التوازي والتعامد

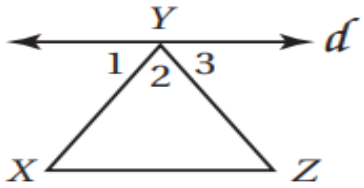
ميل المستقيم

بدور يحي الغامدي
معلمة رياضيات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بدور يحي الغامدي
معلمة رياضيات

أي الحقائق الآتية كافية لإثبات أن المستقيم d يوازي $\overline{XZ}$ ؟



A $\angle 1 \cong \angle 3$

B $\angle 3 \cong \angle Z$

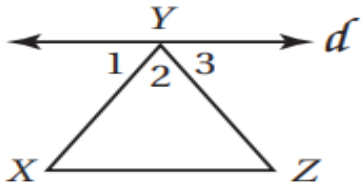
C $\angle 1 \cong \angle Z$

D $\angle 2 \cong \angle X$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بدور يحي الغامدي
معلمة رياضيات

أي الحقائق الآتية كافية لإثبات أن المستقيم d يوازي $\overline{XZ}$ ؟



A $\angle 1 \cong \angle 3$

B $\angle 3 \cong \angle Z$

C $\angle 1 \cong \angle Z$

D $\angle 2 \cong \angle X$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بدور يحي الغامدي
معلمة رياضيات

التوازي والتعامد

ميل المستقيم

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بدور يحي الغامدي
معلمة رياضيات

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل

slope

معدّل التغير

rate of change

بدور يحي الغامدي
معلمة رياضيات

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

لماذا؟

تستعمل لوحات مرورية لتنبه السائقين إلى حالة الطريق.
فاللوحة المجاورة تشير إلى انحدار الطريق بنسبة 6% ،
وهذا يعني أن الطريق ترتفع أو تهبط بمقدار 6 m رأسيًّا لكل 100 m أفقيًّا.

فيما سبق:
درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.
(الدرس 3-2)

والآن:
- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:
الميل
slope
معدّل التغير
rate of change

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

فيما سبق:
درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.
(الدرس 3-2)

والآن:
- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:
الميل
slope
معدّل التغير
rate of change

ميل المستقيم: درست سابقًا حساب ميل المستقيم في المستوى الإحداثي باستعمال أي نقطتين عليه، وعرفت أنه نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

يمكنك استعمال إحداثيات النقاط على المستقيم لتشتق صيغة للميل.

مفهوم أساسي

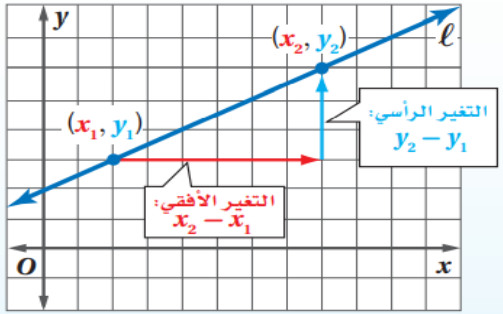
ميل المستقيم

في المستوى الإحداثي ، ميل المستقيم هو نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x بين أي نقطتين عليه.

ويعطى الميل m لمستقيم يحوي نقطتين إحداثياهما (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) بالصيغة:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ ، حيث $x_1 \neq x_2$.

أضف إلى مطويتك



$$m = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

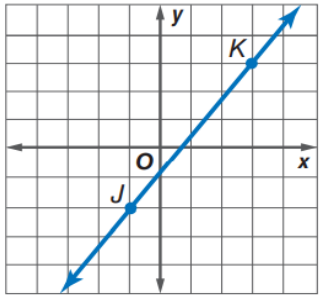
الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

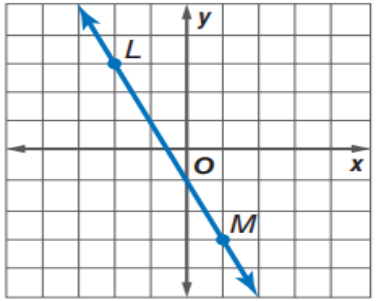
مثال 1 إيجاد ميل المستقيم

أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

(a



(b



إرشادات للدراسة

القسمة على 0

ميل المستقيم في المثال 1d غير معرّف؛ لأنه لا يوجد عدد تضربه في 0 يُعطي 5−. وبما أن هذا صحيح لأي عدد، فإن أي عدد مقسوم على 0 يمثل كمية غير معرّفة. ومن ذلك يكون ميل أي مستقيم رأسي غير معرّف.

