1-7

العلاقات والدوال العكسية

Inverse Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد تركيب دالتين.

كيف يتم تحديد مجال
تركيب دالتين ؟

والآن:

- أستعملُ منحنيات الدوال لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تمثّل دالة أم لا.
- أجِدُ الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا.

كيف يمكن معرفة ما إذا
كانت العلاقة تمثل دالة ؟

المفردات:

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

الدالة المتباينة
one-to-one function

العلاقة العكسية
inverse relation

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B.

إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجود في إحدى العلاقتين فإن (a, b) يكون موجودًا في الأخرى.

العلاقة

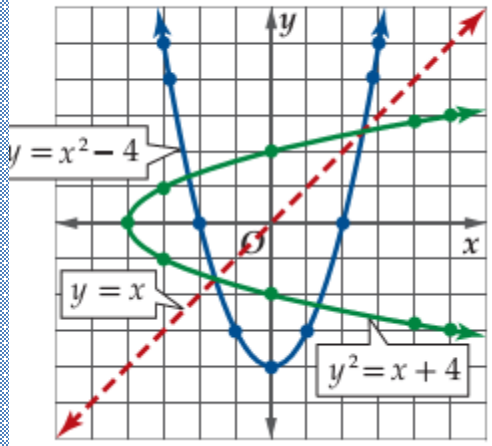
$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5

العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3



لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$.

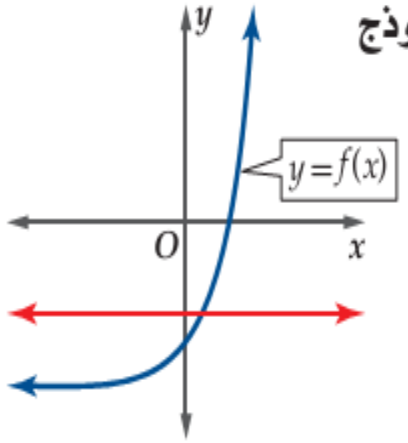
يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالًا. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لِـ f ويرمز لها بالرمز f^{-1}.

مفهوم أساسي

اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

نموذج



مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية

يجب ألّا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$

ملاحظات هامة

لكل علاقة يوجد علاقة عكسية

ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة

اختبار الخط الرأسي هل العلاقة دالة أم لا ؟

اختبارالخط الأفقي هل الدالة متباينة أم لا؟

إرشادات للدراسة

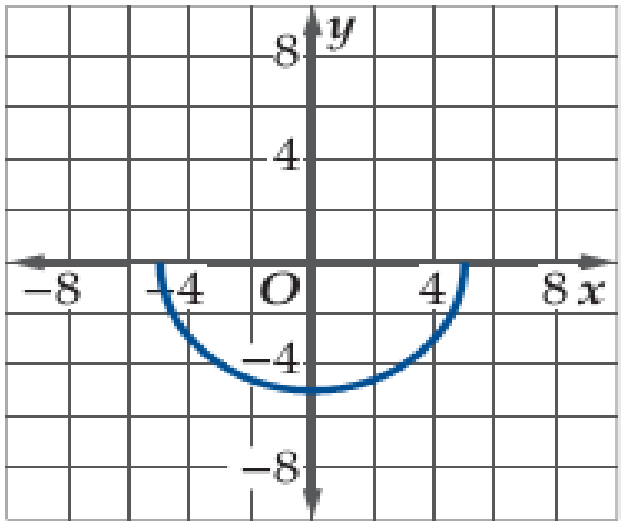
الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي وعليه لا تكون دالة متباينة.

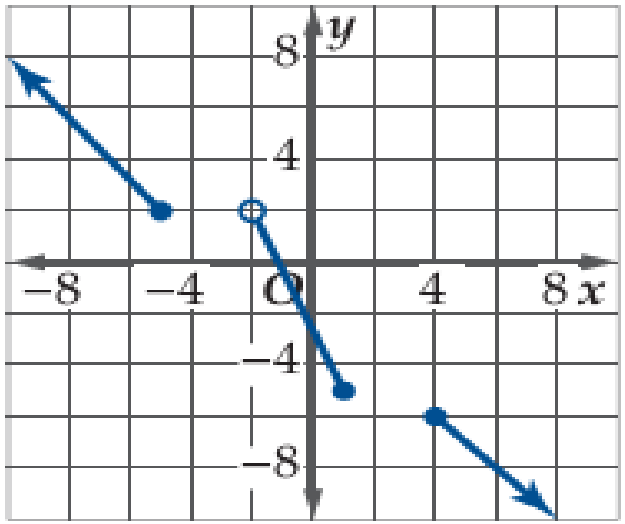
تحقق من فهمك

حدد إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

32)

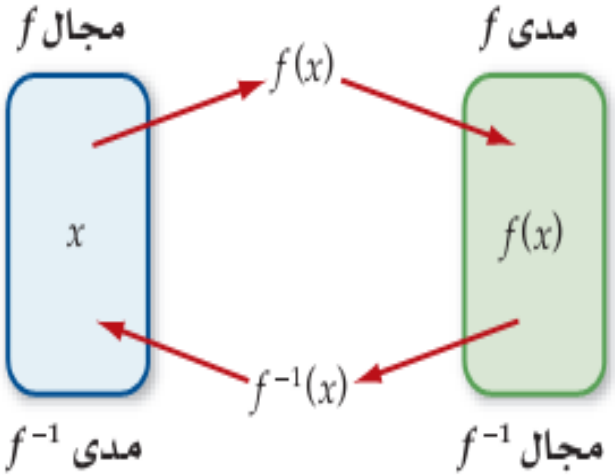


33)



إيجاد الدالة العكسية : إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y. ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



إيجاد الدالة العكسية

خطوات إيجاد الدوال العكسية:

1. التحقق من أن الدالة متباينة
2. استبدال f(x) بـ y
3. استبدال كل x بـ y وَ وكل y بـ x
4. حل المعادلة بالنسبة لـ y
5. استبدال y بـ f^{-1}

ملاحظة :

تركيب الدالة f ودالتها العكسية g ينتج عنه الدالة المحايدة

$$[fog](x) = [gof(x)] = x$$

تحقق من فهمك

(2A $f(x) = -16 + x^3$

(2B $f(x) = \frac{x+7}{x}$

(2C $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

تدرب وحل المسائل

ص 71

11) $f(x) = \sqrt{x+8}$

14) $f(x) = \frac{x-6}{x}$

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ **لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.**
- $f^{-1}[f(x)] = x$ **لجميع قيم x في مجال $f(x)$.**

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

تحقق من فهمك

أثبت جبريًا أن كلًا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A $f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

3B $f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$

تدرب وحل المسائل

اثبت جبريًا أن كلا من الدالتين f , g تمثل دالة عكسية للأخرى في كلٍّ مما يأتي:

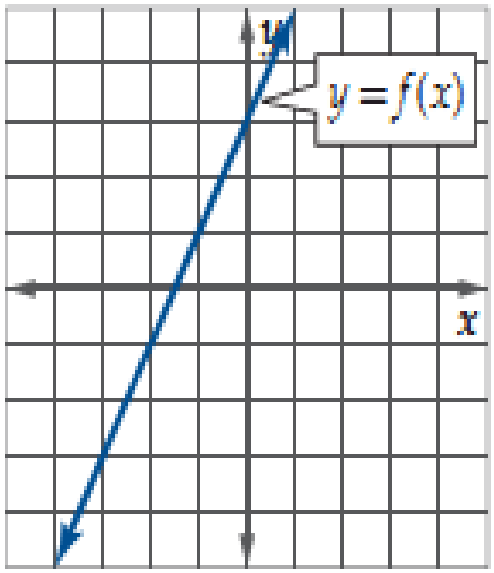
20) $f(x) = 4x + 9$

$$g(x) = \frac{x - 9}{4}$$

تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًّا:

(4A



(4B