ابتسموا ولا تحمّلوا الصباح وِزرَأوجاع الامس

فالصباح بداية ولتكُن البدايات دائماًأجمل.

خمسة أعداد المنوال لهم ٤ والوسيط ٦ والمدى ٥ فأوجدي قيمة أكبر عدد ؟

أ) ٩ ب) ٧ ج) ٦ د) ٤

عنوان الدرس

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

المصفوفات
في حياتنا

المصفوفات في حياتنا

عددي طرق حل نظام معادلتين خطيتين جبريا؟

ما هي المصفوفة المحايدة في عملية الجمع ؟

كيف يتم إيجاد النظير الجمعي و الضربي لعدد حقيقي ؟

فيما سبق:

درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها .

مصفوفة الوحدة

مصفوفة التغير

النظير الضربي للمصفوفة

مصفوفة الثوابت

المعادلة الصفية

مصفوفة المعاملات

لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

ما الذي تم التعبير عنه بالعدد3 في المصفوفة الأولى؟

ما رتبة مصفوفة ناتج الضرب؟

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}, \underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$ ، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \underline{I}$

التحقق من النظير الضربي

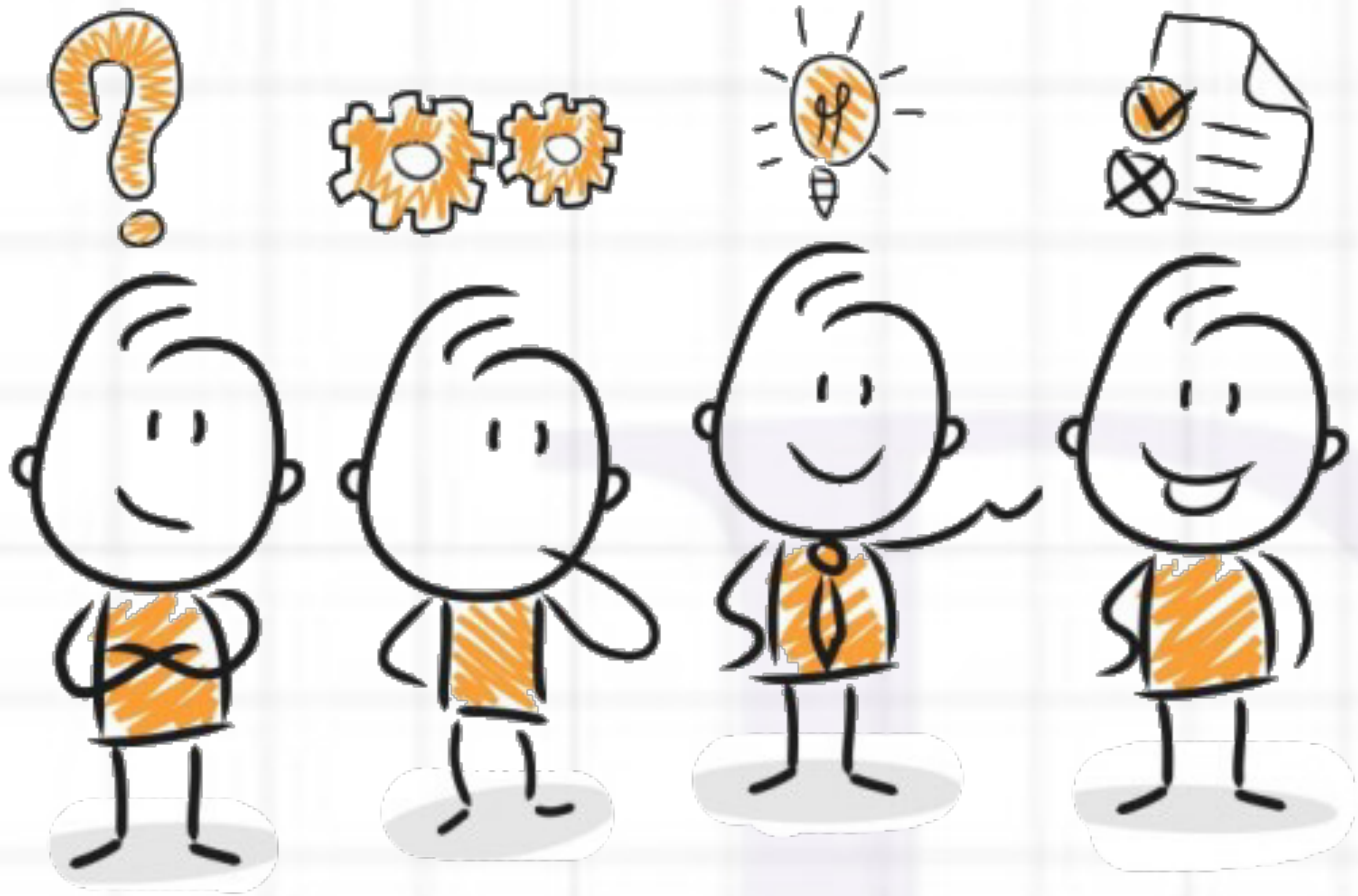
حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

التحقق من التناظر الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.



تحقق من فهمك

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} , \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

يمكنك استعمال المحدِّدات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2×2

النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|A| \neq 0$.

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدِّدة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

إرشادات للدراسة

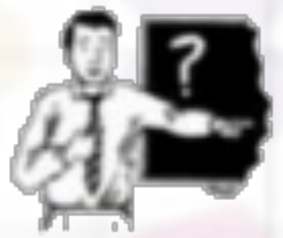
لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب A^{-1}.

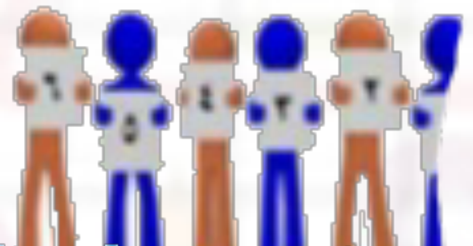
إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

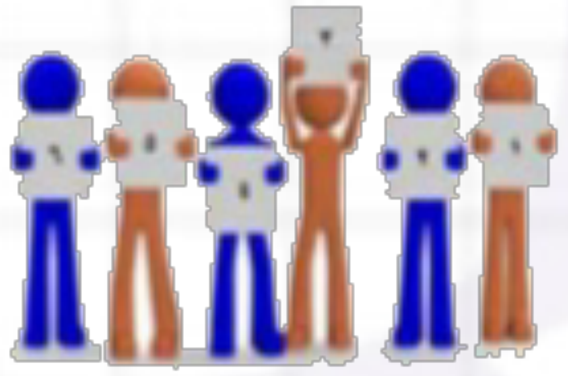
أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(a $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

الرؤوس المرقمة







تحقق من فهمك

2A) $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

2B) $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

تأكد

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

(1 $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(2 $\underline{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

(3 $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(4 $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ fx + gy &= n \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

مصفوفة المتغيرات
المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة الثوابت
الثوابت في النظام فقط

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية
يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات A نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

المعادلات المصفوفية:

لحل المعادلات الخطية ذات المجهولين باستخدام قاعدة النظير الضربي نتبع الخطوات التالية:

1) نكتب الصورة العامة للمعادلة الخطية.

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ fx + gy &= n \end{aligned}$$

2) نحول المعادلة السابقة إلى 3 مصفوفات.

مصفوفة

الثوابت B	المتغيرات X	المعاملات A
$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

3) نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات (A^{-1}).

4) نوجد قيم x و y من المعادلة المصفوفية التالية.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مثال1: استعمل المعادلة المصفوفية لحل النظام التالي:

$$x + 2y = 9$$
$$3x - 6y = 3$$

29) **تبرير:** حدِّد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسِّر إجابتك.

"المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي ،

فإن قيمة x تساوي:

A $\frac{4}{3}$

B $\frac{4}{5}$

C $-\frac{4}{3}$

D $-\frac{4}{5}$

اوجد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، إذا كان ذلك ممكنًا.

A $\begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

D الضرب غير معرف