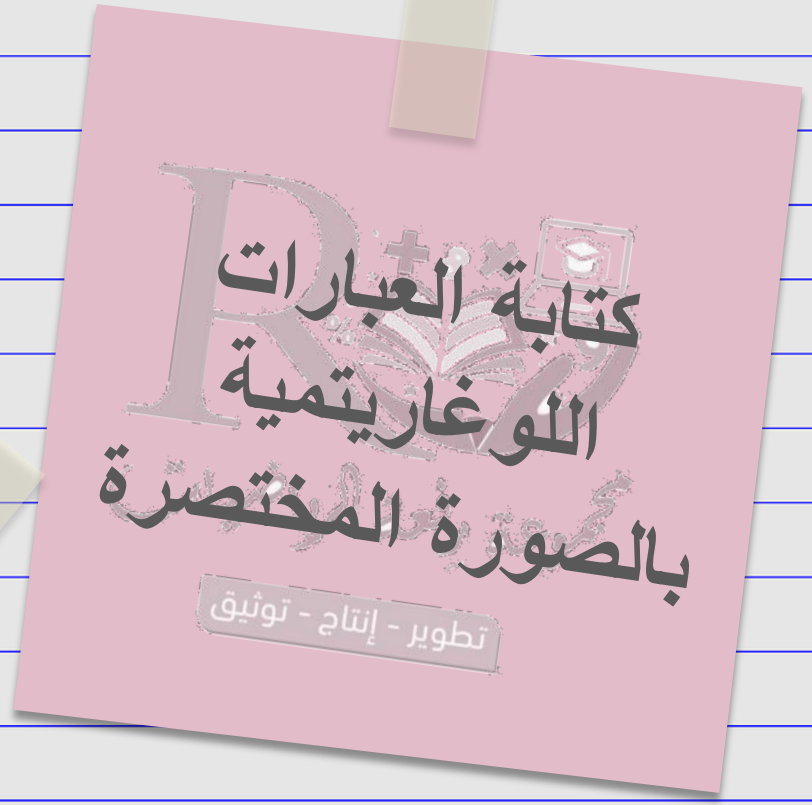
بإنطاق المقام $= \log_3 \frac{x^4 \sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$

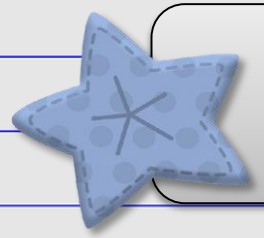
(b $0.5 \log_7 (x+2) + 6 \log_7 2x$

خاصية لوغاريتم القوة $0.5 \log_7 (x+2) + 6 \log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$

$(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2}, 2^6 = 64$ $= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64 x^6$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات $= \log_7 64 x^6 \sqrt{x+2}$





تحقق من فهمك

(7A $-5\log_2(x+1)+3\log_2(6x)$

(7B $\log_3(2x-1)-\frac{1}{4}\log_3(x+1)$

تدرب

24) $\log_9 6x^3y^5z$

30) $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x)$

1+2=3

تـــــدريب

(64 ما قيمة $2\log_5 3 - 2\log_5 8 - \log_5 12 + 2$ ؟

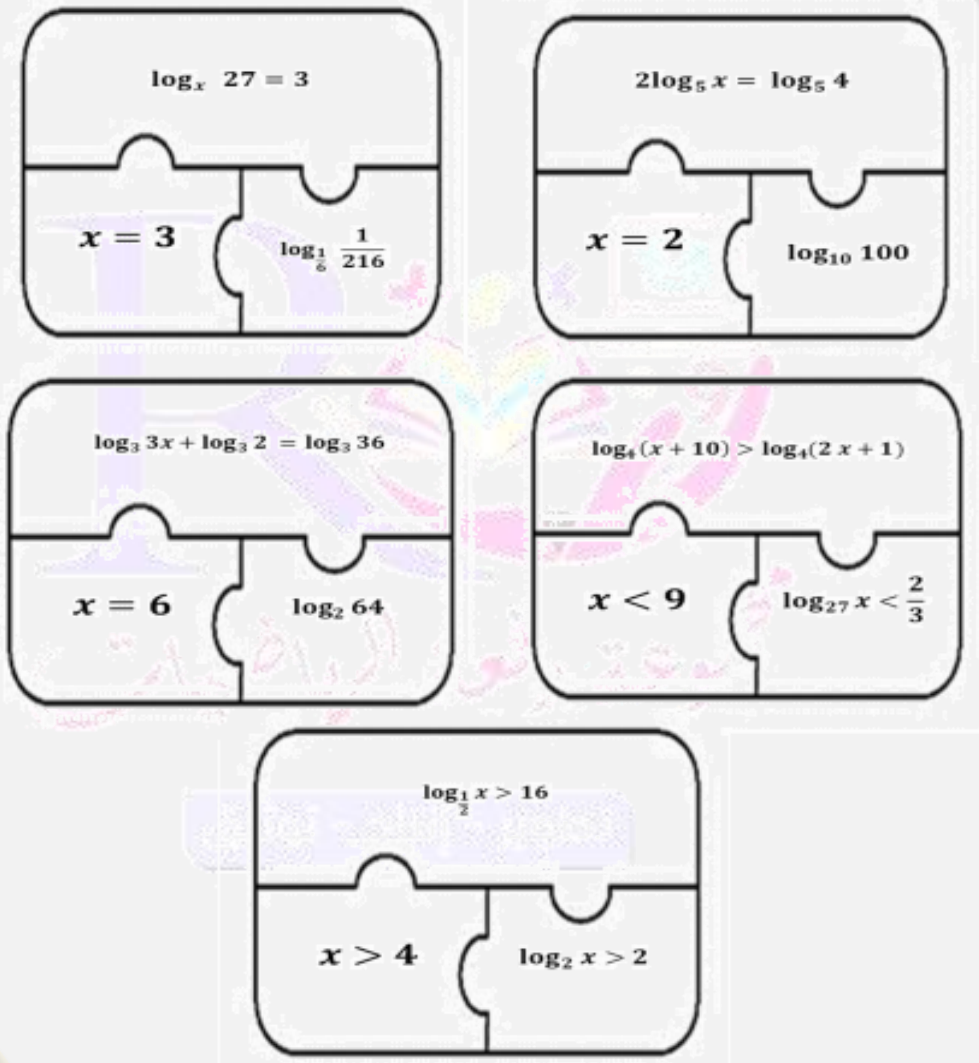
A $\log_5 2$

B $\log_5 0.5$

C $\log_5 3$

D 1

العب واستمتع



بسمه math

$2^{\log_2 6} = 6$

$\log_5 5^8 = 8$

صيغة تغيير الأساس

$$\log_5 3 = \frac{\log_a 3}{\log_a 5}$$

$\log_b(-9) \notin \mathbb{R}$

$\log_b 0 \notin \mathbb{R}$

$\log_b 1 = 0$

$\log_4 x = \log_4 8 \Leftrightarrow x = 8$

خصائص اللوغاريتمات

لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتم عوامله

$\log_6(5 \times 7) = \log_6 5 + \log_6 7$

لوغاريتم حاصل القسمة هو طرح لوغاريتم عوامله

$$\log_5 \frac{12}{3} = \log_5 12 - \log_5 3$$

متباينات log

$\log_3 x > 7 \Leftrightarrow x > 3^7$

$\log_3 x < 7 \Leftrightarrow 0 < x < 3^7$

$\log_3 x > \log_3 2 \Leftrightarrow x > 2$

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :