العمليات على المصفوفات

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

الاستراتيجية :

تمهيد:

يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من البيتزا بثلاثة احجام في احد المطاعم .

	صغيرة	وسط	كبيرة
ثمار البحر	13	24	35
الخضار	12	23	34
الدجاج	14	25	36
اللحم	15	27	37

نظم هذه البيانات في مصفوفة A ، على ان تكون الأسعار مرتبة تصاعديا

فيما سبق : درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات .

فكرة الدرس :

- أجمع المصفوفات وأطرحها .
- أضرب مصفوفة في عدد .

المفردات :

- جمع مصفوفتين .
- طرح مصفوفتين .
- ضرب المصفوفة في عدد ثابت .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

لدى مؤسسة تجارية للمعدات الثقيلة فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض.
وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	الرياض		الشرقية		جدة	
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	145000	1900	122000	1700	109500	1050
المعرض (2)	225000	2400	145500	1800	135000	1800
المعرض (3)	290000	2700	160000	1800	150500	1800

ما معدل النفقات اليومي للمعرض 2 في المنطقة الشرقية ؟

ما موقع معدل النفقات اليومية للمعرض الأول في كل مصفوفة ؟

كيف يمكن أن تجد إجمالي المبيعات الأسبوعية للمعارض الثانية في الشركة لجميع المناطق ؟

العمليات على المصفوفات

إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها

الجمع

حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع

الطرح

حيث تطرح العناصر المتناظرة في حالة الطرح

إذا كانت $\underline{A}, \underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $\underline{A} + \underline{B}$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في $\underline{A}$ و $\underline{B}$ ، وكذلك $\underline{A} - \underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

لتكن: $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

فإن: $\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$$

مثال : جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

(a $\underline{A} + \underline{B}$

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + (-4) & 2 + (-1) \\ -9 + (-3) & 8 + (-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

(b $\underline{B} - \underline{C}$

$$\underline{B} - \underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بما ان المصفوفتين $\underline{C}$, $\underline{B}$ لهما رتبتين مختلفتين ، فلا يمكن اجراء عملية الطرح $\underline{B} - \underline{C}$

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

إذا كان $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$

فإن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

تحقق من فهمك :

(1A $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

(1B $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

ضرب المصفوفة في عدد ثابت : يمكن ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت .

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة $k\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $\underline{A}$ مضروبًا في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وَ k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot \underline{A} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

مثال : ضرب مصفوفة في عدد ثابت

اذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$ ، فجد $5\underline{R}$.

$$5\underline{R} = 5\begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك :

إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ فأوجد $-4\underline{T}$

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

إذا كان $k\underline{A} = \underline{B}$

فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

خصائص جمع المصفوفات

لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k:

الخاصية الإبدالية

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

الخاصية التجميعية

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$$

خاصية التوزيع للضرب في عدد

$$k(\underline{A} + \underline{B}) = k\underline{A} + k\underline{B}$$

ملاحظات :

يمكنك إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات ، وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية .

مثال : العمليات على المصفوفات

اذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ و $\underline{A} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ، فاوجد $-4\underline{B} - 3\underline{A}$

عوّض
$$-4\underline{B} - 3\underline{A} = -4\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج ضرب المصفوفات في الثوابت
$$= \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$$

بسّط
$$= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$$

اطرح العناصر المتناظرة
$$= \begin{bmatrix} 16 - (-27) & 32 - 36 \\ -8 - 6 & 12 - (-18) \end{bmatrix}$$

بسّط
$$= \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك :

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ فأوجد $7\underline{A} - 6\underline{B}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يمكن استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية .

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.

مثال :

اعمال : ارجع الى فقرة «لماذا» في بداية الدرس، وعبر عن معدل المبيعات والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع .

حتى يتم حساب المبيعات في خمسة أسابيع ، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5 وجمع المصفوفات الناتجة معا .

ضرب كل مصفوفة في 5 ثم الجمع

$$5\begin{bmatrix}1900 & 145000\\2400 & 225000\\2700 & 290000\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1700 & 122000\\1800 & 145500\\1800 & 160000\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1050 & 109500\\1800 & 135000\\1800 & 150500\end{bmatrix}$$

تطبيق قاعدة الضرب في ثابت

$$=\begin{bmatrix}9500 & 725000\\12000 & 1\,125000\\13500 & 1\,450000\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8500 & 610000\\9000 & 727500\\9000 & 800000\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5250 & 547500\\9000 & 675000\\9000 & 752500\end{bmatrix}$$

اجمع المصفوفات

$$=\begin{matrix}\text{النفقات} & \text{المبيعات}\\\end{matrix}\begin{bmatrix}23250 & 1882500\\30000 & 2527500\\31500 & 3002500\end{bmatrix}$$

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع .

المخطط المالي

يستعمل المخطّط المالي المصفوفات لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

تحقق من فهمك :

4) اعمال : استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات الشهري لجميع المعارض على فرض ان الشهر 30 يوما .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد : أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $\underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج كلٍّ مما يلي:

7) $4\underline{B} - 2\underline{A}$

9) درجات حرارة: تبين المصفوفة $\underline{L}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينةٍ ما. وتبين المصفوفة $\underline{H}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى (بالفهرنهايت) في تلك المدينة.

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة التي تمثل الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

13) $\begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & 76 & -13 \end{bmatrix}$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

29) **تبرير:** حدِّد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ ، ثم فسِّر إجابتك.

a) إذا كانت $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة ، فإن $\underline{A} - \underline{B}$ معرّفة.

b) إذا كان k عددًا حقيقيًّا ، فإن $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرّفتان.

c) إذا كانت $\underline{A} - \underline{B}$ غير معرّفة ، فإن $\underline{B} - \underline{A}$ غير معرّفة.

d) إذا كانت $\underline{A}$ وَ $\underline{B}$ لهما عدد العناصر نفسه ، فإن $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة.

e) إذا كانت $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرفتين، فإن $k\underline{A} + k\underline{B}$ معرّفة.

مجموعة رعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدريب على اختبار

37) حل النظام الآتي:

$$0.06p + 4q = 0.88$$
$$p - q = -2.25$$

A $(-0.912, -1.338)$ **C** $(-2, 0.25)$

B $(0.912, -3.162)$ **D** $(-2, -4.25)$

33) رتبة المصفوفة: إذا كانت $\underline{B}$, $\underline{A}$ مصفوفتين من الرتبة 3×5 ، فإن رتبة المصفوفة $\underline{A} - \underline{B}$ هي:

A 3×5 **C** 3×2

B 5×3 **D** 3×3

تحصيلي: اذا كانت $\begin{bmatrix} 0 & 2x+1 \\ y-1 & 25 \end{bmatrix} = 2 + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ فما قيمة x + y ؟

الواجب:

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق