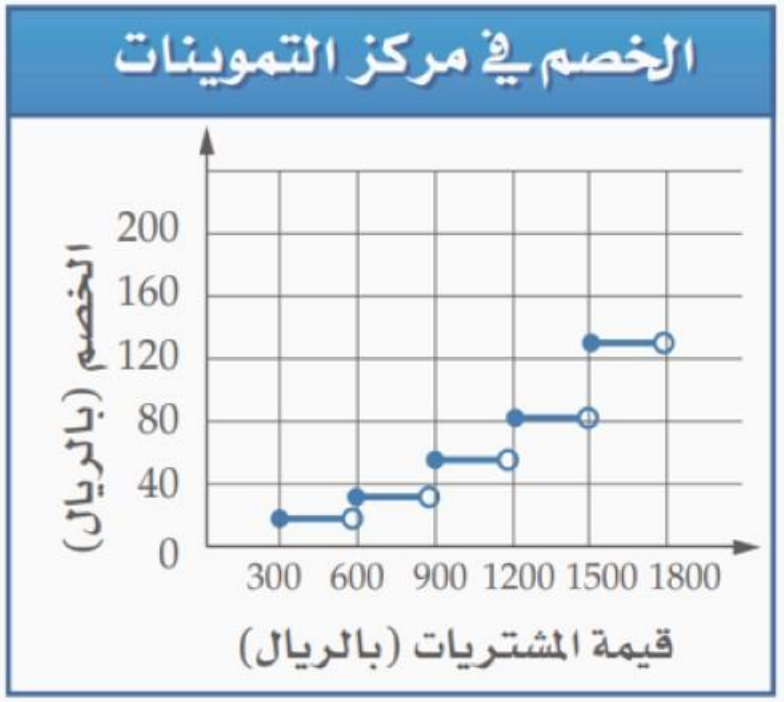
الاتصال والنهايات

Continuity and Limits

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
SLIDESMANIA.COM

لماذا؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=900$, $x=600$.



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

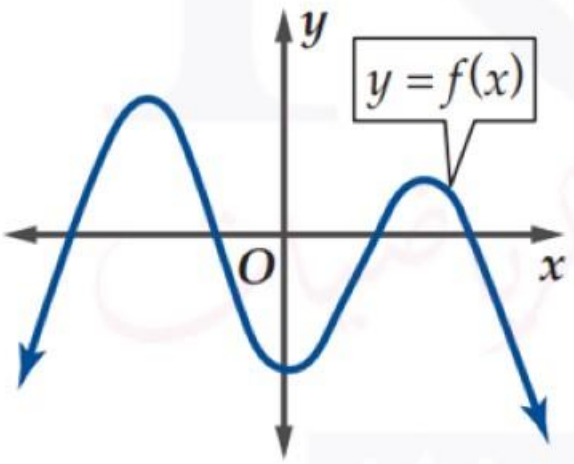
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

الأفكار الرئيسية

- النهايات
- الاتصال
- أنواع الاتصال
- اختبار اتصال الدالة

الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

شروط اتصال الدوال:

تكون الدالة f(x) متصلة عند x=c إذا تحققت الشروط التالية:

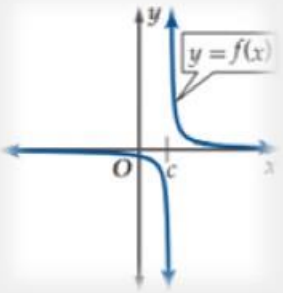
01 أن تكون الدالة f(x) معرفة عند c ، أي أن f(c) موجودة

02 $\lim_{x \to c} f(x)$ أن تكون نهاية الدالة موجودة

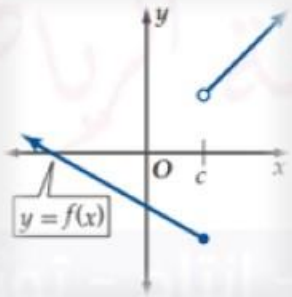
03 $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

أنواع عدم الاتصال

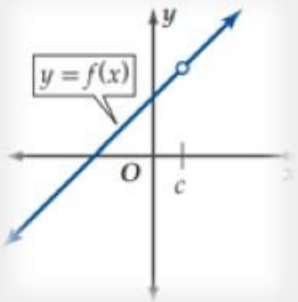
عدم اتصال لا نهائي



عدم اتصال قفزي



عدم اتصال قابل للإزالة



01

النهايات

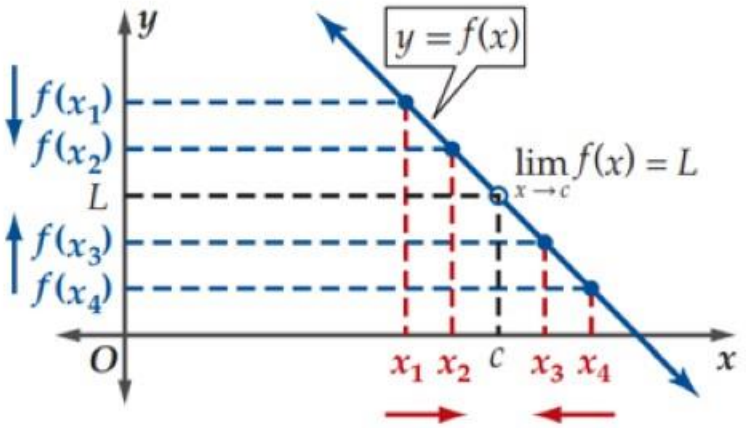
إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

مفهوم أساسي

النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز: نقول: إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

اتصال الدالة $f(c)$ عند $x=c$

01

$f(c) = a$
موجودة (معرفة)

02

لها نهاية

$\lim_{x\to c} f(x)$ **موجودة**

ليس لها نهاية

$\lim_{x\to c} f(x)$ **غيرموجودة**

$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

03

$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c) = a$

متصلة عند $x=c$

$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq f(c) \neq a$

عدم اتصال
(قابل للإزالة)

عدم اتصال
قفزي
(غير قابل للإزالة)

$f(c) \neq a$
غير موجودة

- ✓ أصفار المقام
- ✓ الجذور السالبة
- ✓ بعض دوال متعددة التعريف

لها نهاية

$\lim_{x\to c} f(x)$ **موجودة**

عدم اتصال
(قابل للإزالة)

ليس لها نهاية

$\lim_{x\to c} f(x)$ **غيرموجودة**

$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

عدم اتصال
لا نهائي
(غير قابل للإزالة)

تدريب

حدّد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$، عند $x = -5$.

تدريب

حدّد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال

4) $g(x) = \frac{x}{x-1}$، عند $x = 1$.

تدريب

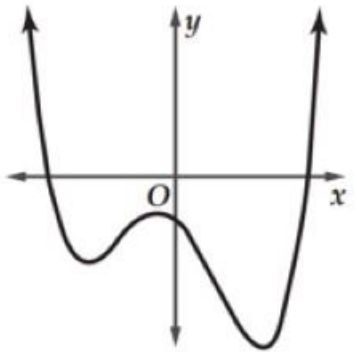
(5 $h(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+4}$ ، عند $x = 1 \, , x = 4$

تدريب

7) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , \quad x \leq -6 \\ -x + 2 & , \quad x > -6 \end{cases}$ ، عند $x = -6$.

تدريب على اختبار

58) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟

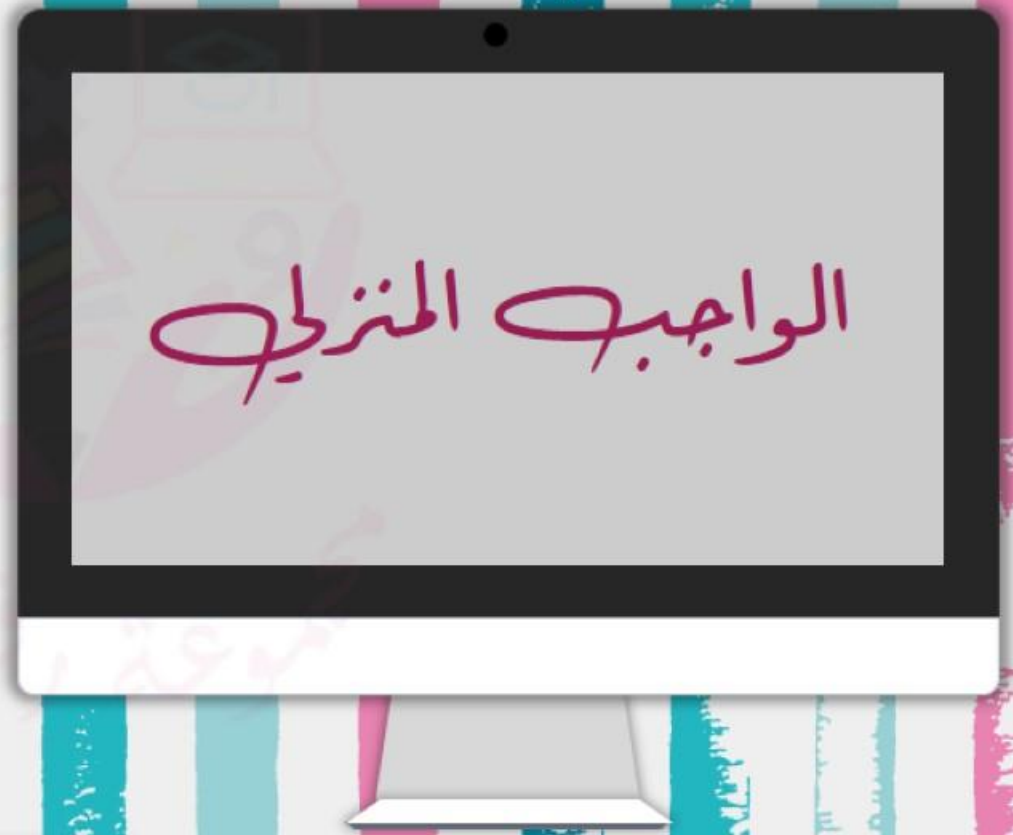


1 **A**

2 **B**

3 **C**

4 **D**



(2 $f(x) = \sqrt{x+5}$ ، عند $x = 8$.

(3 $h(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x+6}$ ، عند $x = -6$

(4 $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ، عند $x = 1$.

صفحة 37