الدوال

مجموعة رفعة الرياضيات

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

المفردات:

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function

المجال المناسب
relevant domain

فيما سبق :

درست المجموعات ورموزها .

والآن :

- اصف مجموعات جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية
- اتعرف الدوال . واحسب قيمها واجد مجالاتها .

الدوال

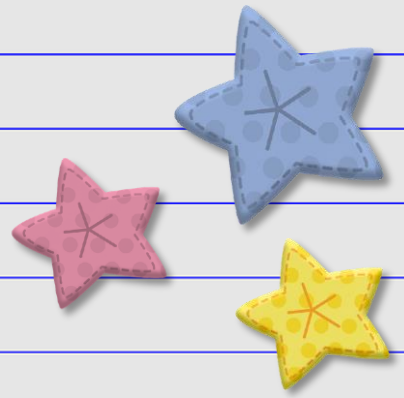
1-1

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية: تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:



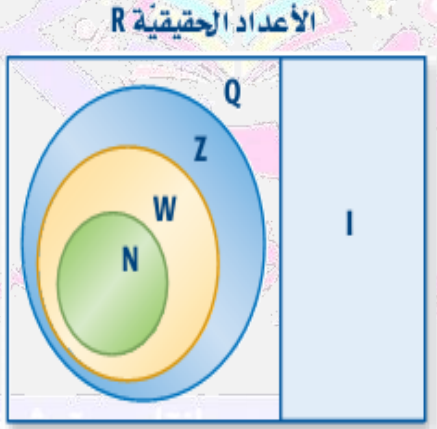
مقطع توضيحي

بسمة math

مفهوم أساسي

الأعداد الحقيقية

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666\ldots$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3\ldots$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4\ldots$



إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث، ويقرأ الرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في.

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

- x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.
- x لها هذه الخصائص...
- الأعداد x حيث...

مثال 1

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, \ldots\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \geq 8, x \in W\}$

وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، وَ x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

استعمال الصفة المميزة

تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(1A $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots.\}$

(1B $x \leq -3$

(1C $-1 \leq x \leq 5$

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

غير محدودة:
تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقُّف).

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال2

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \leq 16$ $(-8, 16]$

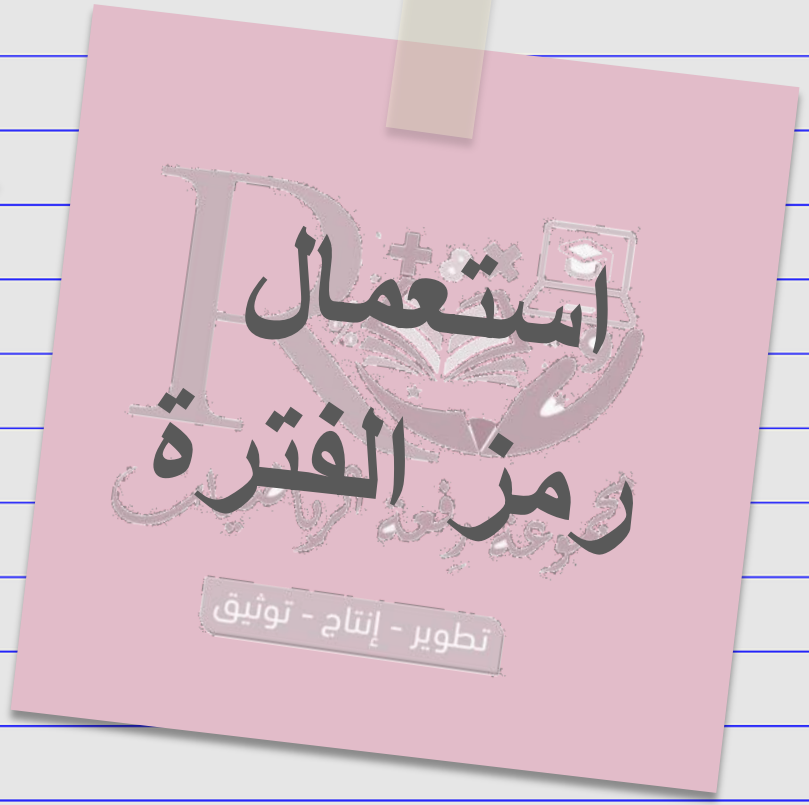
b) $x < 11$ $(-\infty, 11)$

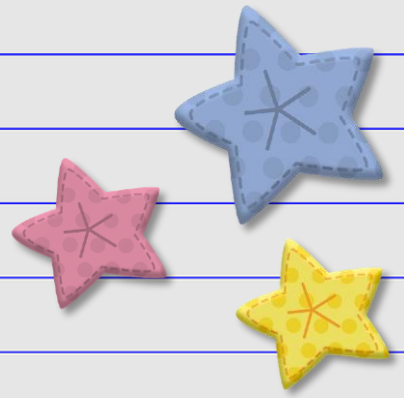
c) $x \leq -16$ أو $x > 5$ $(-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

الرمزان $\cup$ ، $\cap$:

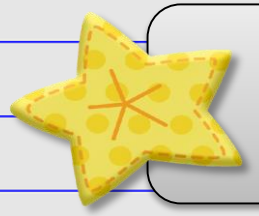
يُقرأ الرمز "$\cup$" (اتحاد)، ويعني: جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين.

يُقرأ الرمز "$\cap$" (تقاطع)، ويعني: جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.





مقطع توضيحي



تحقق من فهمك

(2A $-4 \leq y < -1$

(2B $a \geq -3$

(2C $x < -2$ أو $x > 9$

تدرب

1) $x > 50$

4) $\{-3, -2, -1, \ldots\}$

6) $x < -19$ أو $x > 21$

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تقويم

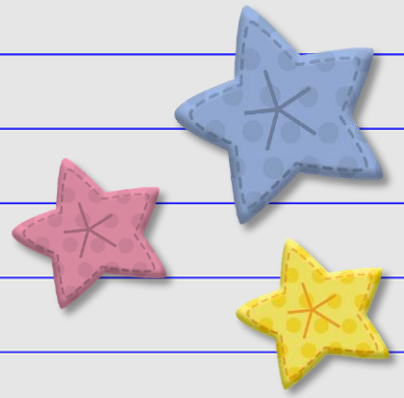
1+2=3

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2)

1	المجموعة $\{2,3,4,5,....\}$							
	A	$\{x \mid x \le 1, x \in W\}$	B	$\{x \mid x \ge 2, x \in W\}$	C	$\{x \mid x \le 5, x \in W\}$	D	$\{x \mid x > 2, x \in W\}$
2	$-31 < x \le 64$							
	A	$[-31,64]$	B	$[-31,64)$	C	$(-31,64]$	D	$(-31,64)$
3	$x < -1$ أو $x > 5$							
	A	$(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$	B	$(-\infty,-1)\cap(5,\infty)$	C	$(-\infty,-1)\cup[5,\infty)$	D	$(-\infty,-1]\cup(5,\infty)$

تطوير - إنتاج - توثيق
تطوير - إنتاج - توثيق

بسمة math



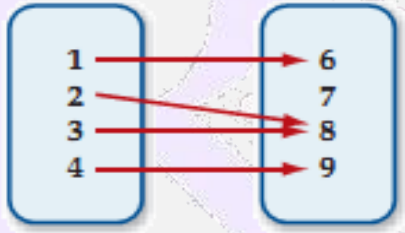
مقطع توضيحي

بسمة math

مفهوم أساسي — الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثّلة في المخطط المجاور تمثّل دالةً.



حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.

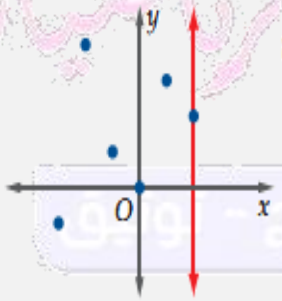
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.

المدى $= \{6, 8, 9\}$.

مفهوم أساسي — اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمثّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

نموذج



إرشادات للدراسة

المجال والمدى

في هذا المفهوم الأساسي، يمكن أن يستعمل الرمز D للتعبير عن المجال، والرمز R للمدى، أي أن:

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{6, 8, 9\}$

مثال3

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

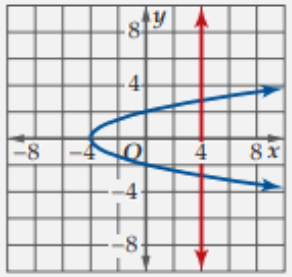
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثل دالةً في x .

b)

x	y
-8	-5
-5	-4
0	-3
3	-2
6	-3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ، وعليه فإن y تمثل دالةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإنّ y لا تمثّل دالةً في x .

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لِـ y.

$y^2 - 2x = 5$ المعادلة الأصلية

$y^2 = 5 + 2x$ أضف $2x$ لكلا الطرفين

$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثّل دالةً في x ؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين لِـ y ، إحداها موجبة ، والأخرى سالبة.

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y

لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لِـ y بقيمة واحدة لـ x في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لِـ y بأكثر من قيمة لـ x كما في المثال 3b.

تحديد العلاقات التي تمثل دوال

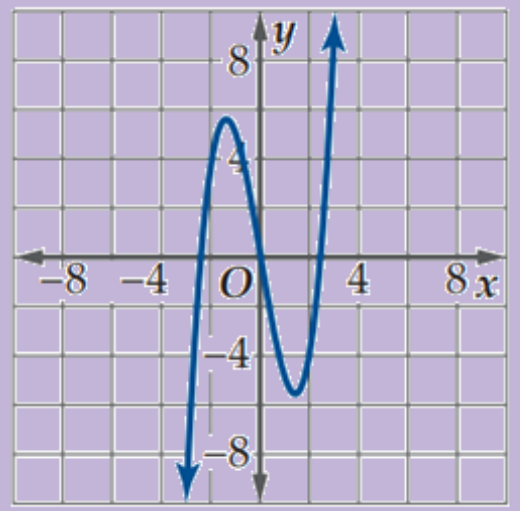
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من نفسك

(3B

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

(3C

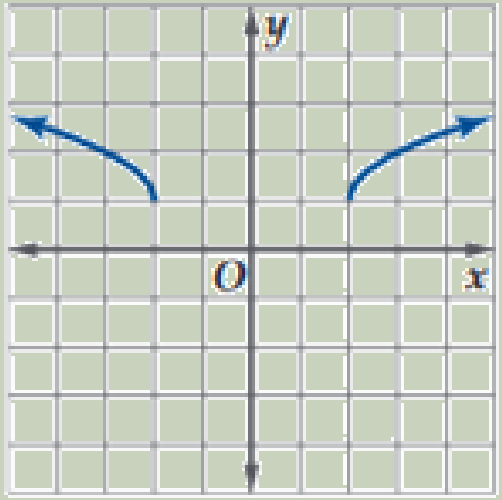


(3D

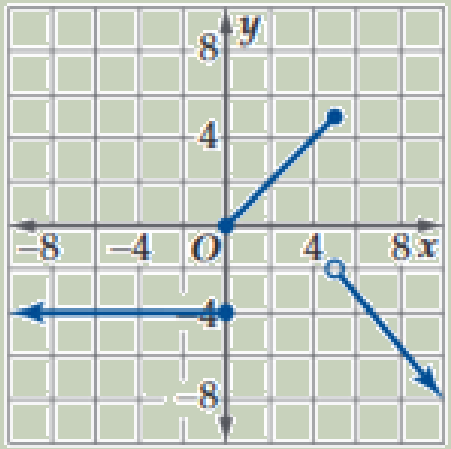
$$3y + 6x = 18$$

تدرب

(36



(37



يُستعملُ $f(x)$ رمزًا للدالة، ويُقرأ (f of x) ويعني قيمة الدالة f عند x. وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

المعادلة	الدالة المرتبطة بالمعادلة
$y = -6x$	$f(x) = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى متغيرًا مستقلا. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى متغيرًا تابعًا.

الربط مع تاريخ الرياضيات

ليونارد أويلر (1783م – 1707م)
عالم رياضي سويسري كتب أكثر من 800 بحث في الرياضيات، وهو أول من استعمل رمز الدالة $f(x)$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال4

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

a $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$	عوّض 6 مكان x
$= 36 + 48 - 24$	بسّط
$= 60$	بسّط

b $f(-4x)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$	عوّض $-4x$ مكان x
$= 16x^2 - 32x - 24$	بسّط

c $f(5c + 4)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24$	عوّض $(5c + 4)$ مكان x
$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$	فك الأقواس $(5c + 4)^2$ و $8(5c + 4)$
$= 25c^2 + 80c + 24$	بسّط

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

(4A $f(12)$

(4B $f(6x)$

(4C $f(-3a+8)$

مثال 5

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

(a $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2-7x}$

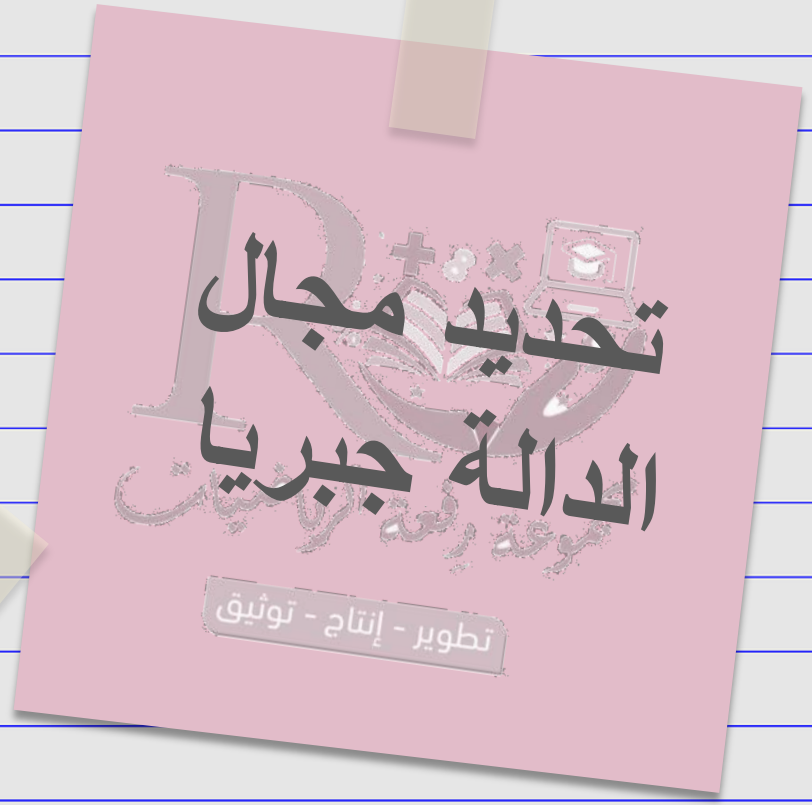
تكون العبارة $\dfrac{2+x}{x^2-7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2-7x=0$ ، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x=0$ و $x=7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x=0$ و $x=7$ ، أي $D=\{x \mid x\neq 0, x\neq 7, x\in R\}$ أو $D=(-\infty,0)\cup(0,7)\cup(7,\infty)$.

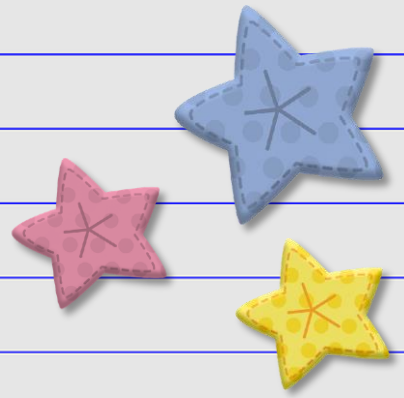
(b $g(t)=\sqrt{t-5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t-5\geq 0$ ؛ أي أن مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D=\{x \mid x\geq 5, x\in R\}$ أو $D=[5,\infty)$.

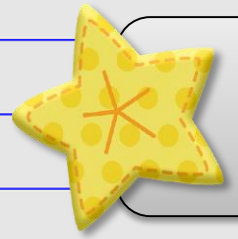
(c $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

تكون هذه الدالة معرّفة إذا كان المقام معرّفًا، وقيمته لا تساوي صفرًا، وهذا يعني أنها معرفة عندما يكون $x^2-9>0$ ، وعليه فإن $x^2>9$ وهذا يعني أن $|x|>3$ ؛ لأن $\sqrt{x^2}=|x|$ ، ويكون مجال $h(x)$ هو $D=\{x \mid x<-3 \text{ أو } x>3, x\in R\}$ أو $D=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.





مقطع توضيحي



تحقق من فهمك

(5A $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$

(5B $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

(5C $g(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

تمرين

$$f(x)=\frac{8x+12}{x^2+5x+4}$$ (26

$$g(a)=\sqrt{1+a^2}$$ (28

$$h(x)=\sqrt{6-x^2}$$ (29

مثال6

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 , & 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ عوّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

إيجاد قيم الدالة متعددة التعريف

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال6

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوال المتعددة التعريف**.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

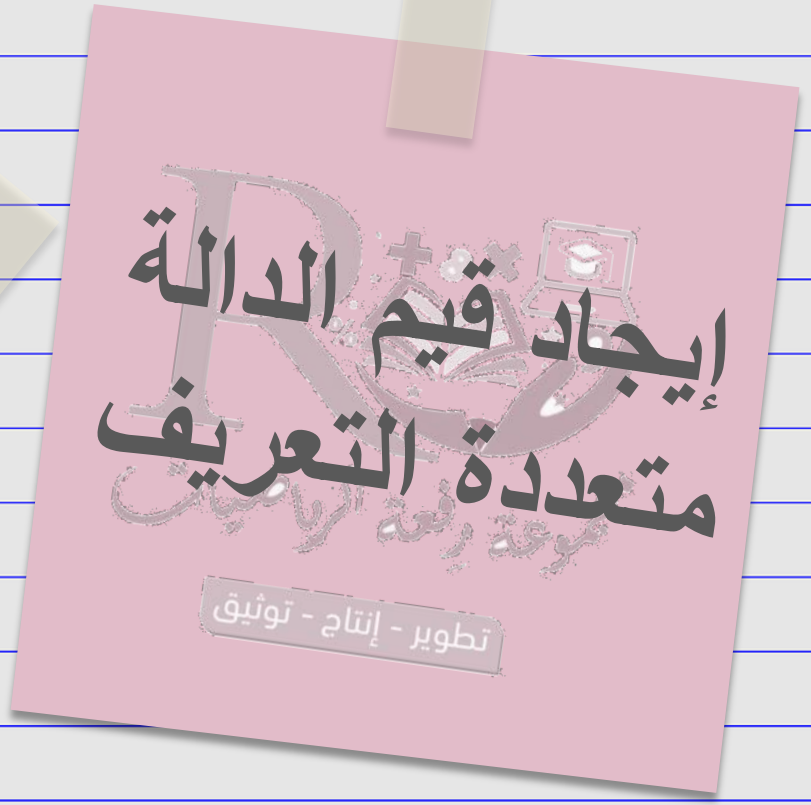
بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لايجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ عوّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \ 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \ 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \ 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

(6A $v(5)$

(6B $v(15)$

(6C $v(245)$

بسمة math

تدرب

$$f(x)=\begin{cases}-4x+3 & , \quad x<3\\ -x^3 & , \quad 3\le x\le 8\\ 3x^2+1 & , \quad x>8\end{cases}$$ (33

$f(-5)$.

$g(m)=3+\sqrt{m^2-4}$ (23

$g(3m)$ (b

تـــــدرب

55) تحدٍّ، إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1)=1, G(2)=2, G(3)=3$ و $G(x+1)=\frac{G(x-2)\,G(x-1)+1}{G(x)}$ لكل $x \geq 3$، فأوجد $G(6)$.

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة: $h(x)=\frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :