



رياضيات ٢ - ١ العلاقات و الدوال

العلاقات و الدوال

المفردات

الدالة المتباينة
العلاقة المنفصلة
العلاقة المتصلة
اختبار الخط الراسي
المتغير المستقل
المتغير التابع

الآن

أحلل العلاقات و
الدوال .
أستعمل معادلات
العلاقات والدوال .

فيما سبق

تحديد كل من مجال ومدى
علاقة معطاه

لماذا

يبين الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة الرياض، لاحظ أن معدل كل من درجتي الحرارة الدنيا والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل معدلي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (9, 20).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة الرياض												
الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

كيف تعبر عن درجتي الحرارة العليا والدنيا لشهر نوفمبر كزوج مرتب؟

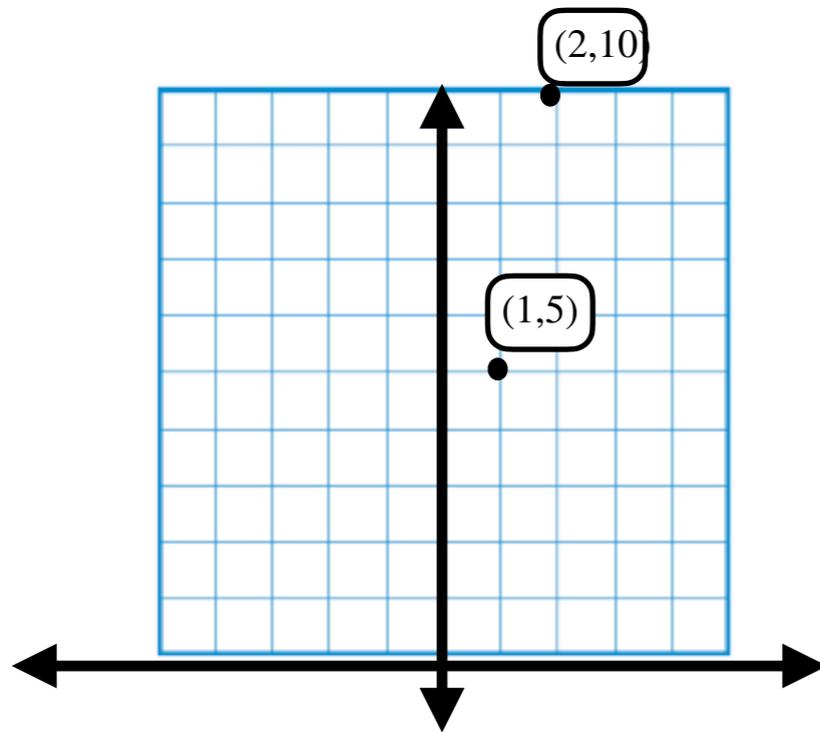
هل يمكن تمثيل دالة بين درجتي الحرارة العليا والدنيا

مهارات سابقة

العلاقة هي

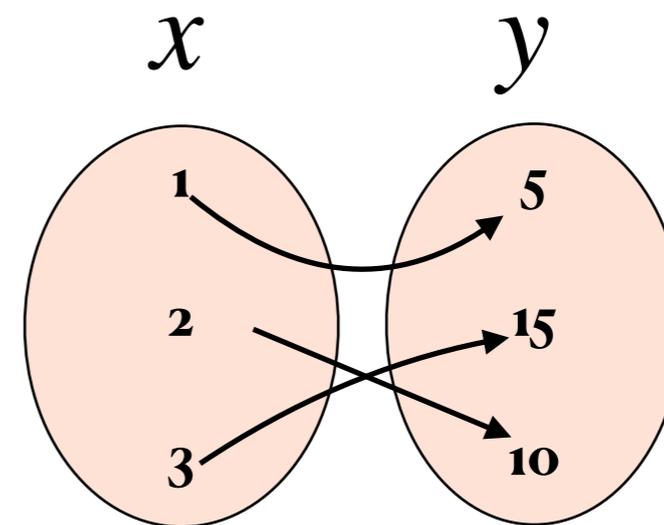
س / كيف يمكننا تمثيل علاقة ؟

س / كيف يمكننا تمثيل علاقة ؟



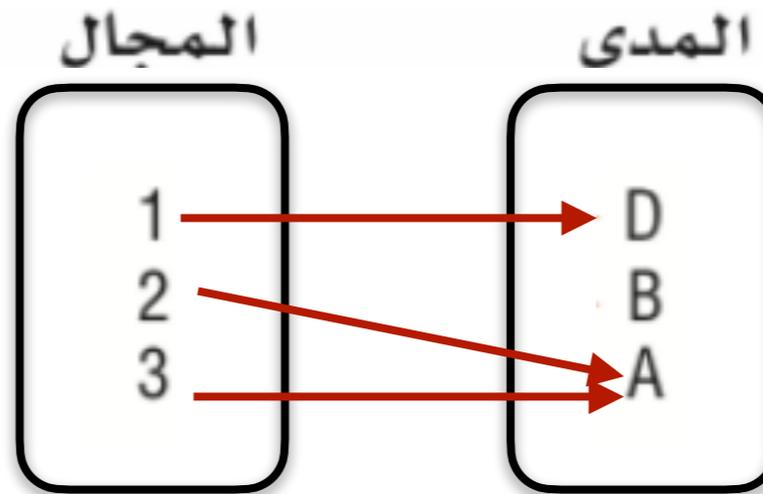
{ (1,5), (2,10), (3,15) }

X	Y
1	5
2	10
3	15



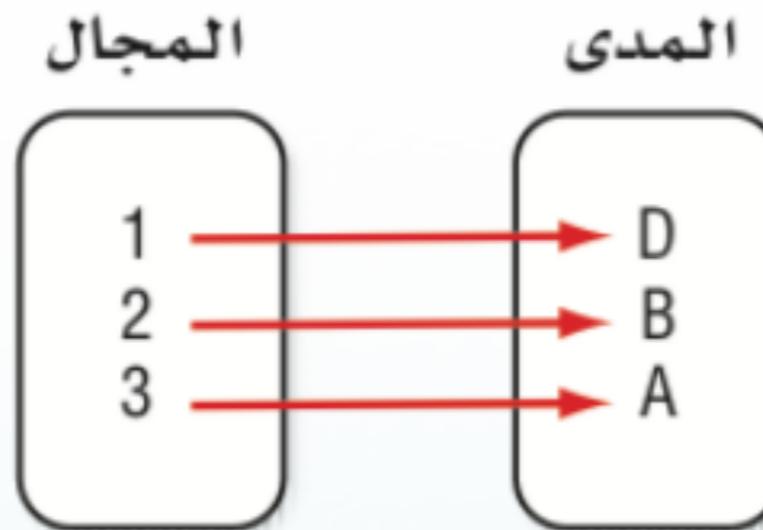
الدالة

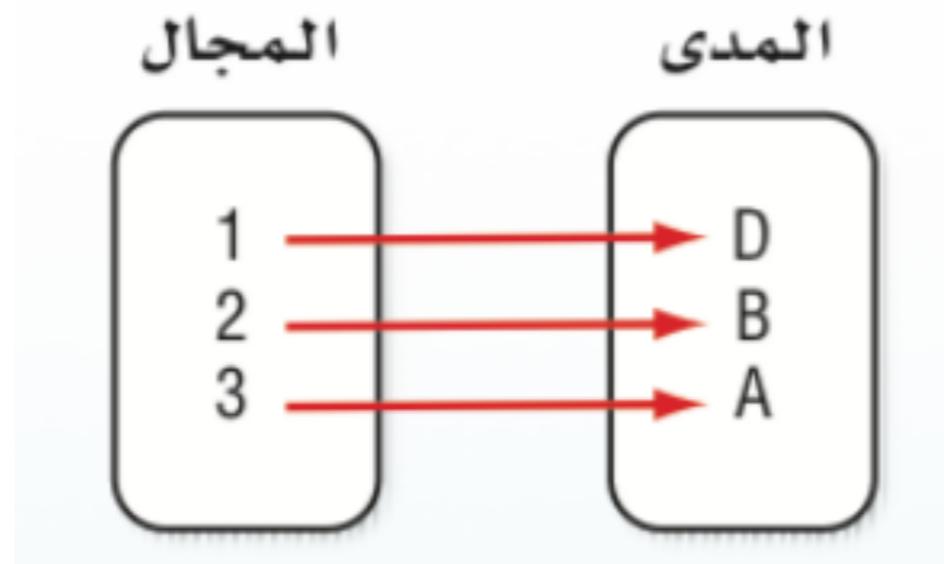
هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط من المدى



الدالة المتباينة

هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى , يعني لا يرتبط
عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى .





مجموعة إحداثيات x في الأزواج المرتبة الممثلة في العلاقة .

المجال

مجموعة إحداثيات y في الأزواج المرتبة الممثلة في العلاقة .

المدى

مثال ١

حدّد مجال كلّ علاقة فيما يأتي ومداهما، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟

$$(a) \{(-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7), (-6, -9)\}$$

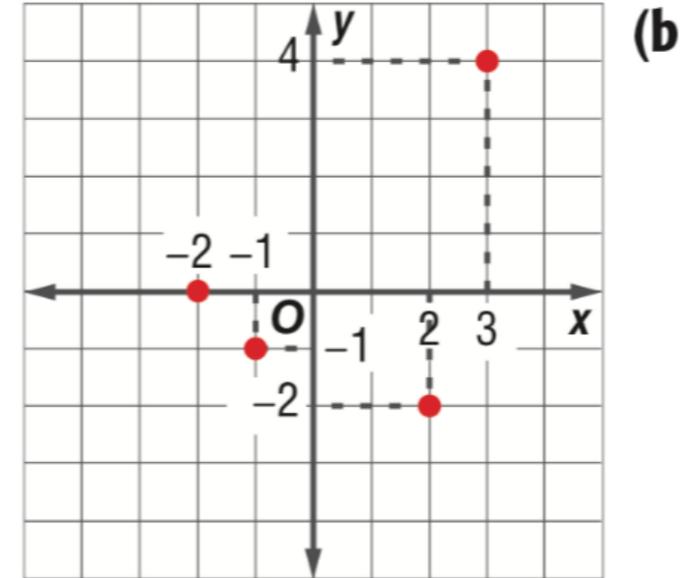
١٩

$$\text{المجال} = \{-6, -5, -3, -1\} \quad \text{المدى} = \{-9, -7, -1, 7\}$$

هل هي دالة: لا، لأن العنصر -6 في المجال ارتبط بكل من العنصرين $-1, -9$ في المدى.

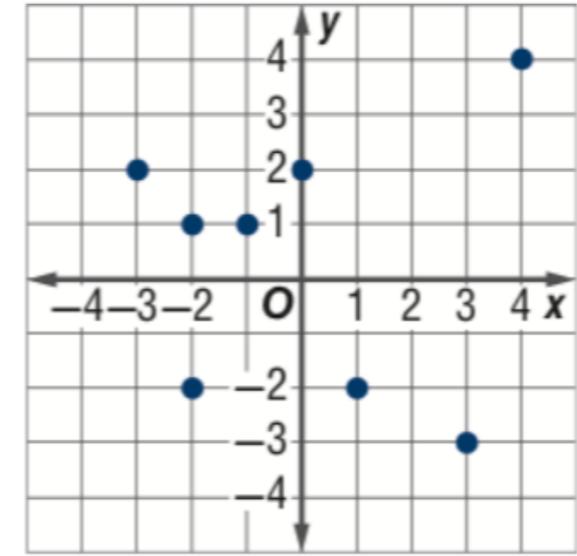
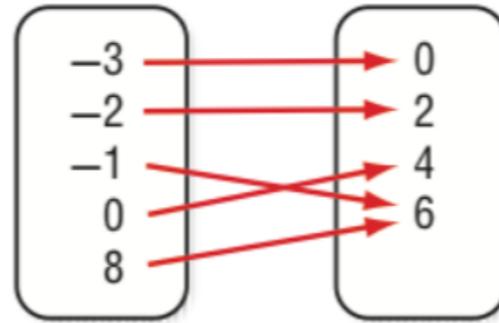
$$\text{المجال} = \{-2, -1, 2, 3\}$$

$$\text{المدى} = \{-2, -1, 0, 4\}$$



هذه العلاقة دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى. وهي متباينة؛ لأن كل عنصر من المدى ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال.

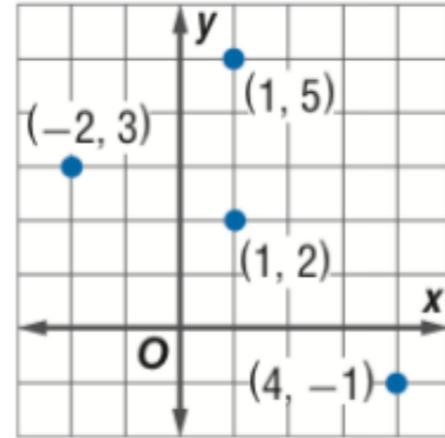
حدّد مجال كلّ علاقة فيما يأتي ومداهما، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟



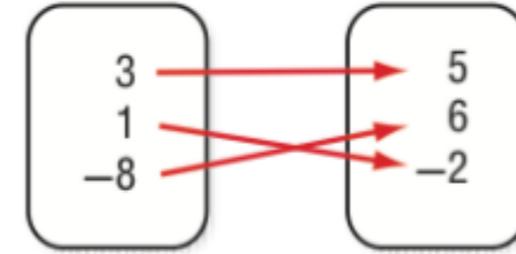
حدّد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداهما، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

x	y
-2	-4
1	-4
4	-2
8	6

(3)

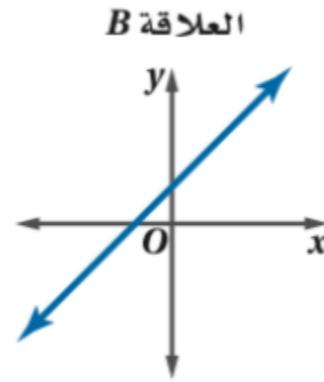


(2)

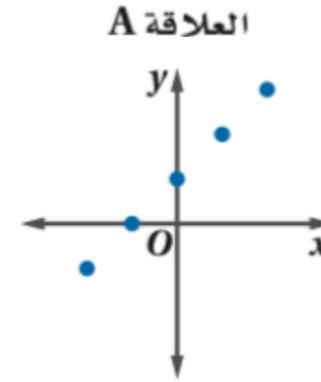


(1)

العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر المنفردة، وتمثل بيانياً بنقاطٍ منفصلةٍ، مثل العلاقة A أدناه تسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، والعلاقة التي يكون مجالها فترة جزئية من الأعداد الحقيقية وأمكن تمثيلها بيانياً بمستقيم أو بمنحنى متصل مثل العلاقة B أدناه، فإنها تكون **علاقة متصلة**.



علاقة متصلة



علاقة منفصلة

إرشادات للدراسة

العلاقة المتصلة

يمكنك تمثيل العلاقة المتصلة بيانياً دون رفع القلم عن الورقة.

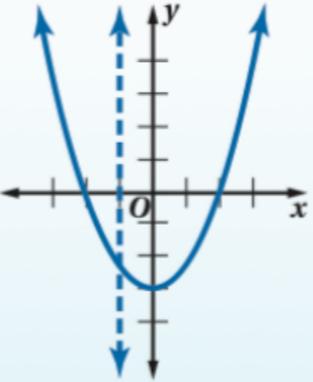
يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي مع كل من العلاقات المتصلة والمنفصلة لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

أضف إلى
مطوبتك

اختبار الخط الرأسي

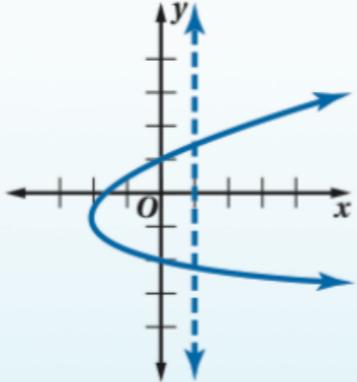
مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

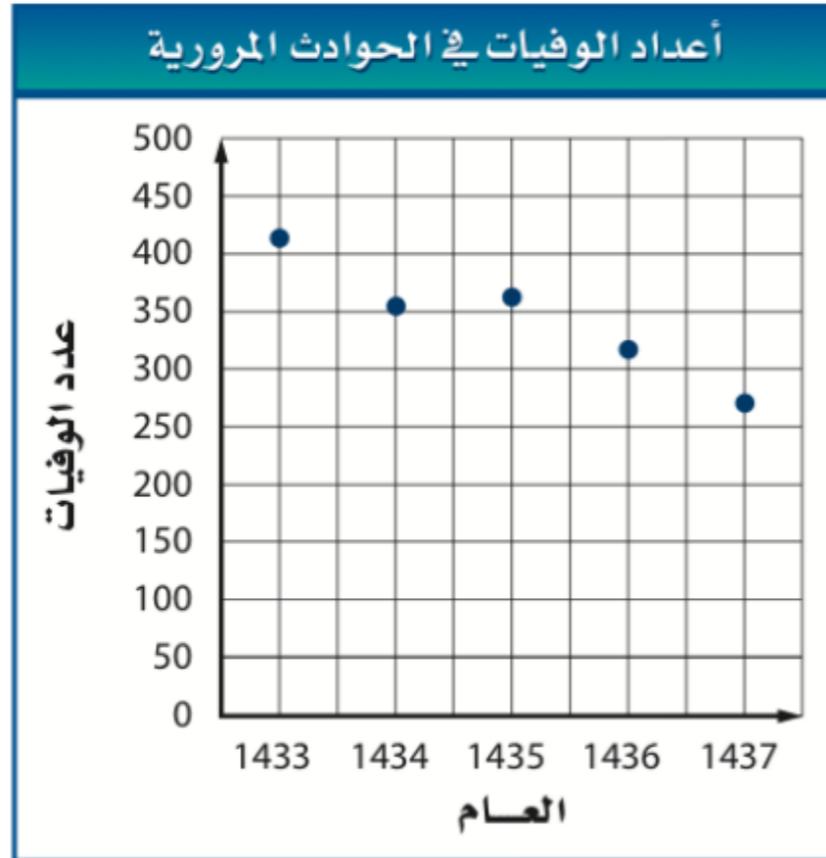


النموذج:

إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة فالعلاقة ليست دالة.







حوادث المرور: يبين التمثيل البياني المجاور أعداد الوفيات في إحدى مدن المملكة نتيجة الحوادث المرورية من عام 1433 هـ إلى عام 1437 هـ، هل العلاقة التي يمثلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تمثل دالة؟

بما أن التمثيل البياني مكون من نقاط منفصلة، فالعلاقة منفصلة. وباستعمال اختبار الخط الرأسي نلاحظ أنه لا يمكن رسم أي خط رأسي يمر بأكثر من نقطة من نقاط التمثيل، إذن فالعلاقة تمثل دالة.

تحقق من فهمك ٢

(2) **عمال:** إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 1433هـ إلى 1438هـ على الترتيب هو: 33, 34, 35, 36, 37, 38. مثل هذه البيانات بيانياً، وهل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة أم متصلة. وهل تمثل دالة؟

متوسط عدد الأهداف في الموسم الواحد	متوسط أعمار الفريق	الموسم
16.2	22	1434-1435
24.1	23	1435-1436
27.2	24	1436-1437
23.5	25	1437-1438



- (4) **كرة قدم:** يبين الجدول المجاور متوسط عدد الأهداف التي أحرزها فريق كرة قدم في مبارياته خلال 4 مواسم ومتوسط أعمار الفريق في كل موسم.
- (a) مثل البيانات الواردة في الجدول بيانياً، على أن يمثل المحور الأفقي متوسط أعمار الفريق، والمحور الرأسي متوسط عدد الأهداف في كل مباراة.
- (b) حدّد كلاً من المجال والمدى.
- (c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟
- (d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضح إجابتك.

تمثيل العلاقة بيانياً

مثال ٣

مثّل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانياً، ثم حدّد مجالها ومداهما، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.
كوّن جدولاً لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثّل المعادلة بيانياً.

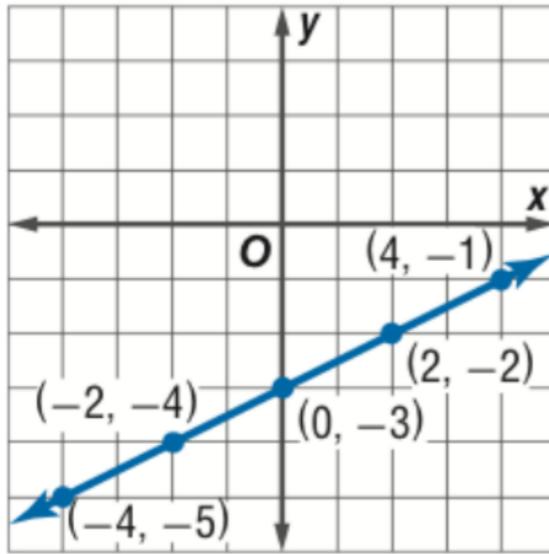
مجال هذه العلاقة ومداهما هو مجموعة الأعداد الحقيقية،

لأن أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضاً يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم.

التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تمثل دالة؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y .

وحيث إن كل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x ، لذا فالدالة متباينة.

وبما أن التمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.



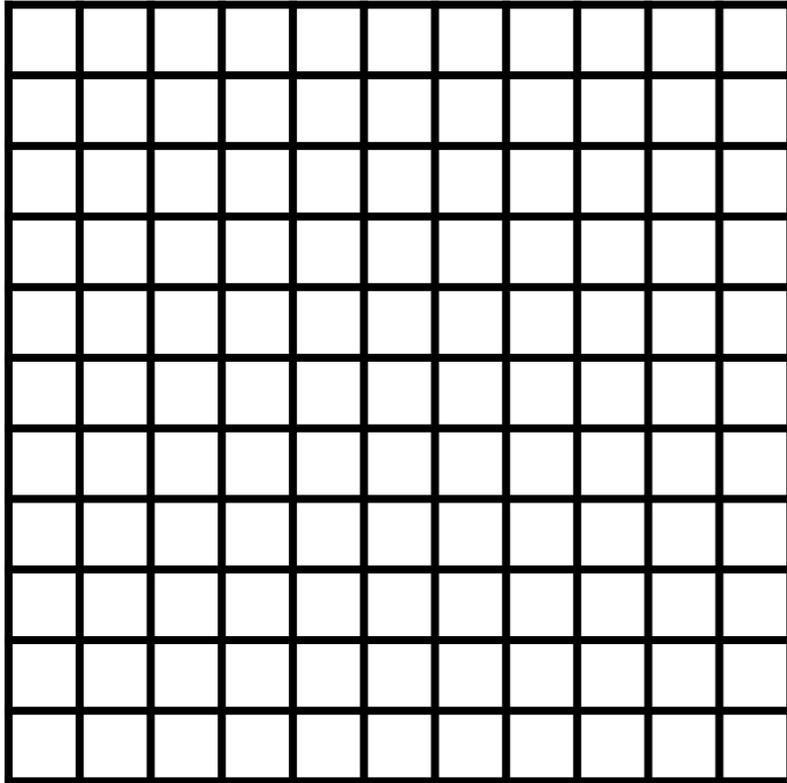
x	y
-4	-5
-2	-4
0	-3
2	-2
4	-1

تمثيل العلاقة بيانياً

تحقق من فهمك ٣

$$y = x^2 + 1 \quad (3)$$

مثّل المعادلة بيانياً، ثم حدّد مجالها ومداهما، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.



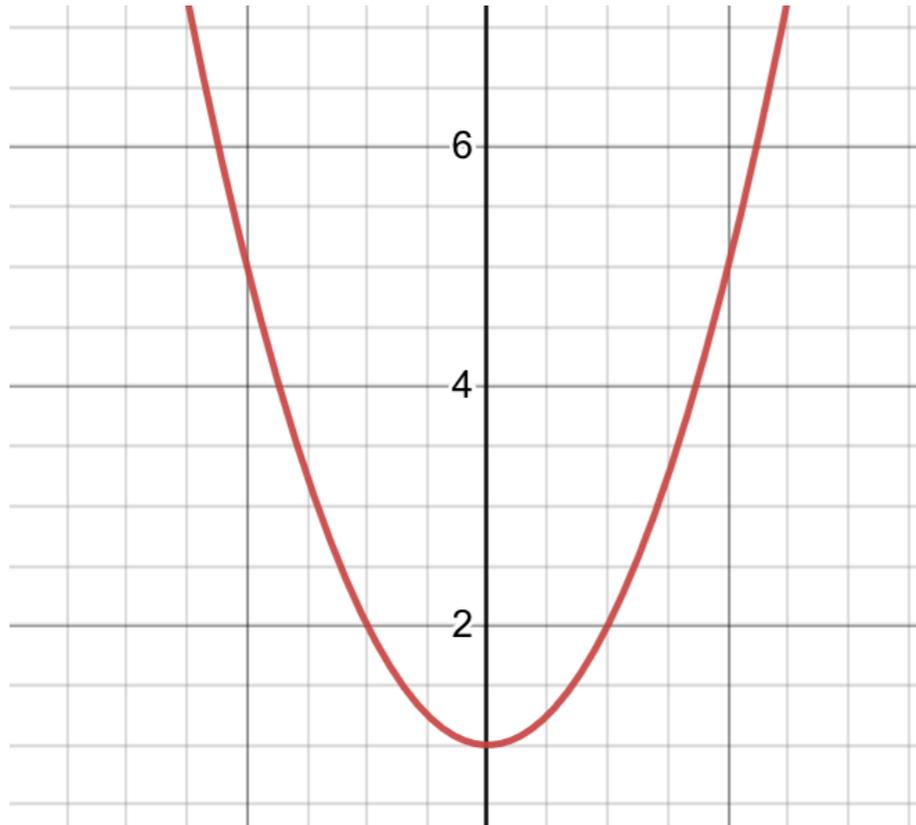
x	y

تمثيل العلاقة بيانياً

تحقق من فهمك ٣

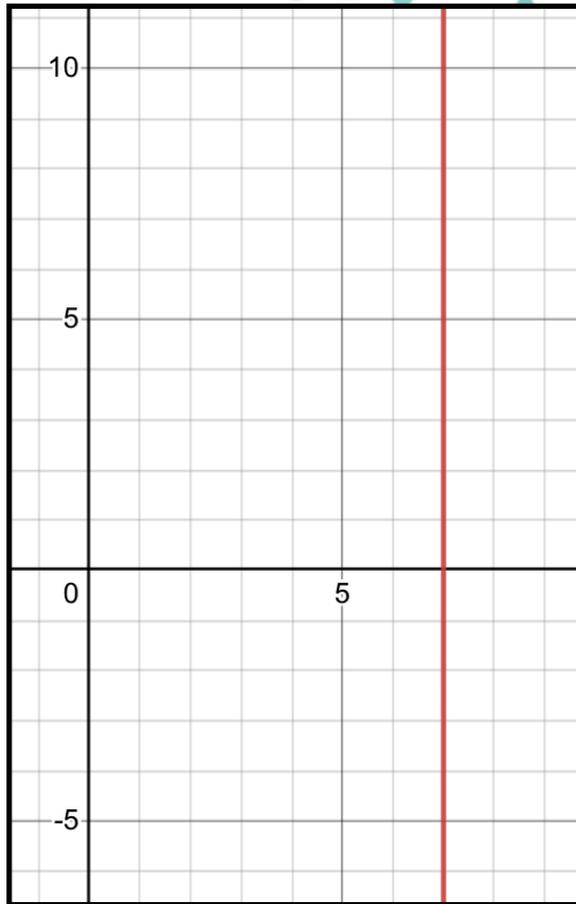
$$y = x^2 + 1 \quad (3)$$

مثّل المعادلة بيانياً، ثم حدّد مجالها ومداهما، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

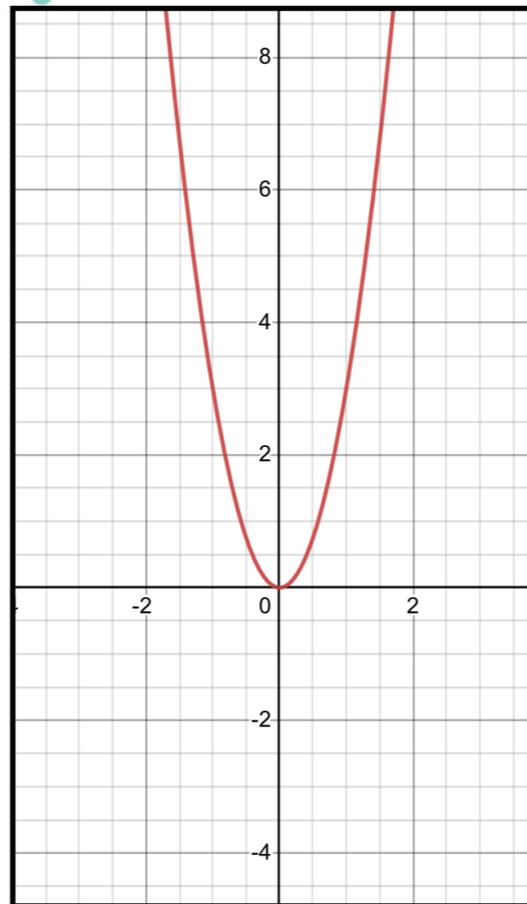


مثّل كلّ معادلة فيما يأتي بيانياً، ثم حدّد مجالها، ومداهها، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

