# الفصل الأول
# رياضيات ٥

## العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

التاريخ:

اليوم:

المادة:

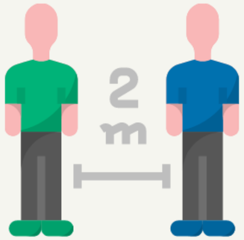
## نعود بحذر

الالتزام بارتداء الكمامة

عدم المصافحة

غسل اليدين

التباعد الاجتماعي



# ١-٥ الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

رابط الدرس الرقمي

## فيما سبق

درست التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها

## و الآن

- أقوم بتعيين الدوال الرئيسة (الأم) وأصفها و أمثلها بيانياً.
- أقوم بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة وأمثلها بيانياً.

# المفردات

الدالة الرئيسة (الأم)
parent function

الدالة الثابتة
constant function

الدالة المحايدة
identity function

الدالة التربيعية
quadratic function

الدالة التكعيبية
cubic function

دالة الجذر التربيعي
square root function

دالة المقلوب
reciprocal function

دالة القيمة المطلقة
absolute value function

دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function

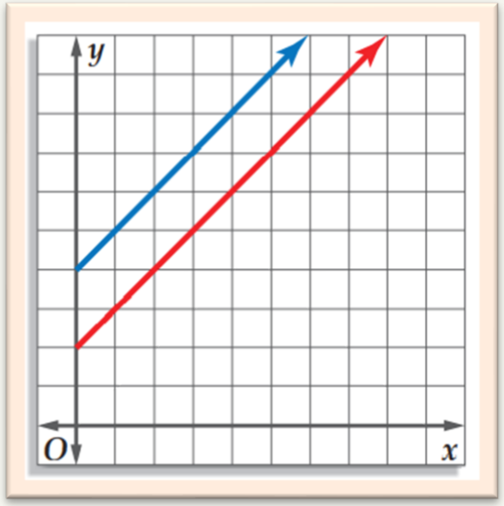
التحويل الهندسي
transformation

الإزاحة (الانسحاب)
translation

الانعكاس
reflection

التمدد
dilation

# لماذا؟




استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج $x$ قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

# الدوال الرئيسة (الأم)

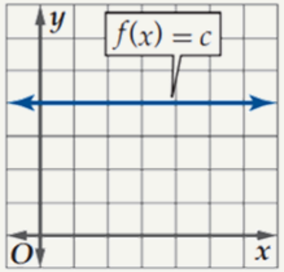
**الدوال الرئيسة (الأم):** عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

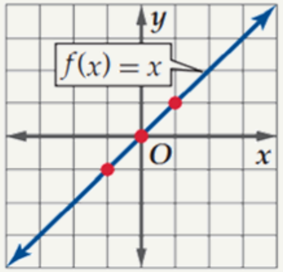
# الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

## مفهوم أساسي

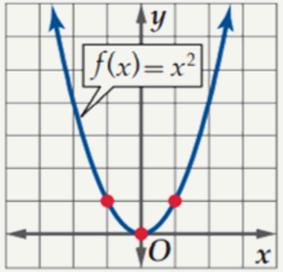
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث $c$ عدد حقيقي، وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



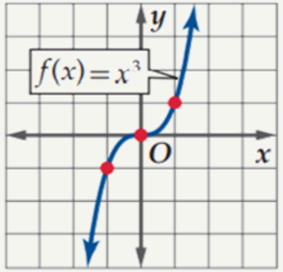

تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها $(a, a)$.




يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.




**الدالة التكعيبية** $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

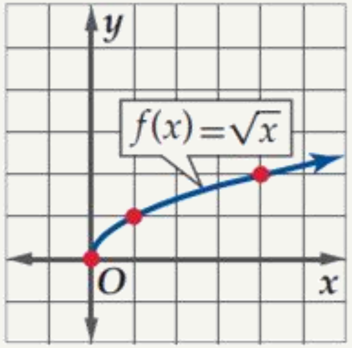


# الدوال الرئيسة (الأم) لكل من: دالتي الجذر التربيعي و المقلوب

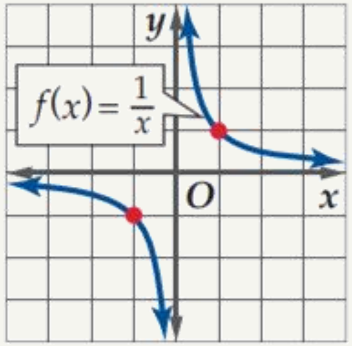
## مفهوم أساسي

كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب.

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\ , x \geq 0$.




تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\ , x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



# دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

## مفهوم أساسي

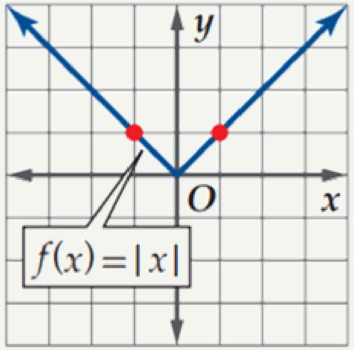
كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

**التعبير اللفظي:** يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $|x|$ $= f(x)$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

**أمثلة:** $|-5| = 5, \ |0| = 0, \ |4| = 4$

**النموذج**



# دالة أكبر عدد صحيح

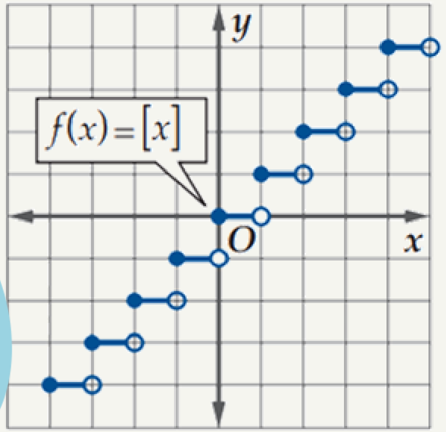
## مفهوم أساسي

أما **الدالة الدرجية**، فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

**التعبير اللفظي:** يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [\![x]\!]$،
وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي $x$ .

**أمثلة:** $[\![-4]\!] = -4,\ [\![-1.5]\!] = -2,\ [\![\frac{1}{3}]\!] = 0$

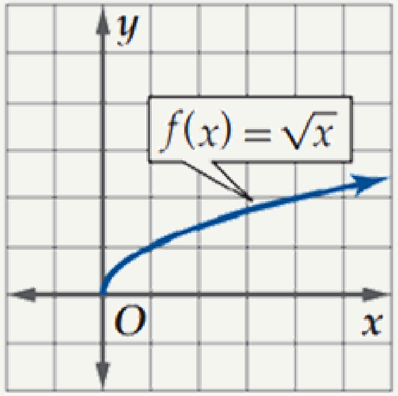
**النموذج**



## وصف خصائص الدالة الرئيسة(الأم)

### مثال ١

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع $x$ والمقطع $y$ والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.




الشكل 1.5.1

# الحل

## تحقق من فهمك

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع $x$ والمقطع $y$ والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$

# الحل

1

## تدرب وحل المسائل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع $x$ ، والمقطع $y$، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال 1)

(1 $f(x) = [x]$

# الحل

1

# التحويلات الهندسية

**التحويلات الهندسية :** تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

# الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

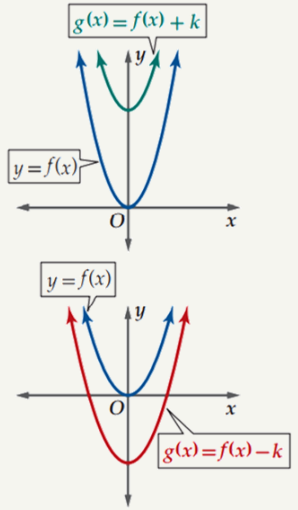
## مفهوم أساسي

**الانسحاب (الإزاحة)** أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة $f$ إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

**الانسحاب الرأسي**

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

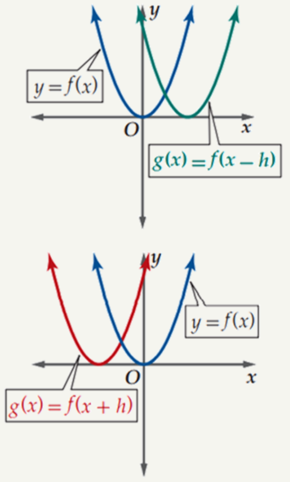
- $k$ وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$ .
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$ .




