ثالث
متوسط

وحيدة الحد : هي عدداً أو متغيراً أو حاصل ضرب عددٍ بمتغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة .

الثابت : هو وحيدة حد تمثل عدداً حقيقياً .

١ ← نعم وحيدة حد .

ف + ٤ ← لا ، لوجود عملية الجمع

$\frac{س^{٢}}{٢}$ ← نعم وحيدة حد .

$\frac{س ص}{٢}$ ← نعم وحيدة حد

$\frac{م ف}{ن}$ ← لا ، لوجود متغير في المقام .

القاعدة : $أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{م+ن}$

مثال : $(٣ ص^{٤})(٧ ص^{٥})$

$= (٣ \times ٧)(ص^{٤} \times ص^{٥})$

$= ٢١ ص^{٩}$

القاعدة : $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

مثال : $(ب^{٣})^{٥} = ب^{١٥}$

القاعدة : $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

مثال : $(٢ س^{٤} ص^{٥})^{٣}$

$= ٢^{٣} س^{١٢} ص^{١٥}$

$= ٨ س^{١٢} ص^{١٥}$

القاعدة : $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

مثال : $\frac{جـ^{١١}}{جـ^{٨}} = جـ^{١١-٨} = جـ^{٣}$

القاعدة : $(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

مثال : $(\frac{٣}{٥})^{٤} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٤}} = \frac{٨١}{٦٢٥}$

القاعدة : $س^{٠} = ١$

مثال : $(\frac{٤}{٧})^{٠} = ١$

$\frac{ب^{٤} جـ^{٤} د^{٠}}{ب^{٤} جـ^{٤}}$ *

$= ب^{٤-٤} جـ^{٤-٤} (١)$

$= ب^{٠} جـ^{٠}$

القاعدة : $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$

مثال : $٤^{-٢} = \frac{١}{٤^{٢}}$

$= \frac{١}{١٦}$

$\frac{١}{أ^{-ن}} = أ^{ن}$ *

$\frac{١}{جـ^{-٥}} = جـ^{٥}$

كثيرات الحدود

ثالث
متوسط

كثيرات الحدود

كثيرة الحدود: هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات الحد.

ثنائية حد: هي مجموع وحيدتي حد.

ثلاثية الحدود: هي مجموع ثلاثة حدود في أبسط صورة.

درجة وحيدة الحد: هي مجموع أسس كل متغيراتها.

درجة كثيرة الحدود: هي أكبر درجة لأي حد من حدودها.

ملاحظة:
درجة الثابت غير الصفر تساوي صفراً.

درجة كثيرة الحدود

$٢د^{٣} - ٩جـ^{٥} - ٧$

الحد الأول ← الأس ٣
الحد الثاني ← الأس ٥
الحد الثالث ← الأس ١

درجة الحد $٢د^{٣}$ = ٣
درجة الحد $-٩جـ^{٥}$ = ٥ + ١ = ٦ ← الأكبر
درجة الحد -٧ = صفر

∴ درجة كثيرة الحدود هي ٦

$٥ص - ٩ - ٢ص^{٤} - ٦ص^{٣}$
(نفس المتغير (ص))

∴ درجة كثيرة الحدود أكبر أس.

الدرجة: ٤
المعامل الرئيسي: -٢
الصورة القياسية: أي ترتيب من أكبر أس إلى الصفر
$-٢ص^{٤} - ٦ص^{٣} + ٥ص - ٩$

جمع كثيرات الحدود وطرحها

الجمع

مثال: $(٣س^٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س^٢ + ٦س)$

الطريقة الأفقية.

نجمع الحدود المتشابهة.

$(٣س^٢ - ٤س^٢) + (٥س + ٦س) + (-٧ + ٣)$

$= -س^٢ + ١١س - ٤$

الطريقة الرأسية.

نرتب الحدود المتشابهة عمودياً ونجمع

$$\begin{array}{r} ٣س^٢ + ٥س - ٧ \\ + \quad -٤س^٢ + ٦س + ٣ \\ \hline -س^٢ + ١١س - ٤ \end{array}$$

الطرح

مثال: $(٧ك + ٤ك^٣ - ٨) - (٣ك^٢ + ٢ - ٩ك)$

الطريقة الأفقية.

$٧ك + ٤ك^٣ - ٨ - ٣ك^٢ - ٢ + ٩ك$

نجمع الحدود المتشابهة.

$(٧ك + ٩ك) + ٤ك^٣ - ٣ك^٢ + (-٨ - ٢)$

$= ١٦ك + ٤ك^٣ - ٣ك^٢ - ١٠$

نرتبها على الصورة القياسية.

$= ٤ك^٣ - ٣ك^٢ + ١٦ك - ١٠$

الطريقة الرأسية:

$$\begin{array}{r} ٤ك^٣ + ٠ك^٢ + ٧ك - ٨ \\ - \quad ٠ك^٣ + ٣ك^٢ - ٩ك + ٢ \\ \hline ٤ك^٣ - ٣ك^٢ + ١٦ك - ١٠ \end{array}$$

ملاحظة: عند الجمع والطرح يجب مراعاة قواعد الإشارة.

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

مثال: $-$٣س^٢ (٧س^٢ $-$ س + ٤)

وحيدة حد ← ، كثيرة حدود ←

= (-٣ × ٧) (س^٢ × س^٢) + ((-٣ × (-١)) (س^٢ × س) + (-٣ × ٤) س^٢

= -٢١ س^٤ + ٣س^٣ $-$ ١٢س^٢

ملاحظة: مراعاة خصائص الأسس

ضرب كثيرات الحدود

مثال: (٢س + ٣) (س + ٥)

كثيرة حدود ، كثيرة حدود

(الأفقية)

٢س (س + ٥) + ٣ (س + ٥)

٢س^٢ + ١٠س + ١٣س + ١٥

نبسط:

٢س^٢ + ١٢س + ١٥

(الرأسية)

٢س + ٢
س + ٥

٢س^٢ + ٢س
+ ١٠س + ١٥

٢س^٢ + ١٢س + ١٥

(ترتيب بالتوزيع).

(٢س + ٢) (س + ٥)

٢س^٢ + ٢س + ١٠س + ١٥

٢س^٢ + ١٢س + ١٥

الجدول

س	٢س^٢	٢س
٢س	١٢س	١٠س
٣	١٥	٥

الحل ↓

٢س^٢ + ١٢س + ١٥

كثيرات الحدود

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

$(م + ب)^2$

$(م + ب)^2$ ← مربع
الحد الأول ← مجمع ← الحد الثاني

$= م^2 + 2 م ب + ب^2$

مثال: $(3س + 5)^2$

$= (3س)^2 + 2(3س)(5) + 5^2$

$= 3^2 س^2 + 30س + 25$

$= 9س^2 + 30س + 25$

$(م - ب)^2$

$= م^2 - 2 م ب + ب^2$

مثال: $(6ب - 1)^2$

$= (6ب)^2 - 2(6ب)(1) + 1^2$

$= 6^2 ب^2 - 12ب + 1$

$= 36ب^2 - 12ب + 1$

$م^2 - ب^2$

الحد الأول مربع ← طرح ← الحد الثاني مربع

$= (م + ب)(م - ب)$

مثال: $(س - 5)(س + 5)$

نأخذ الحد السالب ونربع كل حد.

$= س^2 - 5^2$

$= س^2 - 25$

للتوضيح:

$(م + ب)^2$ ← مربع
الحد الأول ← مجمع ← الحد الثاني

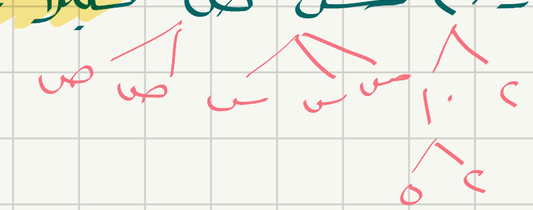
$=$ مربع الحد الأول $+ 2 \times$ الحد الأول $\times$ الحد الثاني $+$ مربع الحد الثاني

$= م^2 + 2 م ب + ب^2$

$(م + ب)^2 =$	$+$	$+$ $+$ $+$
$(م - ب)^2 =$	$+$	$+$ $-$ $+$
$م^2 - ب^2 =$	$(+)(-)$	

من الأخطاء الشائعة: $(م + ب)^2 = م^2 + ب^2$ ✗

مثال :. حلل :. $-٢ س^{٢} ص^{٢}$ تحليلاً تاماً .



$= -١ \times ٢ \times ١٠ \times س \times س \times ص \times ص$

$= -١٠ \times ٢ \times ٥ \times ٢ \times س \times س \times ص \times ص$

مثال :. أوجد القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ) لوحيدي الحد .

$١٢ م^{٣} ب^{٢} ، ١٨ م ب^{٢}$

$١٢ م^{٣} ب^{٢} = ٣ \times ٢ \times ٢ \times ٣ \times م \times م \times م \times ب \times ب$

$١٨ م ب^{٢} = ٣ \times ٣ \times ٢ \times م \times ب \times ب$

$\therefore$ (ق.م.أ) $= ٣ \times ٢ \times ٣ \times م \times ب \times ب$

$= ٦ م ب^{٢}$

مثال :. استخدم خاصية التوزيع لتحليل كثيرات الحدود :.

$٢٧ ص^{٢} + ١٨ ص$

. حلل كل حد

$٢٧ ص^{٢} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ص \times ص$

$١٨ ص = ٢ \times ٣ \times ٣ \times ص$

ق.م.أ $= ٣ \times ٣ \times ص$

$= ٩ ص$

$٢٧ ص^{٢} + ١٨ ص = ٩ ص (٣ ص) + ٩ ص (٢)$

ق.م

$= ٩ ص (٣ ص + ٢)$

التحليل

من الدرجة الأولى

لا يمكن تحليلها لأنها أبسط صورة

$س + ٥$

(حدين)

يأخذ القاسم المشترك الأكبر

$٥ س + ١٠ = ٥(س + ٢)$

(حدين)

من الدرجة الثانية

لا يمكن تحليلها
∴ كثيرة حدود أولية

$س^٢ + ٩$

(حدين)

يأخذ (ه.م.أ)

$٨ س^٢ + ١٦ = ٨(س^٢ + ٢)$

(حدين)

$س^٢ - ٩ = (س - ٣)(س + ٣)$

(حدين)

كثيرة حدود أولية: هي التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة.

التحليل

من الدرجة الثانية

- $س^{٢}+٥س+٦$

(٣ حدود)

نبحث عن عددين حاصل ضربهما الحد الأخير، ومجموعهما الحد الأوسط. إذا كان معامل $س^{٢}=١$

$س^{٢}+٥س+٦$

حاصل ضربهما ٦	مجموعهما ٥
١ ، ٦	٧ ✗
٢ ، ٣	٥ ✓

$\therefore (س+٣)(س+٢)$

- $س^{٢}+١٠س+٦$

(٢ حدود)

لا يوجد عددان حاصل ضربهما ٦ ومجموعهما ١٠

$\therefore$ كثيرة حدود أولية.

- $٢س^{٢}+١٠س+١٢$

(٣ حدود)

معامل $س^{٢}>١$

الطريقة الأولى:

بأخذ (ع.م.أ)

$٢(س^{٢}+٥س+٦)$

$٢(س+٢)(س+٣)$

الطريقة الثانية:

$٣س^{٢}-١١س-٤$

$\times$ | $\times$

-١٤ ← (عددان حاصل ضربهما -١٤ ومجموعهما -١١)

-١٤ ، ١

$(٣س-١٤)(٣س+١)$

$٢(\frac{٣س}{٢}-\frac{١٤}{٢})(٣س+١)$

$(س-٤)(٣س+١)$

- $س^{٢}+٥س-٦$

$(س+٦)(س-١)$

ملاحظة: (إشارات التحليل)

- إذا كان إشارة الحد الأخير (موجب) فإن إشارتا التحليل على حسب إشارة الحد الأوسط.

مثل:

$(+\ \ +)(+\ \ +)$ ← الحد الأخير +

$(-\ \ -)(-\ \ +)$ ← الحد الأخير +

- إذا كان إشارة الحد الأخير (سالب) فإن إشارتا التحليل + و − العدد الأكبر بإشارة الحد الأوسط

مثل:

$(-\ \ +)(+\ \ -)$ العدد الأكبر +

$(+\ \ -)(+\ \ -)$ العدد الأكبر −

التحليل و المعادلات التربيعية

التحليل

التحليل بتجميع الحدود: هي الطريقة التي نستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكون من أربع حدود أو أكثر.

مثال: $٤ك ر + ٨ر + ٣ك + ٦$

بتجميع الحدود المتشابهة.

$= (٤ك ر + ٨ر) + (٣ك + ٦)$

باستخراج (ق.م.أ)

$= ٤ر (ك + ٢) + ٣ (ك + ٢)$ ← نفس الشيء

$= (ك + ٢) (٤ر + ٣)$ ← ق.م.أ

مثال: $٢م ك - ١٢م + ٤٢ - ٧ك$

بتجميع الحدود المتشابهة.

$= (٢م ك - ١٢م) + (٤٢ - ٧ك)$

باستخراج (ق.م.أ).

$= ٢م (ك - ٦) + ٧ (٦ - ك)$ ← اختلفت إشارتان نضرب (-١)

$= ٢م (ك - ٦) + ٧ [(-١) (ك - ٦)]$

$= ٢م (ك - ٦) - ٧ (ك - ٦)$

$= (ك - ٦) (٢م - ٧)$ ← ق.م.أ

حل المعادلات

مثال: $(ك ء + ٦)(٢ ء - ١٥) = ٠$

$ك ء + ٦ = ٠$ أو $٢ ء - ١٥ = ٠$

$ك ء = -٦$ ، $٢ ء = ١٥$

$ء = -\frac{٦}{ك}$ ، $ء = \frac{١٥}{٢}$

$ء = -٢$ ، $ء = ٥$

∴ الجذران هما $-٢ ، ٥$

- $هـ^{٢} = ٢ هـ$

$هـ^{٢} - ٢ هـ = ٠$

$هـ (هـ - ٢) = ٠$

$هـ = ٠$ أو $هـ - ٢ = ٠$ ⟸ $هـ = ٢$

∴ الجذران هما: $٠ ، ٢$

- $(ص - ٦)^{٢} = ٨١$

بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين

$\sqrt{(ص - ٦)^{٢}} = \sqrt{٨١}$

$ص - ٦ = \pm ٩$

$ص - ٦ = ٩$

$ص = ٩ + ٦$

$ص = ١٥$

أو:

$ص - ٦ = -٩$

$ص = -٩ + ٦$

$ص = -٣$

∴ الجذران هما:

$١٥ ، -٣$

المربعات الكاملة

مثال: حدد إذا كانت ثلاثية حدود تشكل مربعاً كاملاً أم لا ؟

$٤ ص^{٢} + ١٢ ص + ٩$

الشروط:

- هل الحد الأول مربع كامل ؟ نعم $٤ ص^{٢} = (٢ ص)^{٢}$

- هل الحد الأخير مربع كامل ؟ نعم $٩ = ٣^{٢}$

- هل الحد الأوسط $= ٢ (الحد الأول)(الحد الأخير)$

$١٢ ص = ٢ (٢ ص)(٣)$

∴ تشكل مربعاً كاملاً.

∴ $٤ ص^{٢} + ١٢ ص + ٩ = (٢ ص + ٣)^{٢}$

ملاحظة: إذا لم يتحقق شرط من الشروط

∴ لا تشكل مربعاً كاملاً.

التحليل و المعادلات التربيعية

٧