القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

المفردات:

المتزايدة	increasing
المتناقصة	decreasing
الثابتة	constant
النقطة الحرجة	critical point
العظمى	maximum
الصغرى	minimum
القصوى	extrema
متوسط معدل التغير	average rate of change
القاطع	secant line

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

1-4

فيما سبق :

درست كيفية إيجاد قيم الدوال

والآن :

- استعمل التمثيل البياني لدالة لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ، ثابتة ، متناقصة ، زأحدد القيم العظمى والصغرى لها .
- أجد متوسط معدل التغير للدالة .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

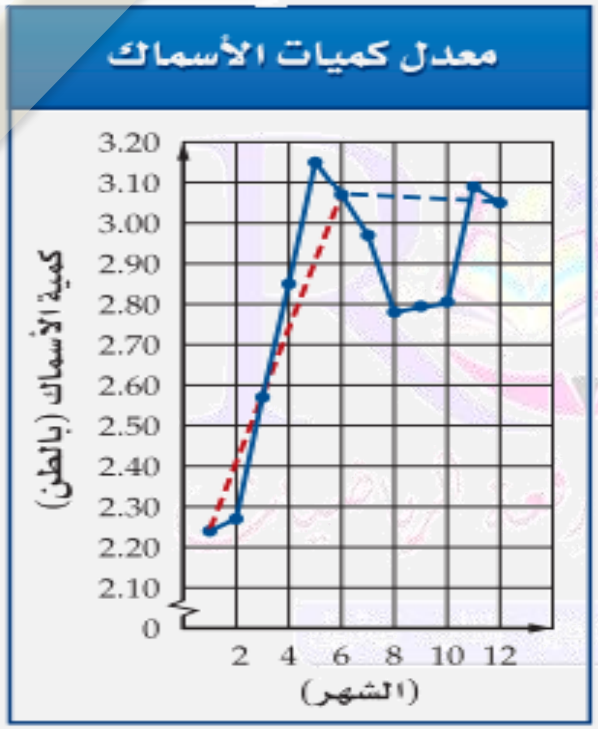
لماذا ؟

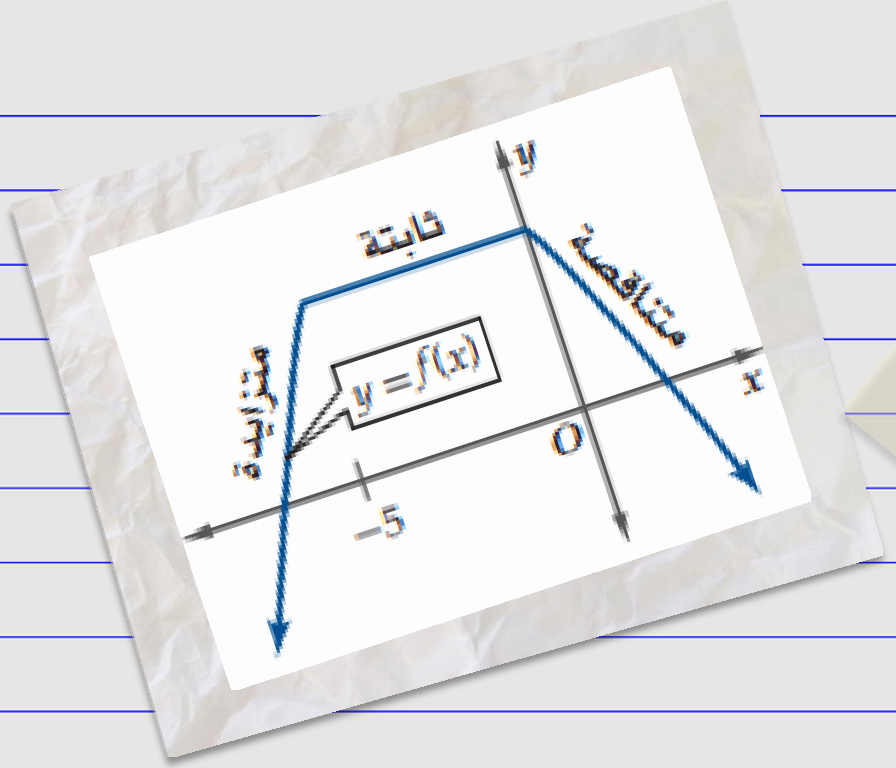
يبيّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.





ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

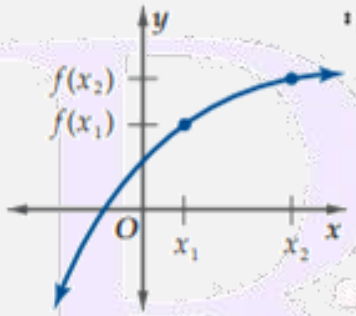
مفهوم أساسي

الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

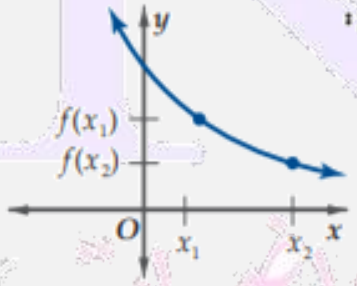
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

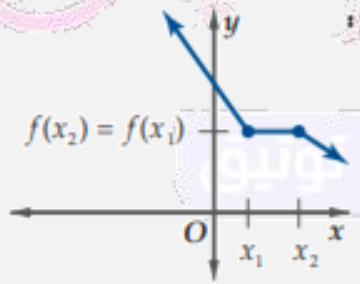
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:

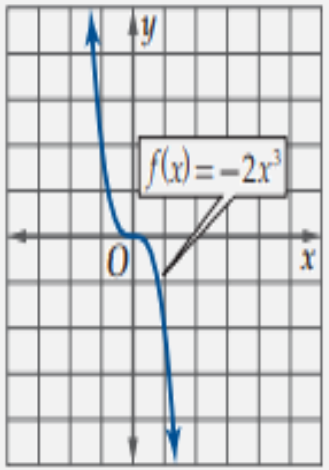


تنبيه!

فترات:
لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (،) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

مثال1

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.



a $f(x) = -2x^3$

التحليل بيانيًّا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

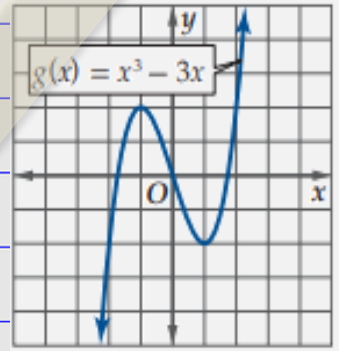
التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	−16	−128	−432	−1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x، تتناقص قيم $f(x)$؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

مثال1



b $g(x) = x^3 - 3x$

التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

x	−11	−9	−7	−5	−3	−1
$g(x)$	−1298	−702	−322	−110	−18	2

$(-1, 1)$:

x	−1	−0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	−1.375	−2

$(1, \infty)$:

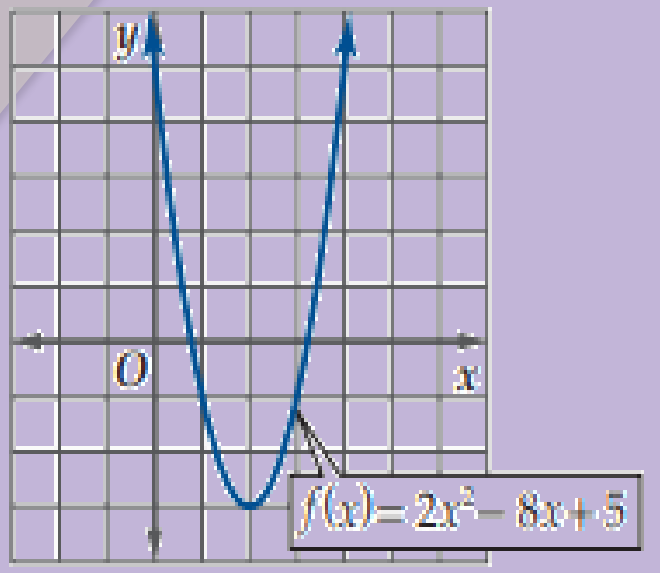
x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	−2	18	110	322	702	1298

توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1 ، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1 ، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1 ، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

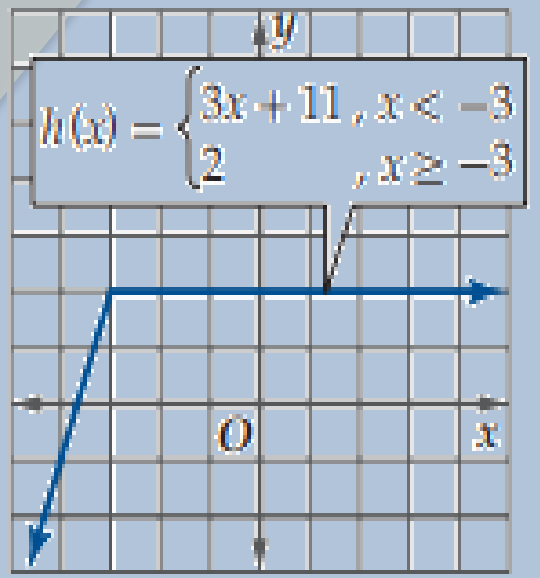
مقطع توضيحي

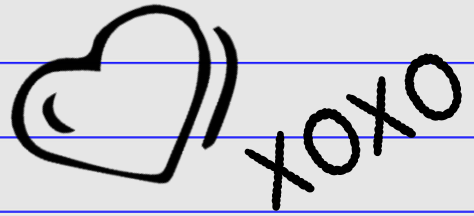
تحقق من فهمك

(1A



(1B

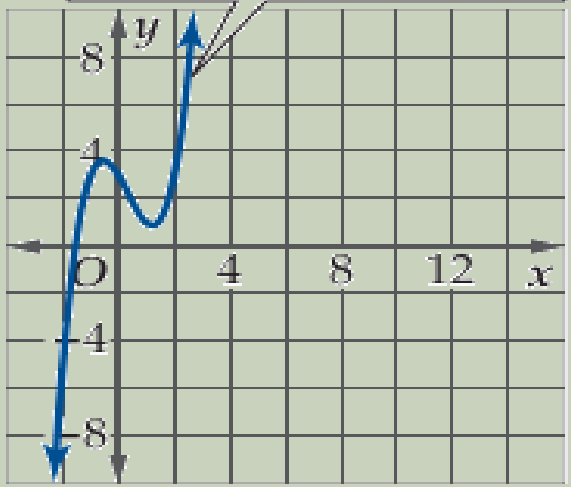


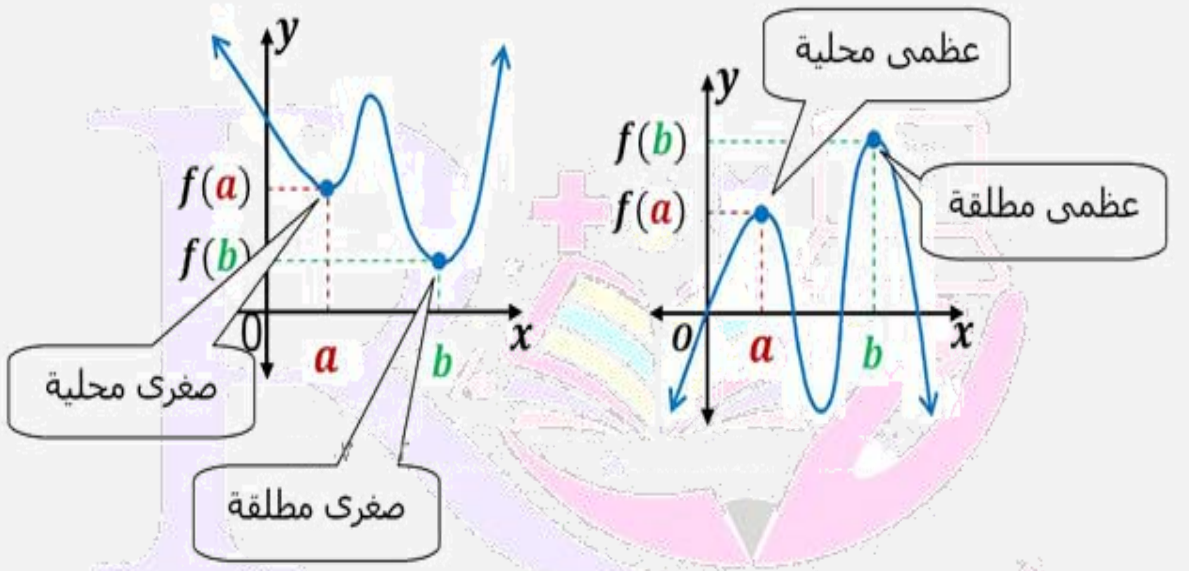


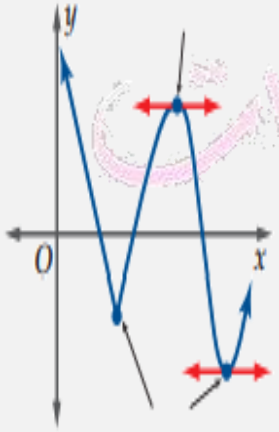
تـــــدرب

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزز إجابتك عدديًا: (مثال 1)

1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$







لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًّا أو عموديًّا (أي أن ميله صفر أو غير معرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

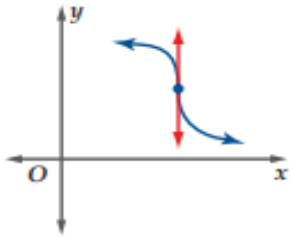
يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية ،
يُستعملُ مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:
إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة الحرجة غير معرف كما في الشكل أدناه؛ فإنه لا توجد للدالة عند هذه النقطة قيمة عظمى أو صغرى.



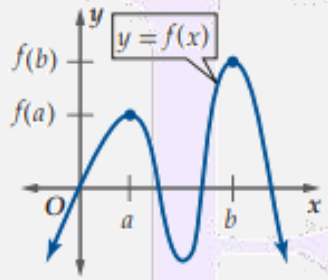
مفهوم أساسي

القيم القصوى المحلية والمطلقة

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

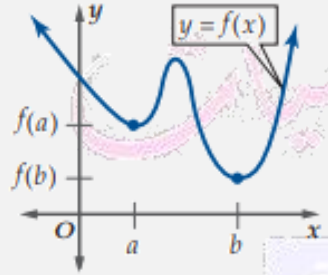
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمِّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمِّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.

النموذج:



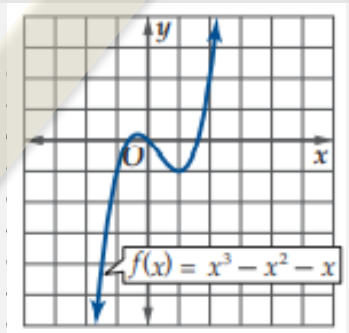
$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمةً صغرى مطلقةً.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

بسمة math

مثال2



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا:

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1. لاحظ كذلك أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًّا:

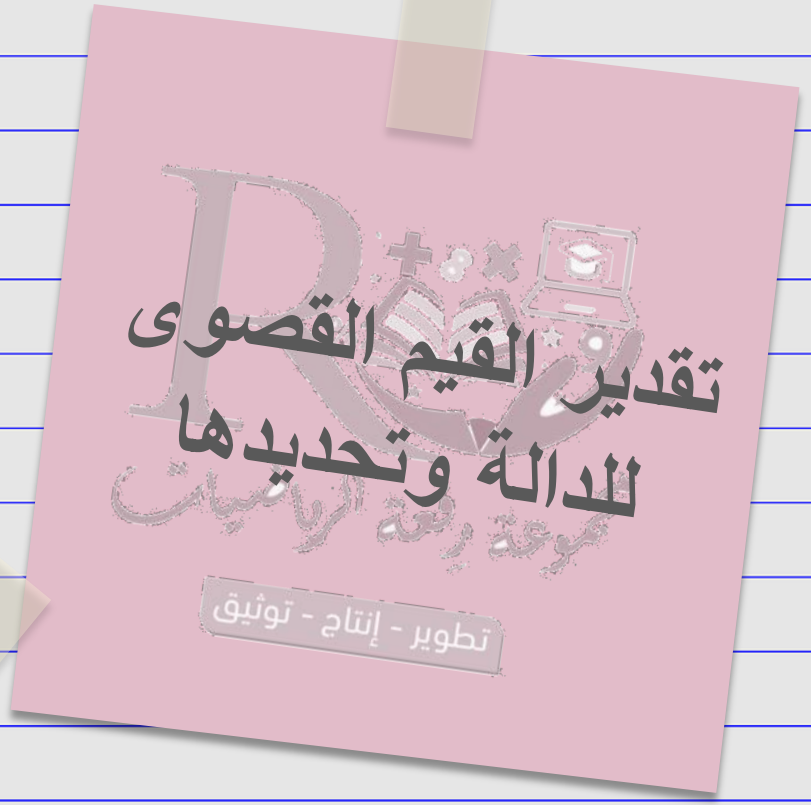
اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

بما أن $f(-1) > f(-0.5)$ و $f(-0.5) > f(0)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

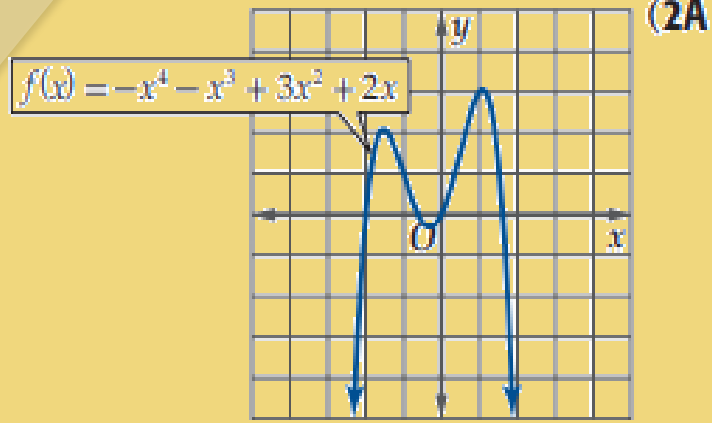
بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(0.5), f(1) < f(1.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولًا.

وبما أن $f(-100) < f(1), f(100) > f(-0.5)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

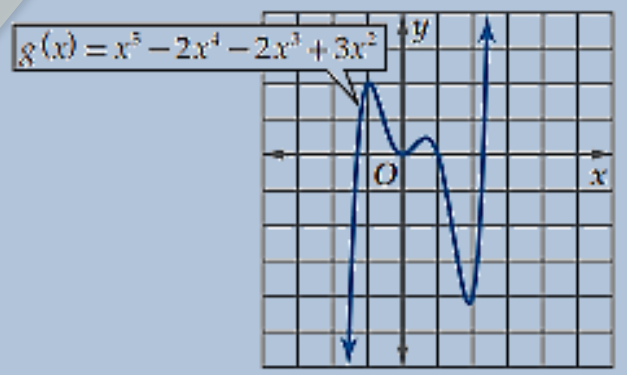


تحقق من فهمك

(2A

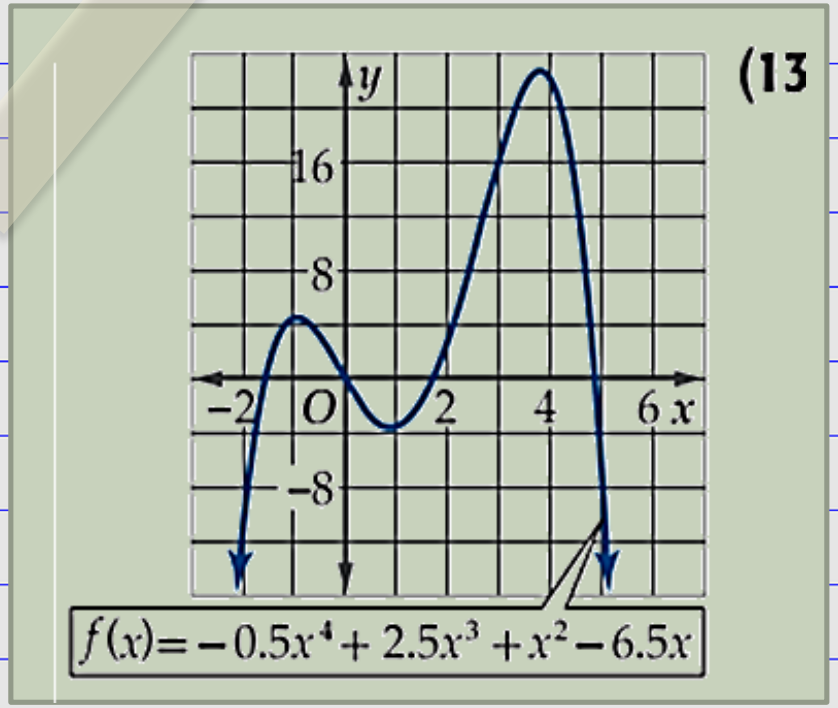


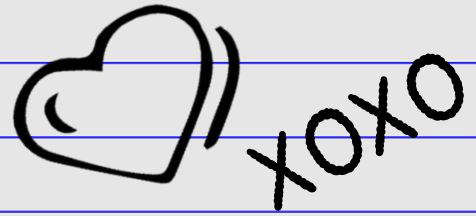
(2B



تـــــــدرب

(13





تـــــدرب

مسألة مفتوحة: مثل بيانيًا الدالة $f(x)$:

42) متصلة

متزايدة على $(-\infty, 4)$

ثابتة على $[4, 8]$

متناقصة على $(8, \infty)$

$f(5) = 3$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

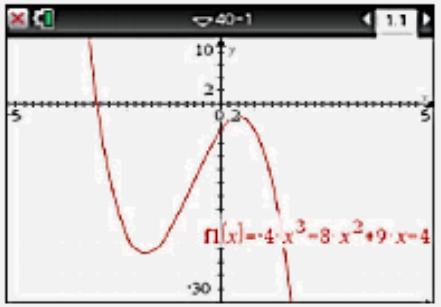
مثال3

الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

مثّل الدالة بيانيًّا، واختر التدريج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

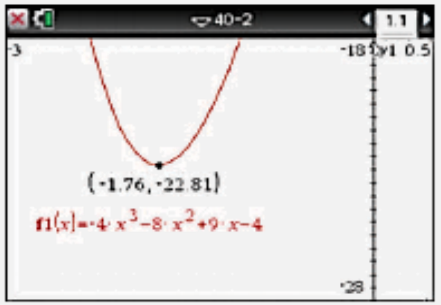
بالضغط على المفاتيح: ⏻ on ، ثم اكتب الدالة

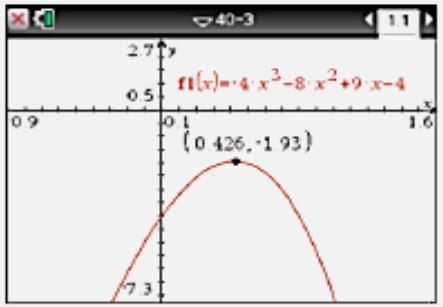
واضغط enter



يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محليةٍ واحدة في الفترة $(-2, -1)$، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلُّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اضغط على مفتاح menu، ثم على 6:تحليل الرسم البياني، واختر منها 3:القيمة العظمى أو 2:القيمة الصغرى، ثم مرّر المؤشر أفقيًّا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x = -1.76$، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$

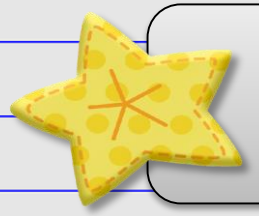




استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

تطوير - إنتاج - توثيق

بسمة math



تحقق من فهمك

3A $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

3B $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

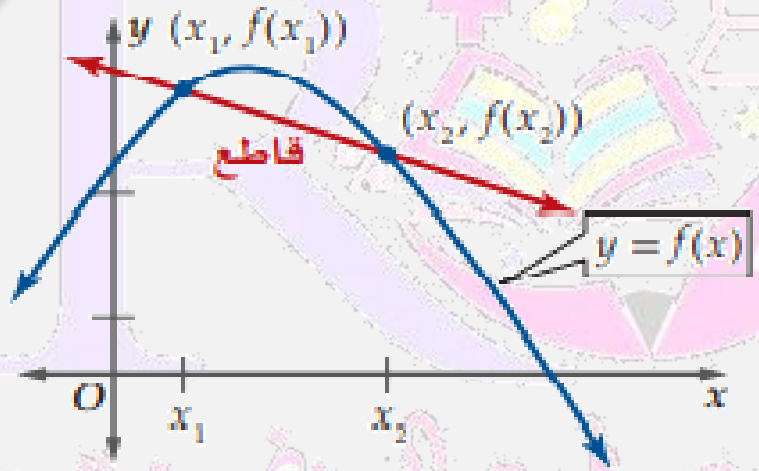
4) صناعة: يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

مفهوم أساسي

متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

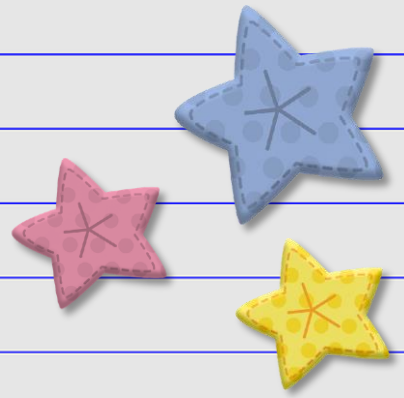
هندسيًا: يُسمّى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .



الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math



مقطع توضيحي

بسمة math

مثال5

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

عوّض x_2 مكان -1، x_1 مكان -2

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$

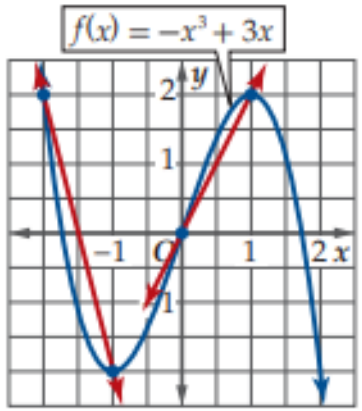
عوّض $f(-1)$، $f(-2)$

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$

بسّط

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4.



الشكل 1.4.1

b) $[0, 1]$

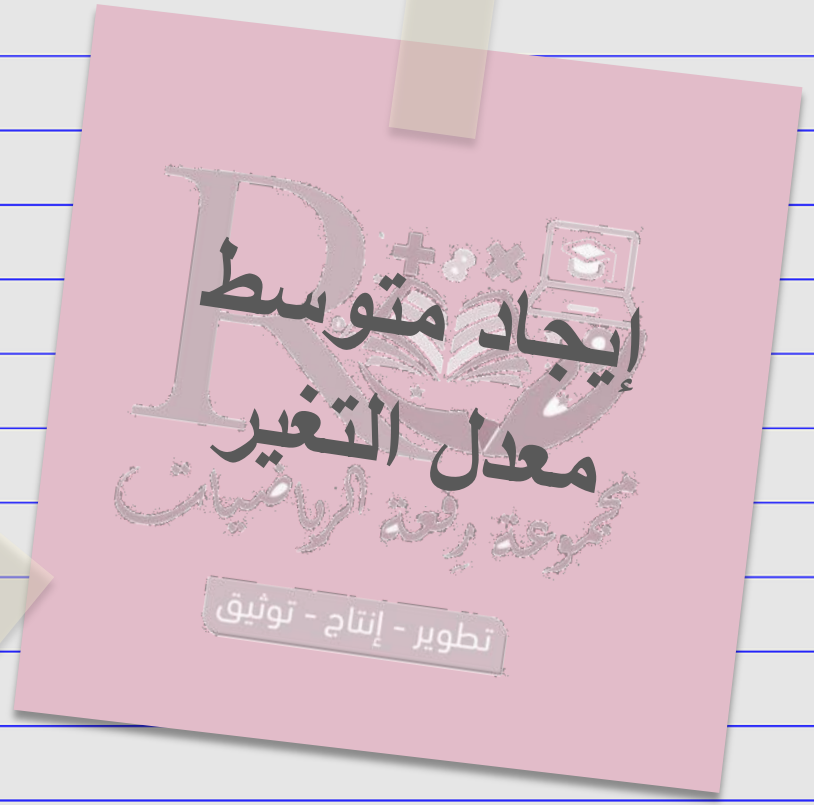
عوّض x_2 مكان 1، x_1 مكان 0

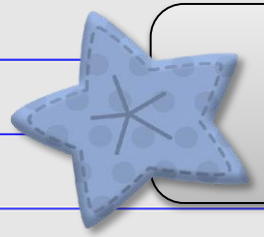
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

عوّض $f(1)$، $f(0)$ وبسّط

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.





تحقق من فهمك

(5A $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

(5B $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

مثال6

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ عوّض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32$$ عوّض $d(2)$ ، $d(0)$ ، وبسّط

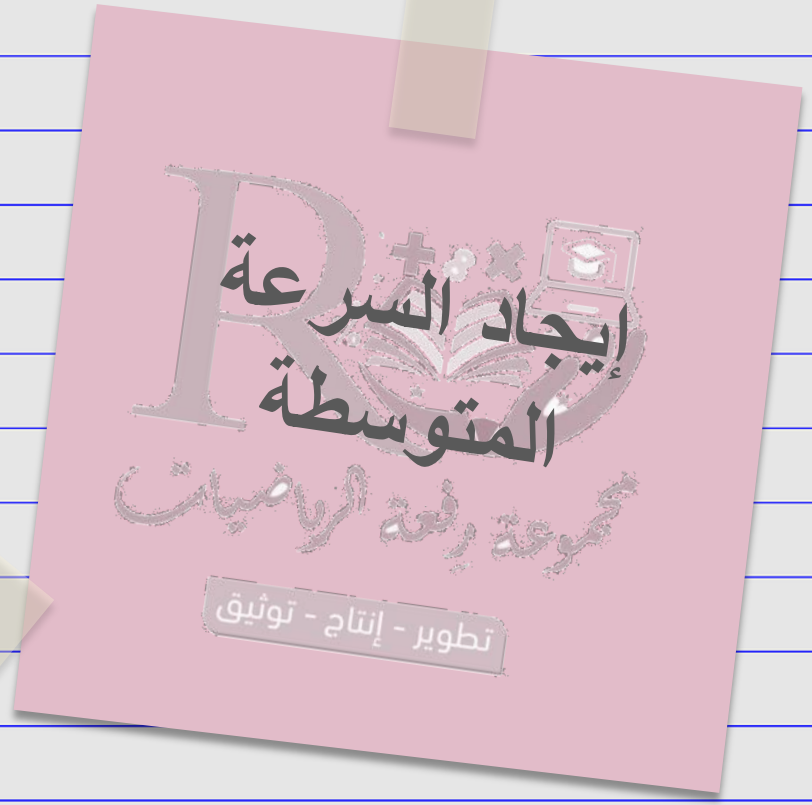
متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

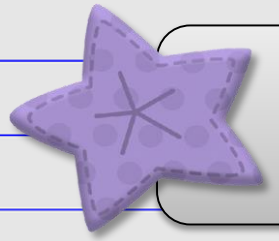
$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ عوّض 4 مكان t_2 ، 2 مكان t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوّض $d(4)$ ، $d(2)$ ، وبسّط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s ، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

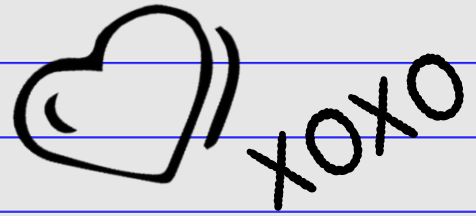


1+2=3



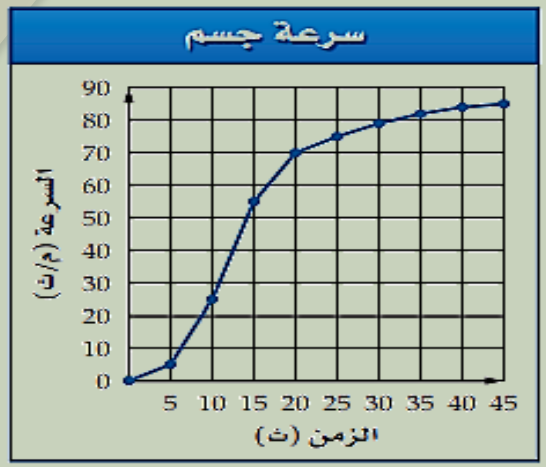
تحقق من فهمك

6) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.



تـــــدرب

26) استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:

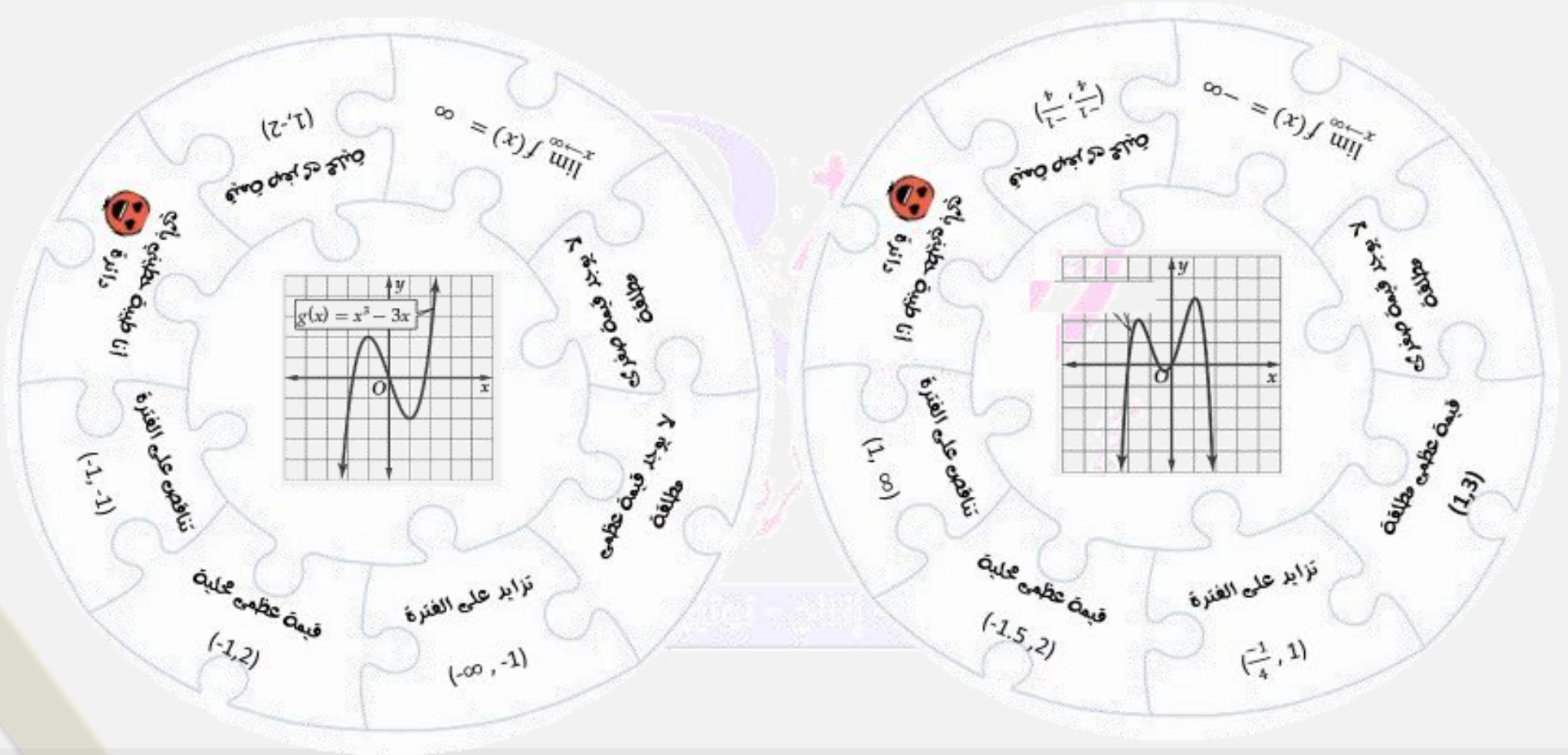


a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات $[5, 15]$, $[15, 20]$, $[25, 45]$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

العب واستمتع

$1+2=3$

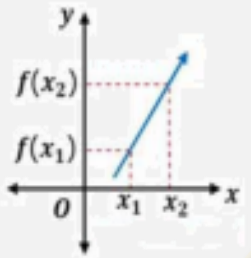


اطراد الدالة

متزايدة

كلما زادت قيم x تزداد قيم f(x)

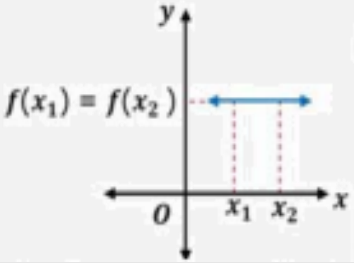
(كلما اتجهنا لليمين يرتفع المنحنى)



ثابتة

كلما زادت قيم x لا تتغير قيم f(x)

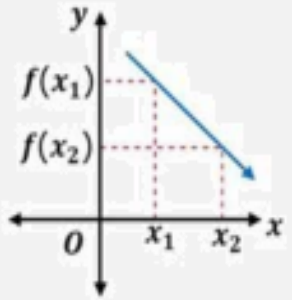
(كلما اتجهنا لليمين لا نخفض المنحنى ولا يرتفع)



متناقصة

كلما زادت قيم x تنقص قيم f(x)

(كلما اتجهنا لليمين ينخفض المنحنى)



جدول التعلم

ماذا أعرف	
ماذا أريد أن أعرف	
ماذا تعلمت	
كيف أتعلم أكثر	

بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
بسمة math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري

عضو في مجموعة رفعة التعليمية .

الحسابات الالكترونية :