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

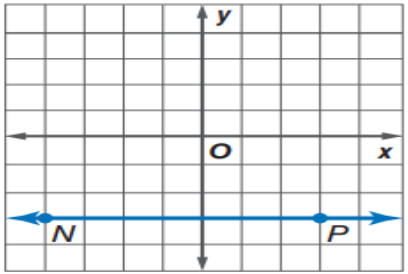
الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

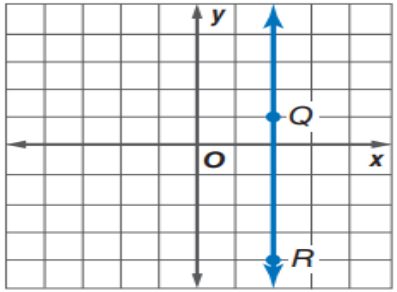
مثال 1 إيجاد ميل المستقيم

أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

(c



(d



إرشادات للدراسة

القسمة على 0

ميل المستقيم في المثال 1d غير معرّف؛ لأنه لا يوجد عدد تضربه في 0 يُعطي 5−. وبما أن هذا صحيح لأي عدد، فإن أي عدد مقسوم على 0 يمثل كمية غير معرّفة. ومن ذلك يكون ميل أي مستقيم رأسي غير معرّف.

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

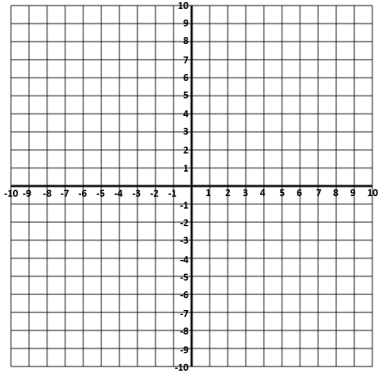
الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

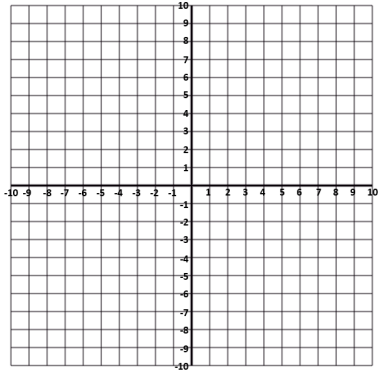
الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

تحقق من فهمك

1A) المستقيم الذي يحتوي على $(-3, -5), (-2, 6)$.



1B) المستقيم الذي يحتوي على $(-6, -2), (-3, 8)$.



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

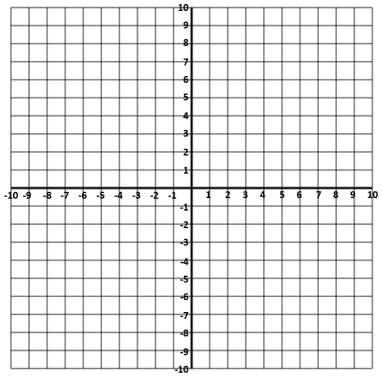
المفردات:

الميل
slope

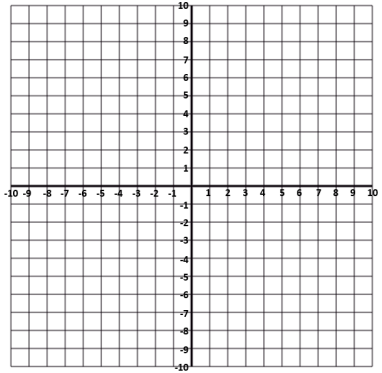
معدّل التغير
rate of change

تحقق من فهمك

1C) المستقيم الذي يحتوي على $(4, 2), (4, -3)$.



1D) المستقيم الذي يحتوي على $(4, 3), (-3, 3)$.



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

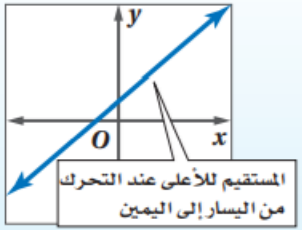
يوضّح **المثال** 1 أربع حالات مختلفة للميل وهي :

ملخص المفهوم

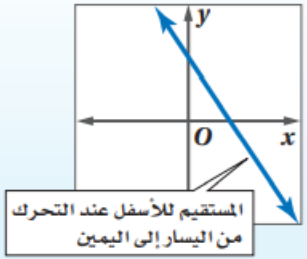
أضف إلى مطويتك

حالات الميل

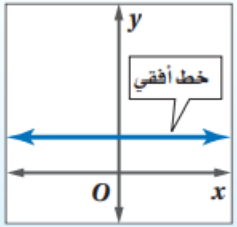
الميل موجب



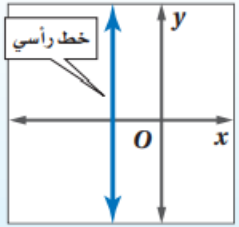
الميل سالب



الميل يساوي صفرًا



الميل غير معرّف



يمكن تفسير الميل على أنه **معدّل التغير** في الكمية y بالنسبة إلى الكمية x، ويمكن استعمال ميل المستقيم أيضًا لتعيين إحداثيَّي أي نقطة على المستقيم.

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

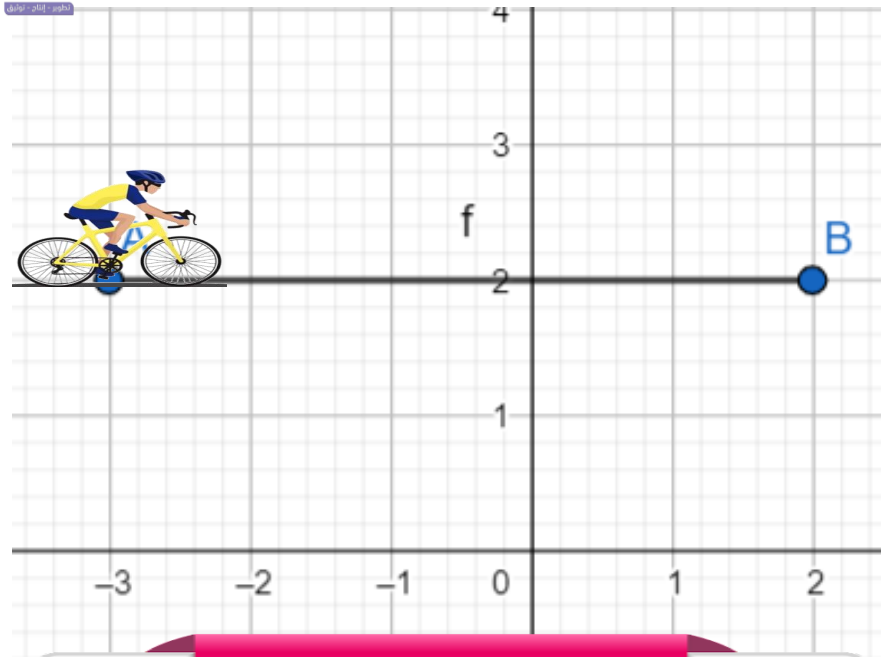
- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

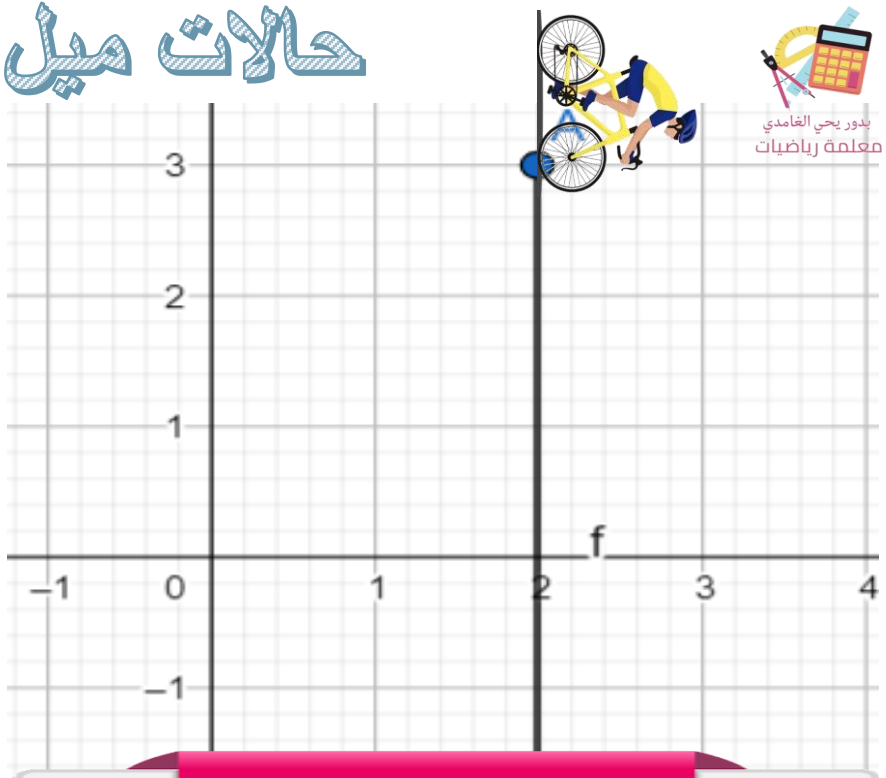
معدّل التغير
rate of change

حالات ميل المستقيم



الميل يساوي صفر خط افقي

$$m=\frac{2-2}{2-(-3)}$$

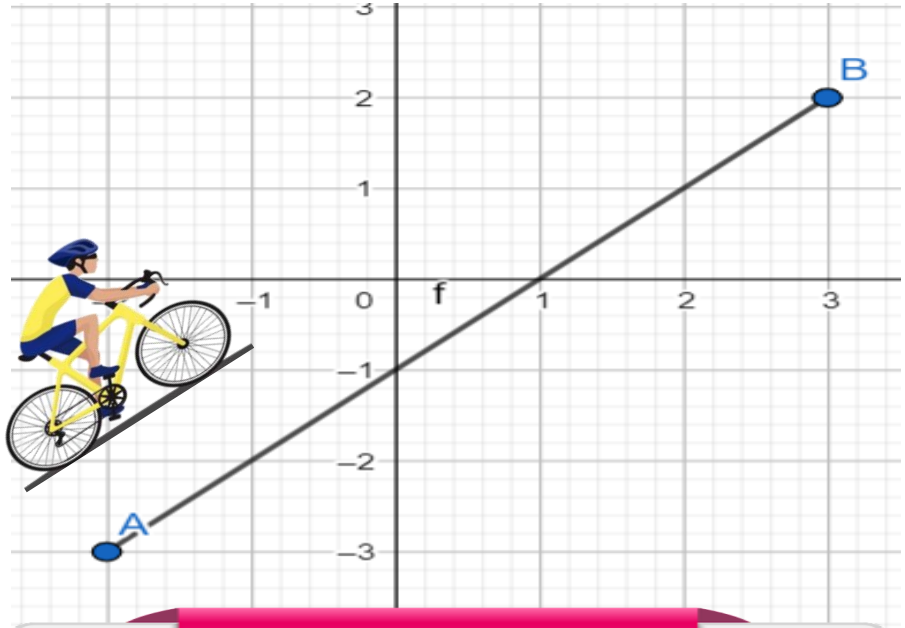


الميل غير معرف خط راسي

$$m=\frac{3-2}{2-2}$$

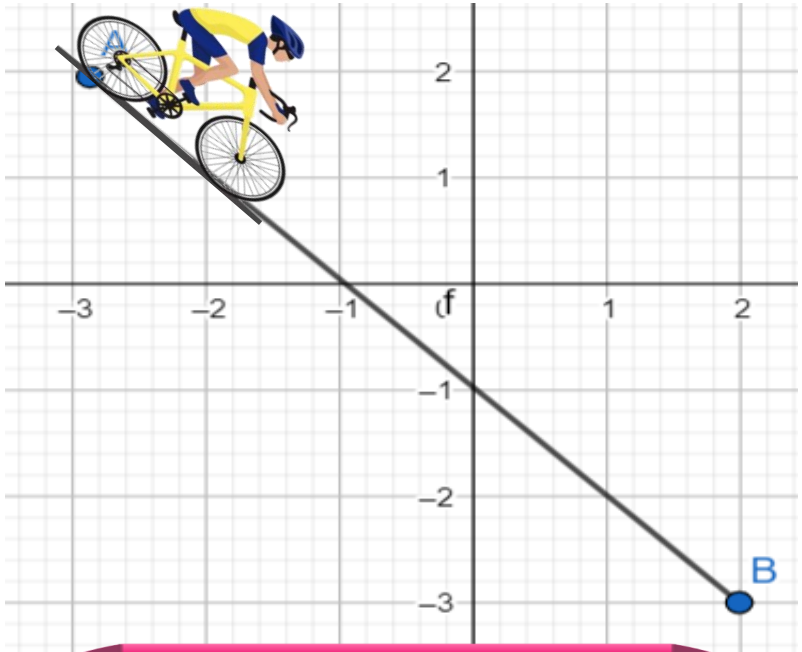
بدور يحي الغامدي
معلمة رياضيات

حالات ميل المستقيم



الميل يساوي **عدد موجب** المستقيم للأعلى عند التحرك من اليسار **الى اليمين**

$$m=\frac{-3-2}{-2-3}$$



الميل يساوي عدد سالب المستقيم للأسفل عند التحرك من اليسار الى اليمين

$$m=\frac{2-(-3)}{-3-2}$$

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

مثال 2 من واقع الحياة

استعمال الميل معدلًا للتغير

طائرات: تحلِّق طائرة في مسارٍ جويٍّ مستقيم يمر بمدينة الرياض ثم بالمدينة المنورة. إذا كانت الطائرة على بُعد **500 km** من المدينة المنورة بعد **0.5 h** من مرورها فوق الرياض، ثم أصبحت على بُعد **152 km** من المدينة المنورة بعد نصف ساعة أخرى. كم كان بُعدها عن المدينة المنورة بعد **0.75 h** من مرورها فوق الرياض إذا كانت سرعتها ثابتةً.

الربط مع الحياة

المسارات الجوية

توجد خرائط جوية تضبط مسارات الطائرات وارتفاعاتها وتضمن عدم تصادمها.

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

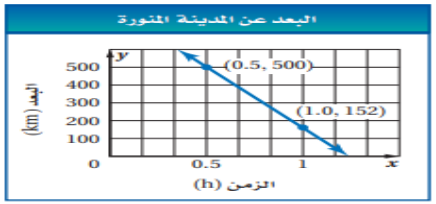
الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال الميل معدلًا للتغير

طائرات: تحلّق طائرة في مسارٍ جويٍّ مستقيم يمر بمدينة الرياض ثم بالمدينة المنورة. إذا كانت الطائرة على بُعد 500 km من المدينة المنورة بعد 0.5 h من مرورها فوق الرياض، ثم أصبحت على بُعد 152 km من المدينة المنورة بعد نصف ساعة أخرى. كم كان بُعدها عن المدينة المنورة بعد 0.75 h من مرورها فوق الرياض إذا كانت سرعتها ثابتةً.

افهم: استعمل البيانات المعطاة لترسم المستقيم الذي يمثل البعد y بالكيلومترات كدالة في الزمن x بالساعات.

عيّن النقطتين (0.5, 500)، (1, 152) في المستوى الإحداثي، ثم ارسم مستقيمًا يمر بهما.



المطلوب هو إيجاد البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h

خطط: أوجد ميل المستقيم في الشكل المجاور، واستعمله معدّل تغيّر المسافة بالكيلومتر بالنسبة للزمن بالساعة لإيجاد بُعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h

حل: استعمل صيغة الميل لإيجاد ميل المستقيم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(152 - 500)\text{ km}}{(1.0 - 0.5)\text{ h}} = \frac{-348\text{ km}}{0.5\text{ h}} = \frac{-696\text{ km}}{1\text{ h}}$$

تحلّق الطائرة بسرعة 696 km/h

والإشارة السالبة تشير إلى تناقص المسافة مع مرور الزمن.

استعمل ميل المستقيم وإحدى النقطتين عليه؛ لتجد البعد y عندما يكون الزمن $x = 0.75$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.75 - 0.5}$	$m = -696, x_1 = 0.5, y_1 = 500, x_2 = 0.75$
$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.25}$	بتبسيط
$-174 = y_2 - 500$	اضرب كلا الطرفين في 0.25
$326 = y_2$	اجمع 500 إلى كل طرف

إذن كان بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h يساوي 326 km

تحقق يمكننا من الشكل تقدير البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h بأكثر من 300 km قليلًا. وبما أن 326 قريبة من هذا التقدير فإن الإجابة معقولة. ✓

فيما سبق:
درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.
(الدرس 3-2)

والآن:
- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:
الميل
slope
معدّل التغير
rate of change

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

تحقق من فهمك

2) **مبيعات:** كانت مبيعات مصنع معلبات غذائية 20 مليون علبة عام 2011م، و200 مليون علبة عام 2016م، إذا حافظ المصنع على المعدل نفسه من الزيادة، فكم تكون مبيعاته من العلب عام 2020م ؟

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

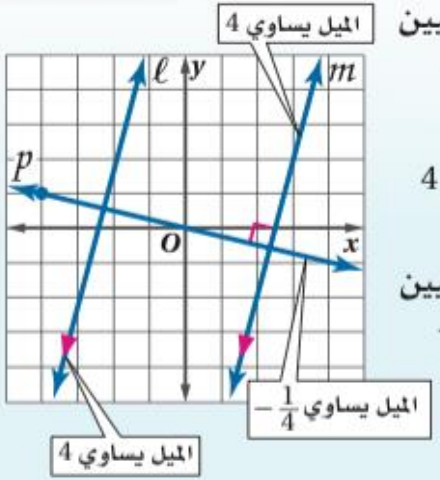
الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

مسلمات

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

أضف إلى مطويتك



2.4 **ميلا المستقيمين المتوازيين:** يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين. وجميع المستقيمات الرأسية متوازية.

مثال: المستقيمان المتوازيان ℓ, m لهما الميل نفسه ويساوي 4

2.5 **ميلا المستقيمين المتعامدين:** يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 والمستقيمات الأفقية والرأسية متعامدة.

مثال: المستقيم m عمودي على المستقيم p، أو $m \perp p$

ناتج ضرب الميلين هو $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

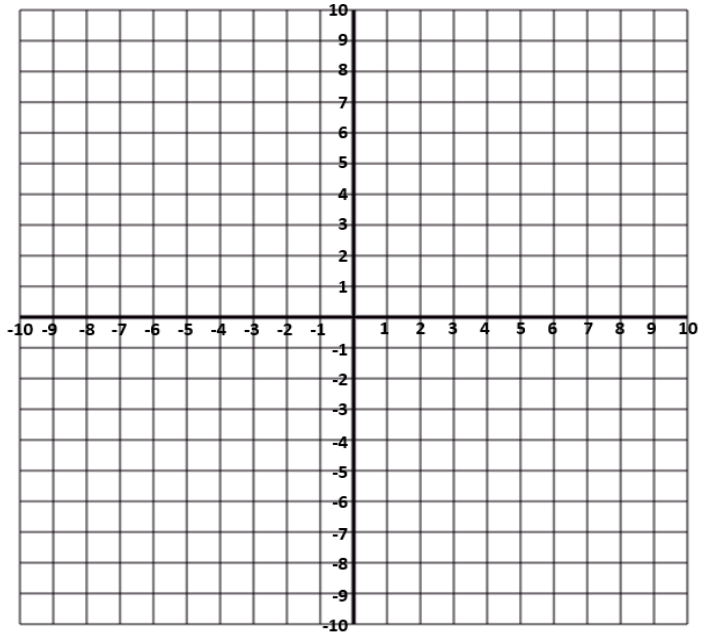
المفردات:

الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

مثال 3 تحديد علاقات المستقيمات

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا كانت $A(1,1), B(-1,-5), C(3,2), D(6,1)$، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

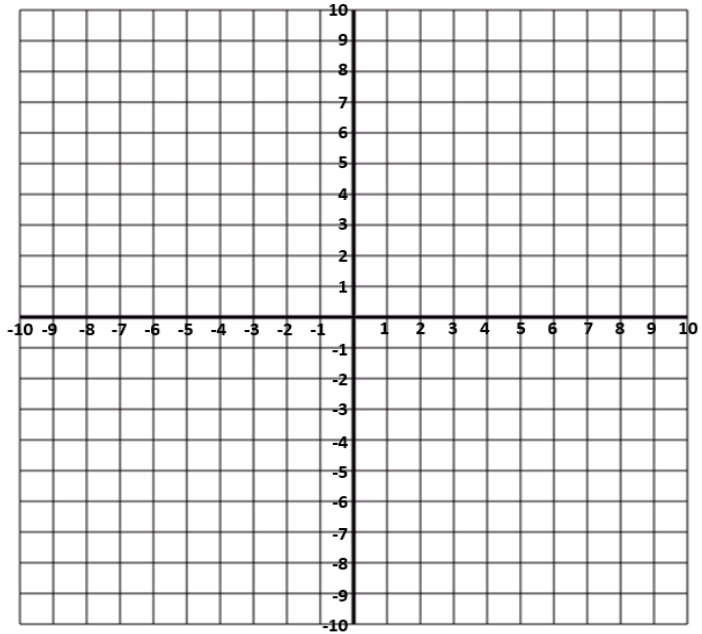
معدّل التغير
rate of change

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثِّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

(3A) $A(14, 13), B(-11, 0), C(-3, 7), D(-4, -5)$



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

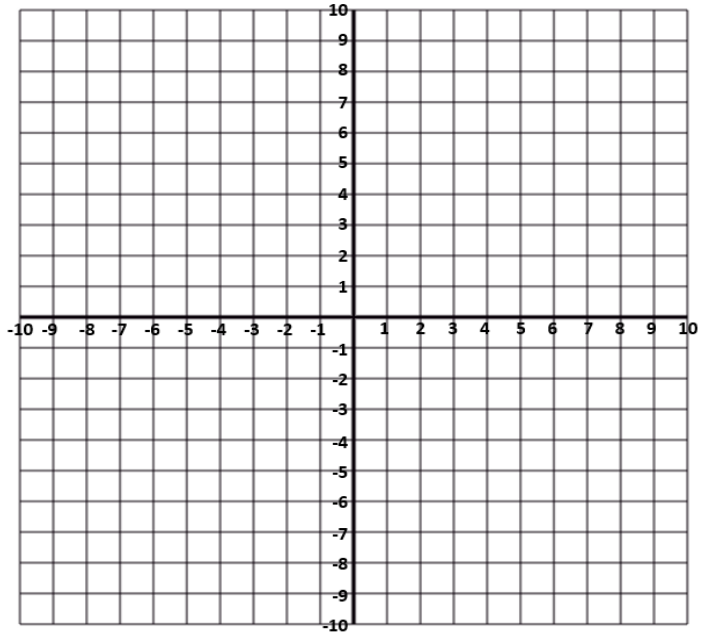
الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثِّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

(3B $A(3, 6), B(-9, 2), C(5, 4), D(2, 3)$



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

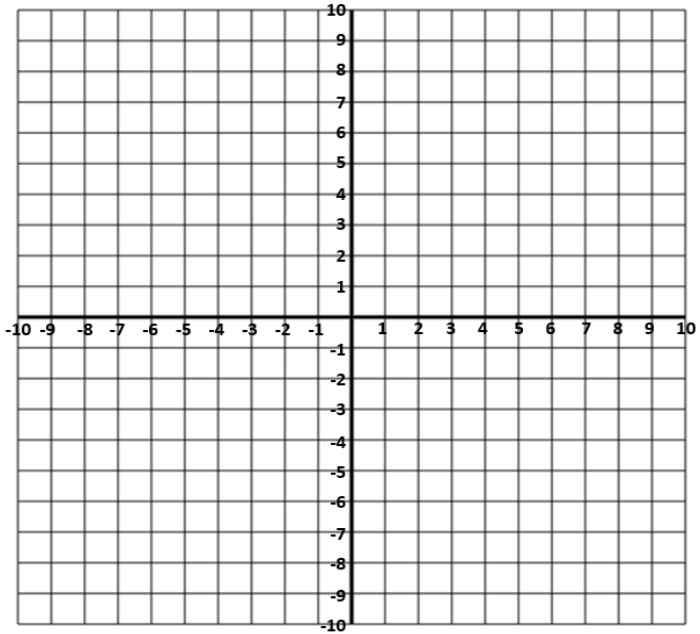
المفردات:

الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

مثال 4 استعمال الميل لتمثيل المستقيم بيانيًا

مثل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-3, 0)$ ويعامد $\overleftrightarrow{CD}$ ، حيث $C(-2, -3), D(2, 0)$.



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

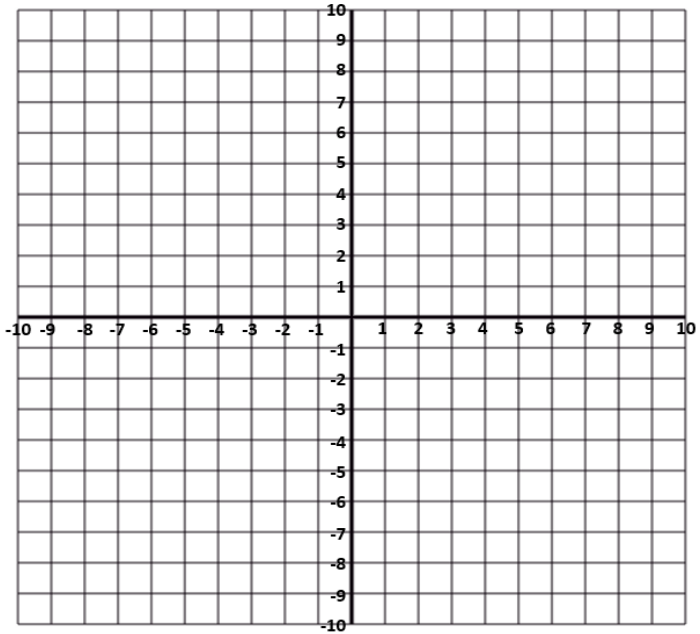
الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

تحقق من فهمك

4) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(0, 1)$ ويعامد $\overleftrightarrow{QR}$ ، حيث $Q(-6, -2), R(0, -6)$.



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

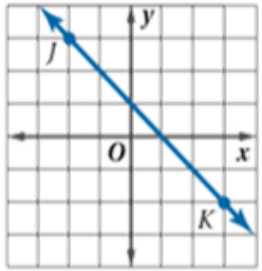
الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

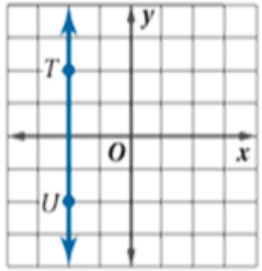
تأكد

المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

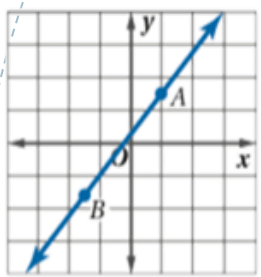
(1



(2



(3



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

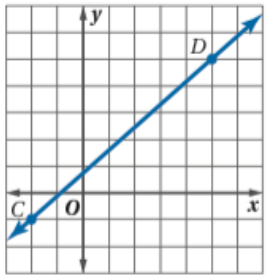
معدّل التغير
rate of change

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

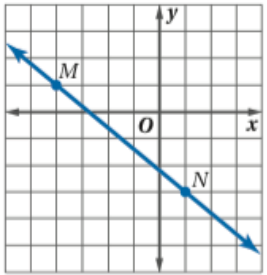
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

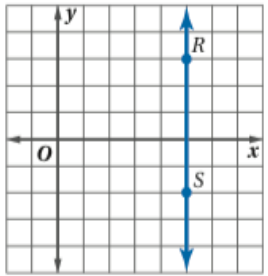
(12



(13



(14



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

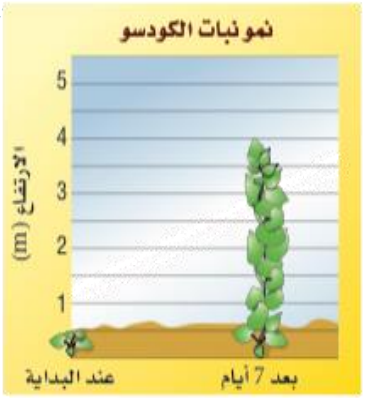
الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

المثال 2

4) علم النبات: الكودسو (Kudzu) هو نبات متسلّق سريع النمو. قيس ارتفاع نبتة عند يوم البداية فكان 0.5 m، وبعد سبعة أيام أصبح ارتفاعها 4 m



a) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمثل ارتفاع النبتة مع مرور الزمن.

b) ما ميل هذا المستقيم؟ وماذا يُمثّل؟

c) افترض أن هذه النبتة استمرت في النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون ارتفاعها بعد 15يومًا؟

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

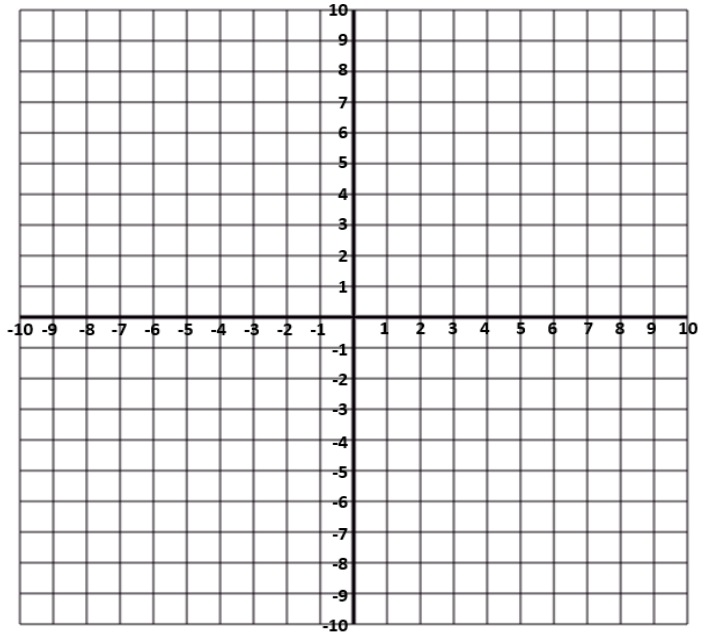
المفردات:

الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

المثال 3 حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

(22 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -10), D(-5, -5)$



فيما سبق:
درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.
(الدرس 3-2)

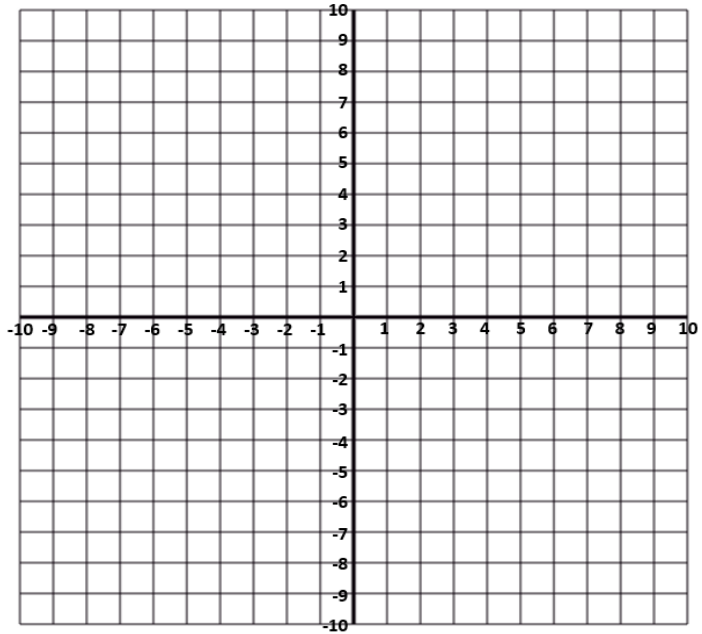
والآن:
- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:
الميل
slope
معدّل التغير
rate of change

الموضوع : ميل المستقيم التاريخ : / / ١٤٤٣هـ

المثال 4 مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

9) يمر بالنقطة $A(3, -4)$، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ، حيث $B(2, 4), C(5, 6)$.



فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

مسائل مهارات التفكير العليا

40) اكتشف الخطأ: حسب كلٌّ من خالد وطارق ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $Q(3, 5), R(-2, 2)$ هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

خالد

$$m = \frac{5-2}{-2-3}$$
$$= -\frac{3}{5}$$

طارق

$$m = \frac{5-2}{3-(-2)}$$
$$= \frac{3}{5}$$

فيما سبق:
درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.
(الدرس 3-2)

والآن:
- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:
الميل
slope
معدّل التغير
rate of change

تدريب على اختبار

44) أي المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا يعامد المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{4}x + 8$؟

A $y = -\frac{4}{3}x - 6$

B $y = \frac{4}{3}x + 5$

C $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

D $y = -\frac{3}{4}x - 5$

45) أي القيم الآتية تمثل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 4), (0, -2)$؟

A $-\frac{1}{3}$

B -3

C $\frac{1}{3}$

D 3

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

معدّل التغير
rate of change