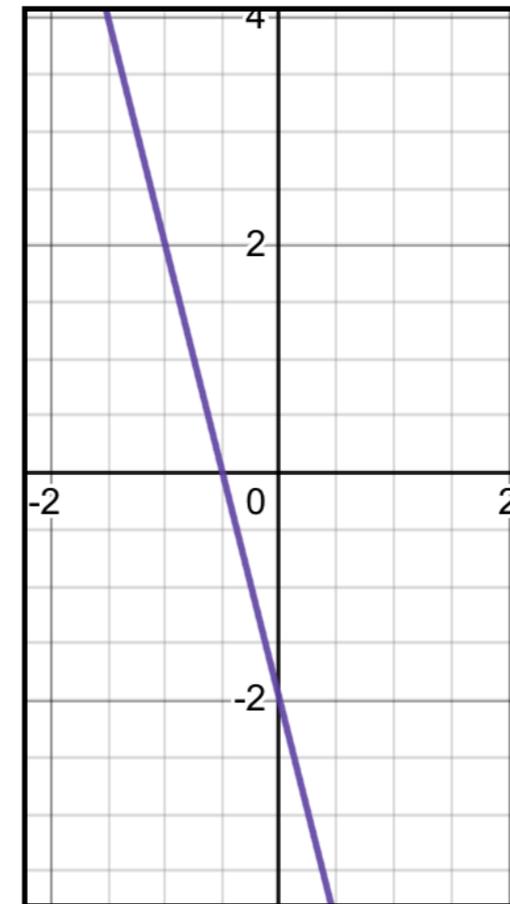
(8) $x = 7$



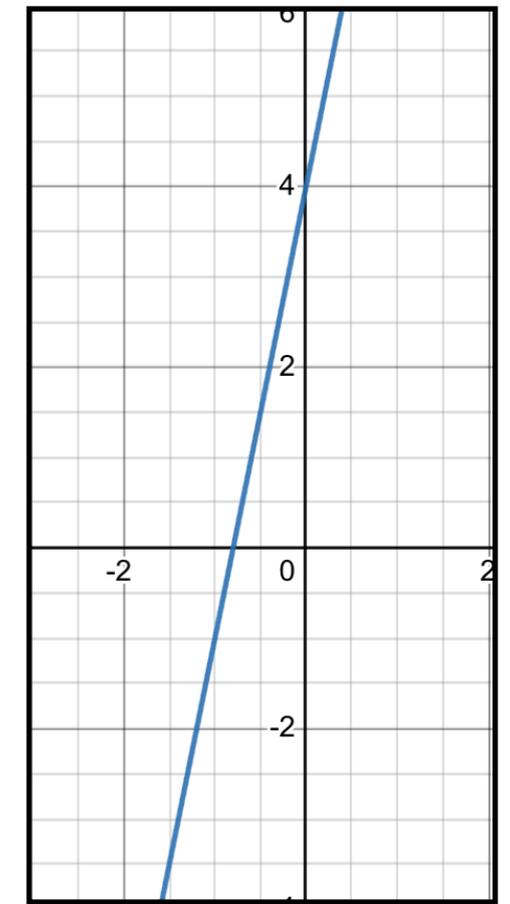
(7) $y = 3x^2$



(6) $y = -4x - 2$



(5) $y = 5x + 4$



يزداد ضغط الهواء داخل إطار السيارة مع ازدياد درجة الحرارة .



المتغير المستقل : درجة الحرارة .

المتغير التابع : الضغط .

هو المتغير من المجال (غالباً ما يكون) x .

المتغير المستقل

هو المتغير من المدى (غالباً ما يكون) y تابع لأن قيمته تعتمد على قيمة x .

المتغير التابع

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلاً من y ، ويُقرأ f لـ x ؛ حيث f هو اسم الدالة وليس متغيراً مضروباً في x .

المعادلات التي تمثل دوالاً تكتب عادة باستعمال **رمز الدالة** . فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = 5x - 1$. وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر -6 في مجال الدالة f ، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$ ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد -6 ؛ لذا فإن $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$.

إيجاد قيمة الدالة

مثال ٤

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$ ، أوجد قيمة كل مما يأتي:

		$f(2y)$ (b)			$f(6)$ (a)
الدالة الأصلية		$f(x) = 2x^2 - 8$	الدالة الأصلية		$f(x) = 2x^2 - 8$
عوض		$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$	عوض		$f(6) = 2(6)^2 - 8$
$(2y)^2 = 2^2y^2$		$= 2(4y^2) - 8$	$6^2 = 36$		$= 2(36) - 8$
بسّط		$= 8y^2 - 8$	بسّط		$= 72 - 8 = 64$

إيجاد قيمة الدالة

تحقق من فهمك

لتكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$ أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$g(4a) \quad (4B)$$

$$g(2.8) \quad (4A)$$

إيجاد قيمة الدالة

تأكد

أوجد قيمة كل مما يأتي:

(9) $f(-3)$ إذا كانت $f(x) = -4x - 8$

(10) $g(5)$ إذا كانت $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$

(28) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. فأَيُّ منهما حله صحيح؟ وضح إجابتك.

خالد

$$\begin{aligned} f(3d) &= -4(3d)^2 - 2(3d) + 1 \\ &= 12d^2 - 6d + 1 \end{aligned}$$

أحمد

$$\begin{aligned} f(3d) &= -4(3d)^2 - 2(3d) + 1 \\ &= -4(9d^2) - 6d + 1 \\ &= -36d^2 - 6d + 1 \end{aligned}$$

(29) **مسألة مفتوحة:** مثل كلاً من العلاقات الآتية بيانياً:

- (a) سرعة سيارة متجهة نحو نقطة معينة وزمنها إذا علمت أنها توقفت عند إشارتين ضوئيتين.
- (b) طول شخص وعمره في الفترة من 5 سنوات إلى 60 سنة.
- (c) درجة الحرارة في أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 6 صباحاً إلى الساعة 11 مساءً.

(30) **تحَدِّدْ:** إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $f(a) = 19, g(a) = 33, f(b) = 31, g(b) = 51$ وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحققان المعطيات السابقة.

(31) **اكتب:** وضح كيف يحدّد اختبار الخط الرأسي إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

تدريب على اختبار

(33) إذا كان $g(x) = x^2$ ، فأى عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$ ؟

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$

(32) تحتوي بركة سباحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة. فأى المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء g المتبقية في البركة بعد m دقيقة؟

C $g = \frac{19500}{6m}$

A $g = 19500 - 6m$

D $g = \frac{6m}{19500}$

B $g = 19500 + 6m$

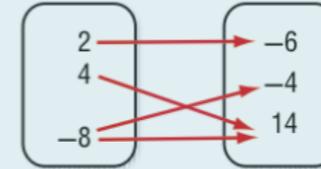
الواجب

ص

٢٢

حدّد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداهما، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

(13) $\{(3, -4), (-1, 0), (3, 0), (5, 3)\}$



(12)

x	y
-0.3	-6
0.4	-3
1.2	-1

(11)

مثّل كل معادلة فيما يأتي بيانياً، ثم حدّد مجالها ومداهما، وحدّد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد إن كانت منفصلة أم متصلة.

$$y = 4x^2 - 8 \quad (16)$$

$$y = -5x^2 \quad (15)$$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

$$f(x) = 16x^2 \text{ إذا كانت } f(2.5) \quad (18)$$

$$f(x) = 5x^3 + 1 \text{ إذا كانت } f(-8) \quad (17)$$

(14) **سكان:** يبين الجدول المجاور عدد الذكور وعدد

- الإناث في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة لعام 1438هـ .
- (a) مثل البيانات الواردة في الجدول بيانياً على أن يمثل المحور الأفقي عدد الذكور والمحور الرأسي عدد الإناث.
- (b) حدّد كلاً من المجال والمدى.
- (c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟
- (d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضح إجابتك.

المنطقة الإدارية	عدد الذكور	عدد الإناث
المدينة المنورة	1194428	938251
حائل	386210	313564
تبوك	511413	398617
الجوف	289414	219061

1-2 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال

(تتمة)

معادلات العلاقات والدوال: المعادلات التي تمثل دوال غالباً ما تكتب برمز الدالة، فعلى سبيل المثال: $y = 10 - 8x$ يمكنك كتابتها على الصورة $f(x) = 10 - 8x$ ، وهذه الصيغة تؤكد حقيقة أن قيم y (المتغير التابع) تعتمد على قيم x (المتغير المستقل).

نعرض القيمة المعطاة من المجال في المعادلة؛ لإيجاد العنصر المرتبط بهذه القيمة في المدى، فيكون هو قيمة الدالة.

مثال إذا أعطيت الدالة $f(x) = x^2 + 2x$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

f(3) (a)

$$\text{الدالة الأصلية} \quad f(x) = x^2 + 2x$$

$$\text{بالتعويض} \quad f(3) = 3^2 + 2(3)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = 15$$

f(5a) (b)

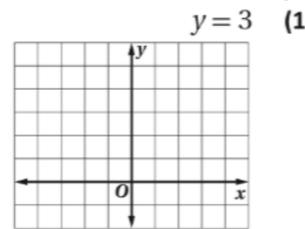
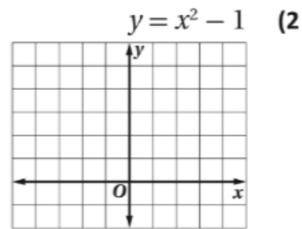
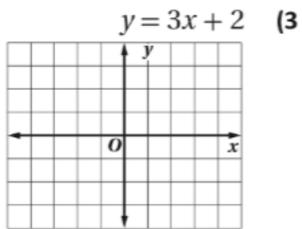
$$\text{الدالة الأصلية} \quad f(x) = x^2 + 2x$$

$$\text{بالتعويض} \quad f(5a) = (5a)^2 + 2(5a)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = 25a^2 + 10a$$

تمارين:

مثل كل علاقة أو معادلة، وحدد المجال والمدى لكل منها. وحدد فيما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة؟ ثم حدد ما إذا كانت منفصلة أو متصلة.



f(2b) (6)

أوجد قيمة كل مما يأتي إذا كان: $f(x) = -2x + 4$

f(6) (5) f(12) (4)

g(7c) (9)

أوجد قيمة كل مما يأتي إذا كان: $g(x) = x^3 - x$

g(-2) (8) g(5) (7)

1-2 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال

العلاقات والدوال: يمكنك تمثيل العلاقة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة أو في صورة معادلة. والعلاقة هي مجموعة الأزواج المرتبة كلها (x, y) التي تجعل المعادلة صحيحة، والدالة علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.

	كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، ولا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.	الدالة المتباينة
--	--	------------------

مثال حدد مجال العلاقة الآتية ومداها، وهل تمثل هذه العلاقة دالة؟

x	y
-5	-1
-3	0
-1	1
1	2
3	3

المجال والمدى كلاهما أعداد حقيقية. كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى؛ لذا فهذه دالة.

المجال = $\{-5, -3, -1, 1, 3\}$

المدى = $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

تمارين:

حدد كلاً من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة أم لا؟

(1) $\{(0.5, 3), (0.4, 2), (3.1, 1), (0.4, 0)\}$ (2) $\{(-5, 2), (4, -2), (3, -11), (-7, 2)\}$

(4) $\{(-15, 12), (-14, 11), (-13, 10), (-12, 12)\}$

(3) $\{(0.5, -3), (0.1, 12), (6, 8)\}$

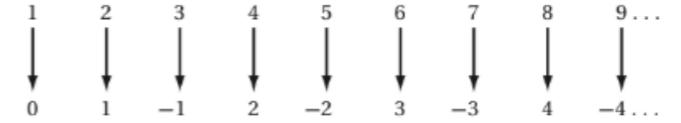
علاقات ودوال على الأعداد الحقيقية

من الممتع التفكير في الارتباط واحد لواحد بين مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية.

مثال 1

هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة؟

ضع المجموعتين في الصورة الآتية:



رغم أن الأعداد الطبيعية مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة، إلا أنه يوجد عدد طبيعي وحيد لكل عدد صحيح؛ أي أنه يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.

مثال 2

هل هناك ارتباط واحد لواحد، بين الأعداد الطبيعية والأعداد الزوجية الموجبة؟



يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.

تمارين:

- (1) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الطبيعية؟
- (2) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الصحيحة؟
- (3) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الصحيحة السالبة ومجموعة الأعداد الصحيحة؟
- (4) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد النسبية؟

لمزيد من العروض أنتقل الى قناتي بالضغط