**الانسحاب الأفقي**

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- $h$ من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$ .
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$ .



## انسحاب منحنى الدالة

### مثال ٢

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

a) $g(x) = |x| + 4$

b) $g(x) = |x + 3|$

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

الحل

# تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

**2A)** $h(x) = x^3 - 5$

**2B)** $h(x) = 8 + x^3$

**2C)** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

الحل

## تدرب وحل المسائل

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

7) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

## الحل

7

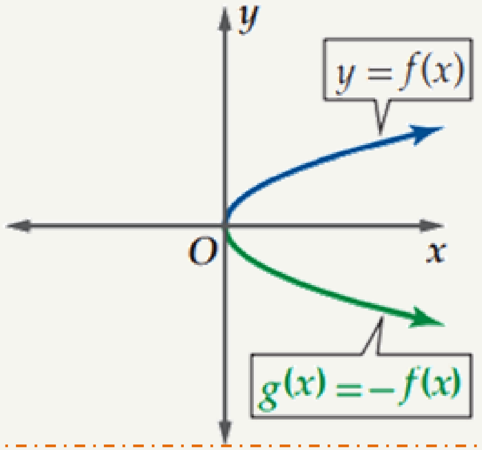
# الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

## مفهوم أساسي

من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس**، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

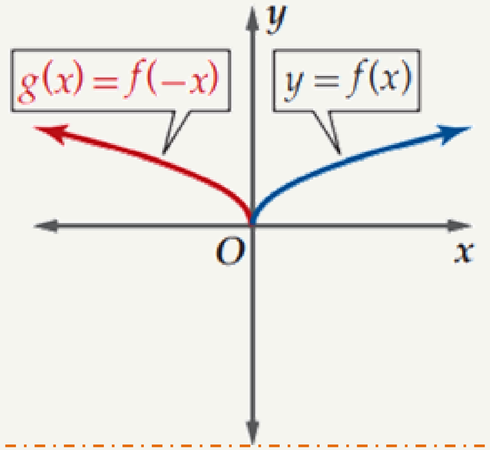
### الانعكاس حول المحور $x$

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور $x$ .

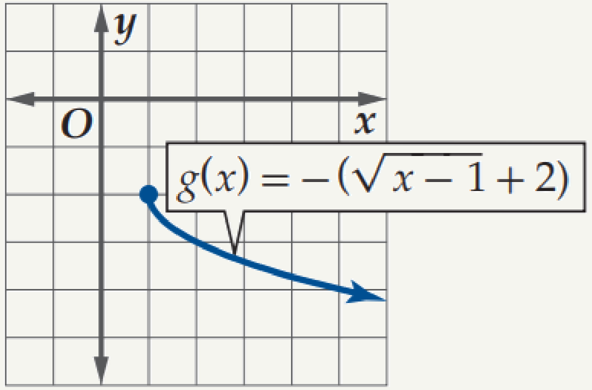



### الانعكاس حول المحور $y$

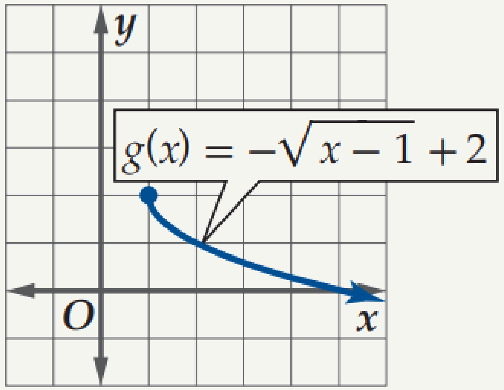
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور $y$ .



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -\left(\sqrt{x-1} + 2\right)$.




انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور $x$ .

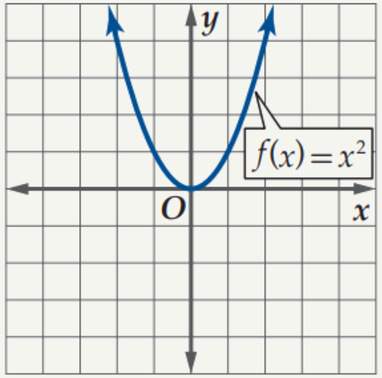



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور $x$ ، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

## كتابة معادلات التحويل

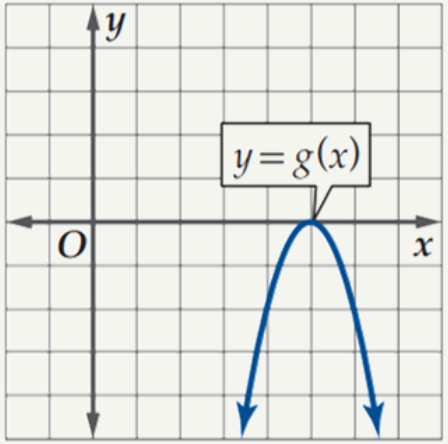
### مثال ٣

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



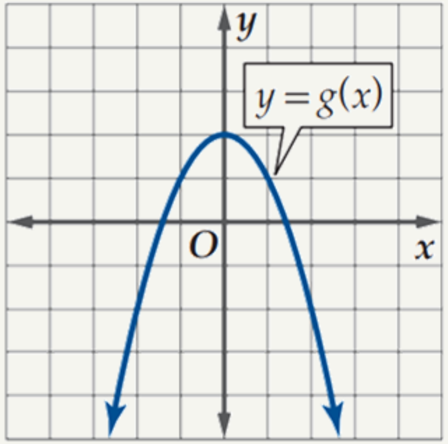

الشكل 1.5.5

(a




منحنى الدالة $g$ هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور $x$، أي أن $g(x) = -(x - 5)^2$.

(b



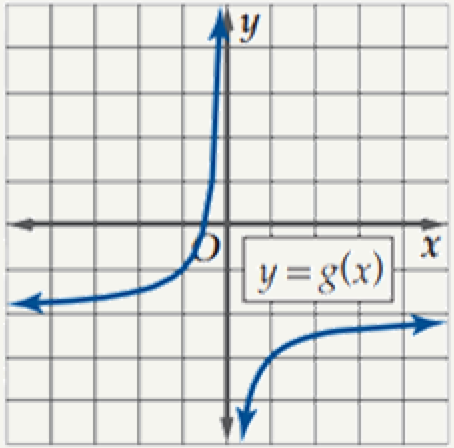

منحنى الدالة $g$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور $x$ ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

## الحل

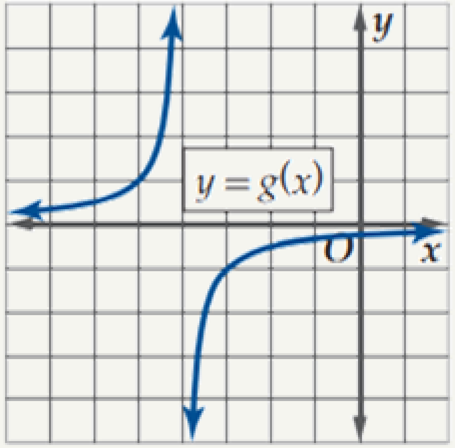
## تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

3A)




3B)

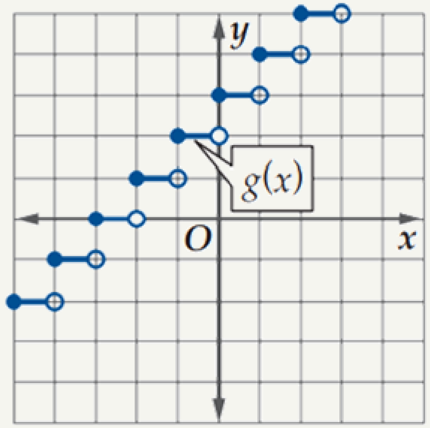


# الحل

## تدرب وحل المسائل

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$ . (مثال 3)

(11



الحل

11

# التمدد الرأسي و التمدد الأفقي

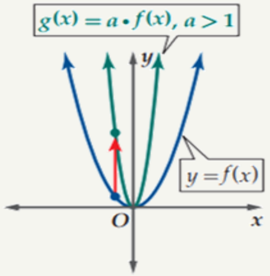
## مفهوم أساسي

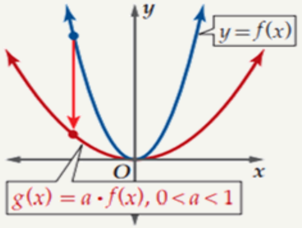
**التمدد** هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًا أو أفقيًا.

### التمدد الرأسي

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$ .
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

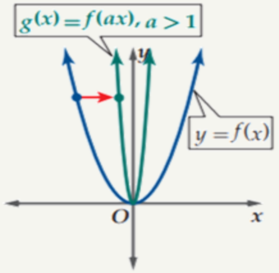


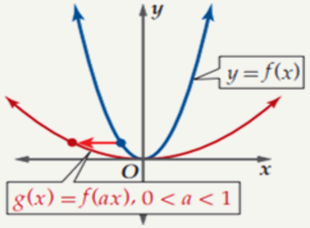




### التمدد الأفقي

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$ .
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



## وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

### مثال ٤

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

b) $g(x) = -(2x)^2$

**إرشادات للدراسة**

**التمدد:**
يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبِّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

الحل

a

الحل

b

## تحقق من فهمك

(4A $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

(4B $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

الحل

4A

## الحل

4B

## تدرب وحل المسائل

اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما في مستوى إحداثي واحد . (مثال 4)

**15)** $g(x) = 3|x| - 4$

الحل

15

تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانياً

مثال ٥

مثّل الدالة بيانيًّا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \; x < -1 \\ -1 & , \; -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \; x \ge 4 \end{cases}$ .

# الحل

## تحقق من فهمك

**5A)**
$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \le 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \le 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

**5B)**
$$h(x) = \begin{cases} (x + 6)^2 & , \quad x < -5 \\ 7 & , \quad -5 \le x \le 2 \\ |4 - x| & , \quad x > 2 \end{cases}$$

الحل

5A

الحل

5B

## تدرب وحل المسائل

**مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًّا:** (مثال 5)

**(21**
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -2 \\ 3 & , \quad -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$$

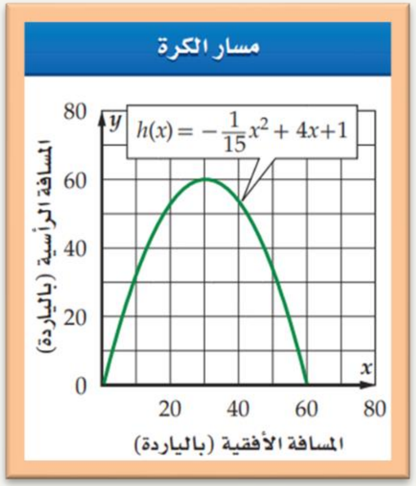
## الحل

21

## التحويلات الهندسية على الدوال

### مثال ٦

**كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل $x$ المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$ .




أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x-h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

**الربط مع الحياة**

تأسس الاتحاد السعودي لكرة القدم عام 1956 م، وقد انضم إلى الفيفا والاتحاد الآسيوي في العام نفسه.

## الحل

# تحقق من فهمك

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث $x$ القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$ .

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

الحل

A

الحل

B

## تدرب وحل المسائل

**26)** **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًّا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x) = 20 + 0.2\,[x]$، حيث $x$ عدد دقائق الاتصال. (مثال 6)

**a)** صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [x]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

الحل

26

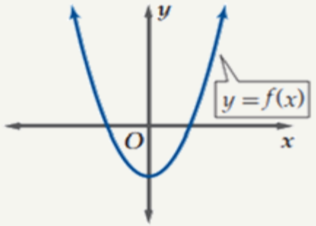
# التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

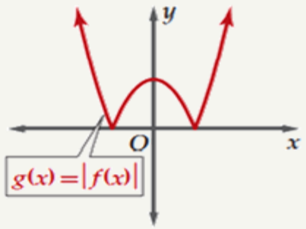
## مفهوم أساسي

تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

### $g(x) = |f(x)|$

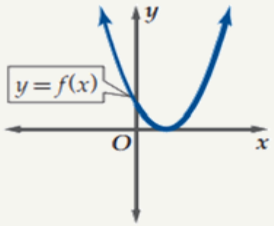
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور $x$ ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور $x$.

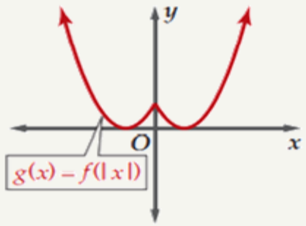



### $g(x) = f(|x|)$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور $y$ ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور $y$ بالانعكاس حول المحور $y$ .




**إرشاد تقني**

**تحويلات القيمة المطلقة**

يمكنك التحقق من أثر التحويل الهندسي على منحنى القيمة المطلقة باستعمال الحاسبة البيانيّة. ويمكنك أيضًا تمثيل كلا الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه .

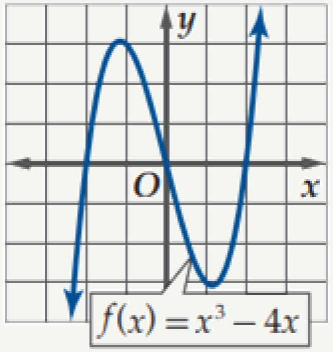
## وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

### مثال ٧

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

(a $g(x) = |f(x)|$

(b $h(x) = f(|x|)$



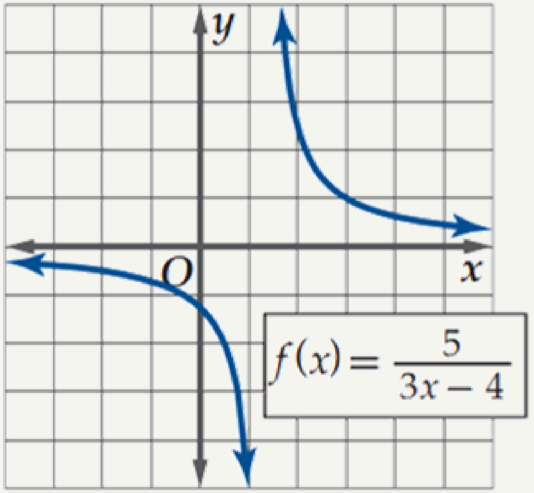

الشكل 1.5.6

# الحل

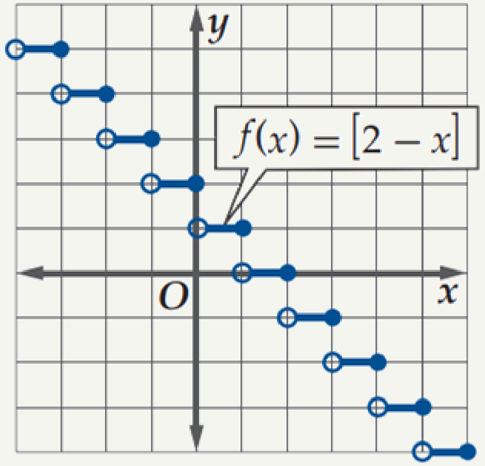
# تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

(7A




(7B



الحل

7A

الحل

7B

# تدرب وحل المسائل

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|, h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (مثال 7)

28) $f(x) = \frac{2}{x}$

# الحل

28

## مسائل التفكير العليا

**54)** **تحدّ:** صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للوصول إلى دالة يمر منحناها بالنقطة $(-2, -6)$.

# تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا