$1+2=3$

اللوغاريتمات العشرية

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

المفردات:

اللوغاريتم العشري
common logarithm

صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

فيما سبق :

درست تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات

والآن :

- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس

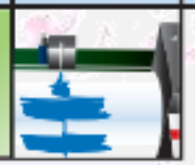
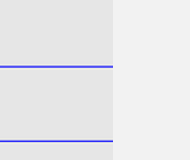
اللوغاريتمات العشرية

٦-٣

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثير في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.
								

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

مقطع توضيحي

1+2=3

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية**، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

مثال ١

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

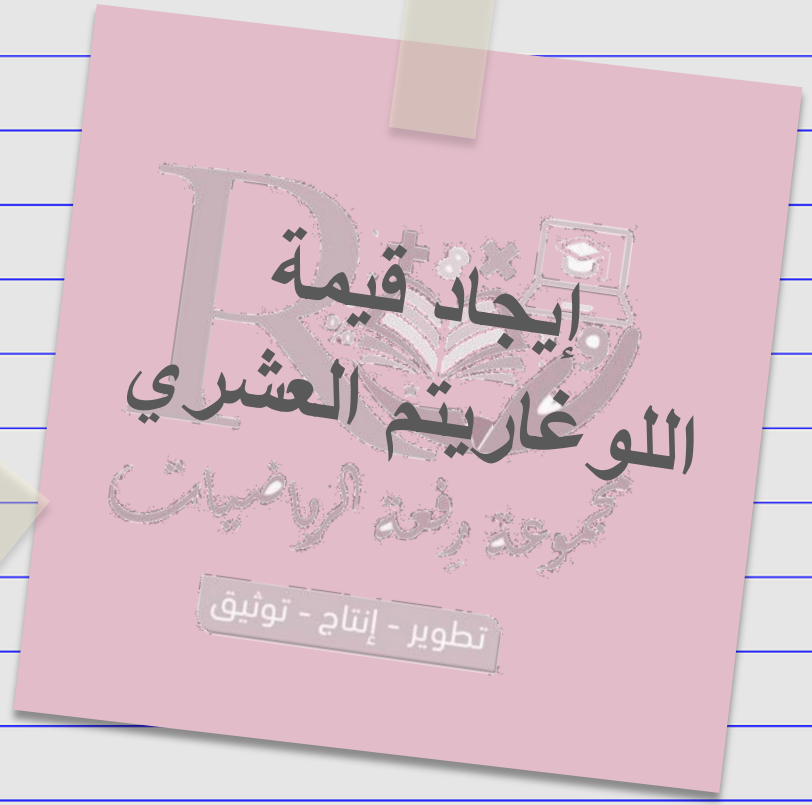
اضغط على المفاتيح: LOG 5 ENTER تجد أن:

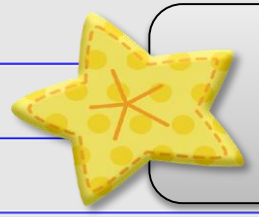
$\log 5 \approx 0.6990$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: LOG 0.3 ENTER تجد أن:

$\log 0.3 \approx -0.5229$

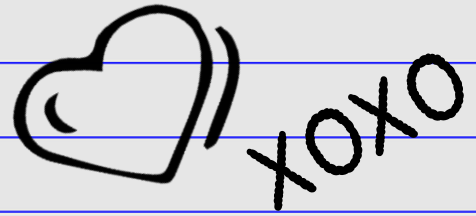




تحقق من فهمك

1A $\log 7$

1B $\log 0.5$



تدرب

(5 $\log 11$

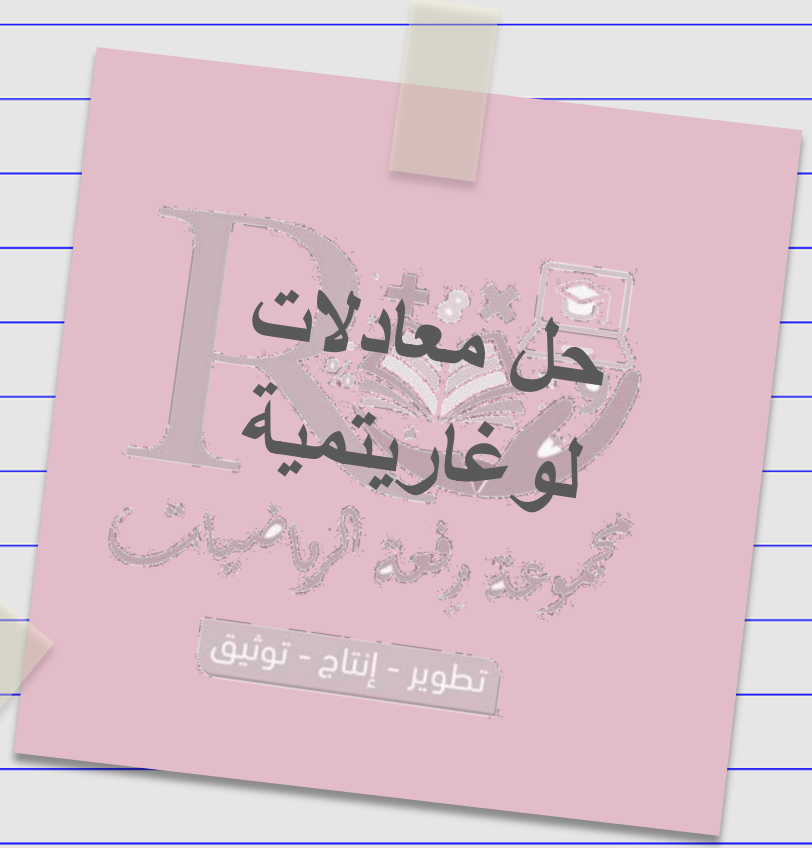
(6 $\log 3.2$

مثال ٢

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	$L = 66.6, m = 1$
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط
$I = 10^{6.66}$	الصورة الأسية
$I \approx 4570882$	استعمل الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3

تحقق من فهمك

2) هزات أرضية: ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

إرشادات للدراسة

وحدة الجول:
تذكر أن الجول هو وحدة قياس الطاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج $= 4^{-7}$ جول

بسمة math

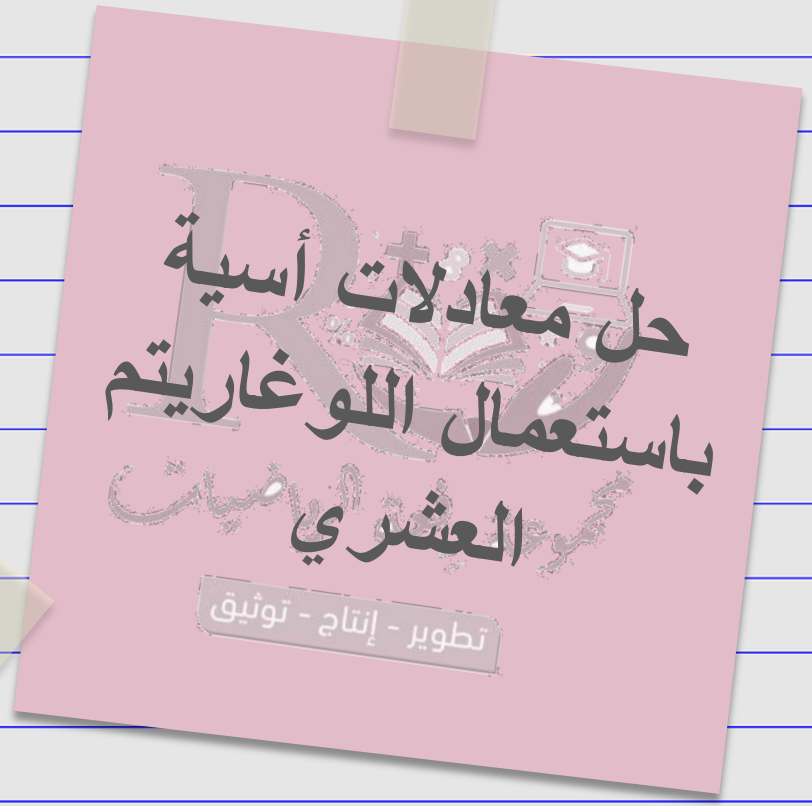
مقطع توضيحي

مثال ٣

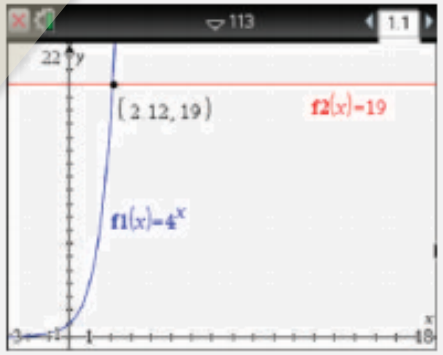
حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.1240$	استعمل الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا .



مثال ٣



تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًّا باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** في الحاسبة البيانية TI–nspire.

مثّل المعادلة $f1(x) = 4^x$ والمستقيم $f2(x) = 19$ بيانيًّا على الشاشة نفسها. ثم أوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين بالضغط على مفتاح menu، ثم اختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (2.12, 19).

الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبريًّا. ✓

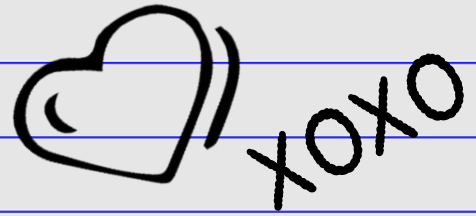
حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(3A $3^x = 15$

(3B $6^x = 42$



تمرين

(17 $9^{b-1} = 7^{b}$

(18 $15^{x^2} = 110$

مثال ٤

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \frac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$
$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$	استعمل الحاسبة

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \stackrel{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \stackrel{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\frac{1}{59049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

إرشادات للدراسة

حل المتباينات

تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يعكس اتجاه رمز التباين.

حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(4A $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

(4B $4^{y} < 5^{2y+1}$

$1+2=3$

تحقق من فهمك

$5^{4n} > 33$ (20

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي

صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$\log_b n$ ← لوغارتيم العدد الأصلي للأساس b

$\log_b a$ ← لوغارتيم الأساس القديم للأساس b

مثال:

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

بسمة math

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

تعريف اللوغاريتم	$a^x = n$
خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	$\log_b a^x = \log_b n$
خاصية لوغاريتم القوة	$x \log_b a = \log_b n$
اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$	$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$
$x = \log_a n$	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

مجموعة رفعة الرياضيات

مثال ٥

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

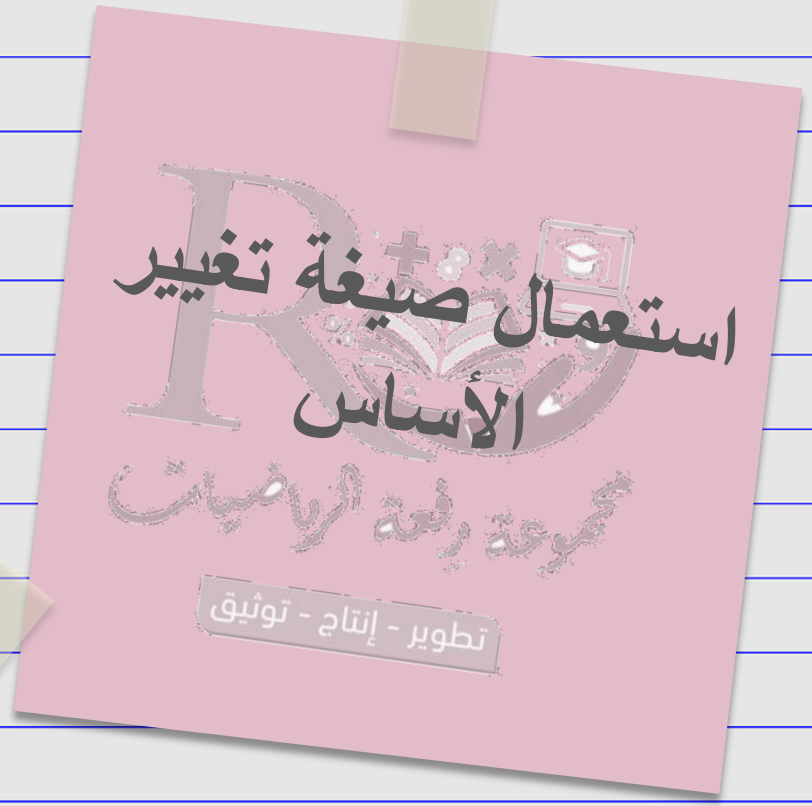
صيغة تغيير الاساس $\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$

استعمل الحاسبة ≈ 2.7268

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي

هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي (848م–780م) لُقّب بأبي الجبر، وهو عالم عربي، أسس علم الجبر ووضع أسسه وابتكر حساب اللوغاريتمات.



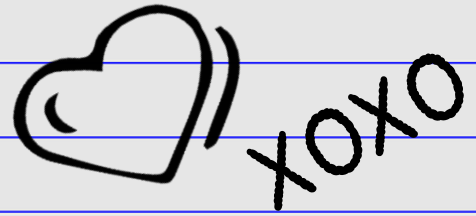
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

بسمة math



تدرب

(26 $\log_3 7$

(27 $\log_2 16$

مثال ٦

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملًا صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

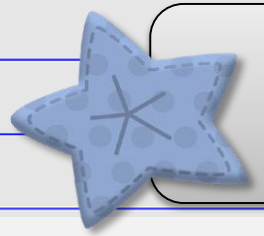
$R = \log_2 n$		المعادلة الأصلية
$= \log_2 240$		$n = 240$
$= \frac{\log 240}{\log 2}$		صيغة تغيير الأساس
≈ 7.9		بسّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة يساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

استعمال صيغة تغيير الأساس

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1+2=3



تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160 خطوة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :