قدرات

◄ **مثال٢**: مربع مكون من مستطيلين متطابقين، ومساحة المستطيل الواحد ١٨ متر مربع، أوجد مساحة المربع بالمتر المربع.

(أ) ٣٦

(ب) ٤٠

(جـ) ٥٠

(د) ٥٥

المحددات وقاعدة كرامر

فيما سبق:

درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًّا.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أحسب المحدِّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:

المحدِّدة
determinant

محدِّدة الدرجة الثانية
second-order determinant

محدِّدة الدرجة الثالثة
third-order determinant

قاعدة الأقطار
diagonal rule

مصفوفة المعاملات
coefficient matrix

قاعدة كرامر
Cramer's Rule

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، قام عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، تأكد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. وأنه من الممكن بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدِّدات لحساب مساحتها.

المحدِّدات: كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدِّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة هو: جميع عناصر المصفوفة التي تمتد من الزاوية اليسرى العلوية للزاوية اليمنى السفلى. أو جميع العناصر a_{ij} بحيث $i=j$.

مفهوم أساسي

محدِّدة الدرجة الثانية

أضف إلى مطويتك

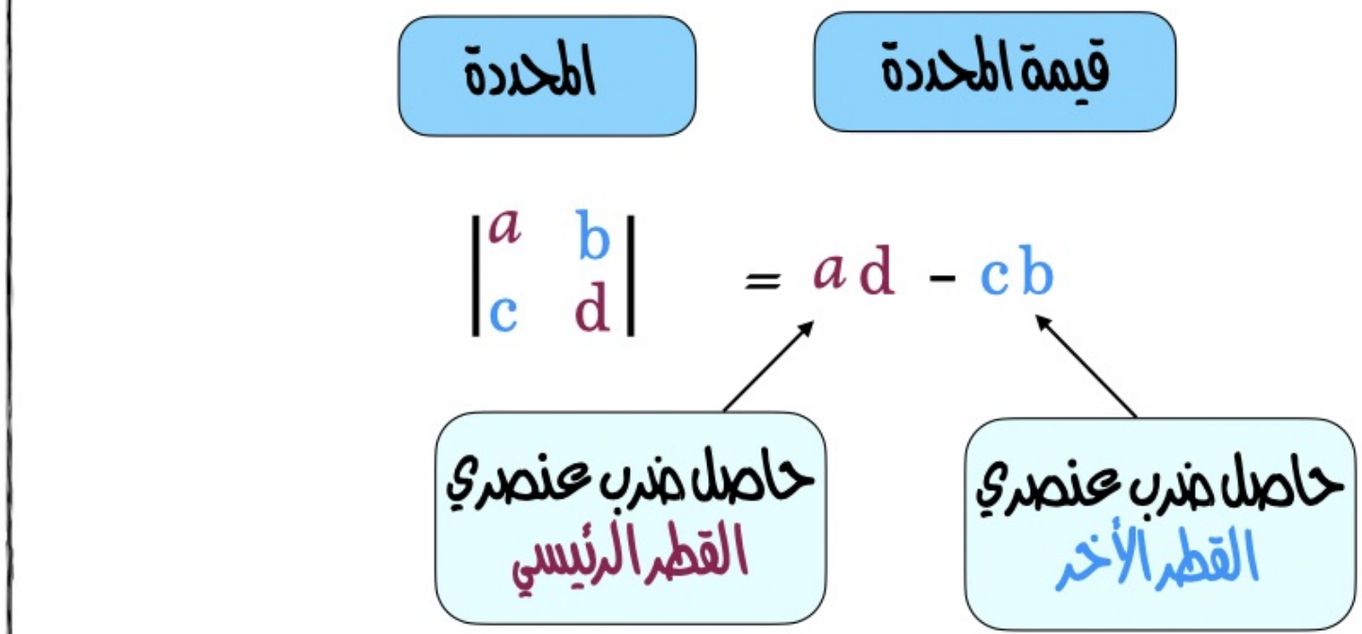
التعبيراللفظي: يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرمــوز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

محددة الدرجة الثانية

وهي على الصورة



محدِّدة الدرجة الثانية

مثال

أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$

قراءة الرياضيات

المحدِّدات:

يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\underline{A}$ بالرمز $|\underline{A}|$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

(1A

$$\begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$$

(1B

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 9 \end{vmatrix}$$

تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة 3 × 3 **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

مفهوم أساسي

حساب محدِّدة المصفوفة 3 × 3

أضف إلى مطويتك

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3 × 3.

حساب محدِّدة المصفوفة 3×3

مثال

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & -3 \\ 9 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

تحقق من فهمك

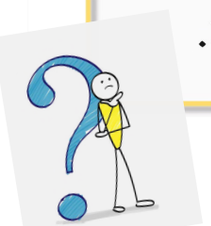
(2A

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.



مفهوم أساسي

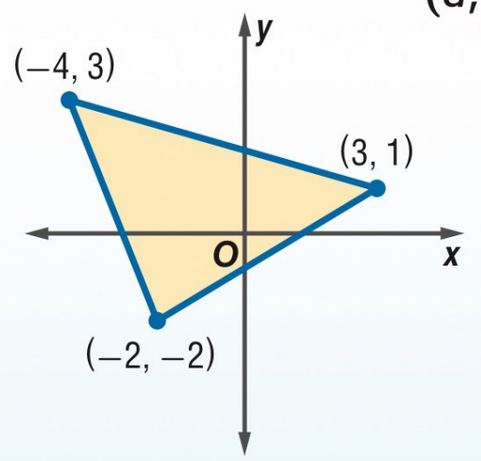
أضف إلى

مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:

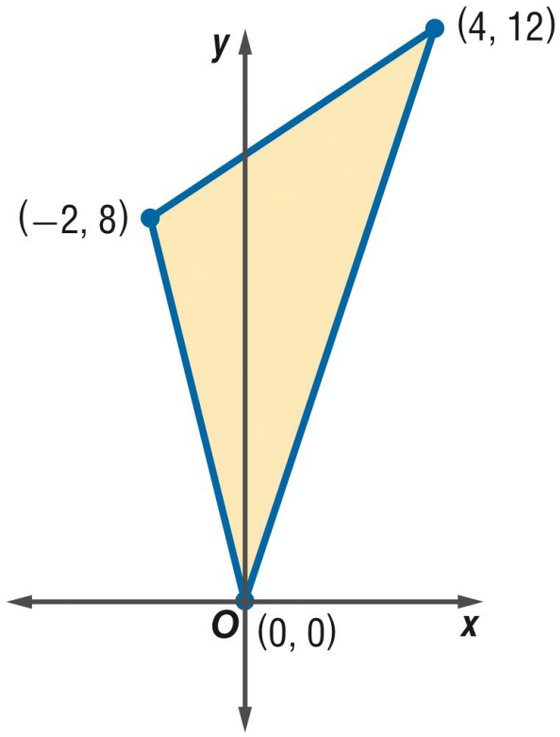


$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

حساب مساحة المثلث باستعمال المحدِّدات

مثال

عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحدِّدات لإيجاد مساحة الإقليم.



إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحدِّدات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحدِّدة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحدِّدة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

إرشادات للدراسة

المحدِّدات

تستعمل المحدِّدات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

قاعدة كرامر :

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من معادلتين خطيتين

$$ax + by = m$$

$$fx + gy = n$$

$$c = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$$

$c \neq 0$ للنظام حل وحيد

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{c}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{c}$$

المستقيمان متقاطعان

$c = 0$

للنظام عدد لا نهائي من الحلول

$$\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix} = 0$$

المستقيمان متطابقان

ليس للنظام حل

$$\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix} \neq 0$$

المستقيمان متوازيين

حل نظام من معادلتين

تحقق من فهمك

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

(4A

$$7x + 3y = 37$$
$$-5x - 7y = -41$$

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدِّدة مصفوفة المعاملات C صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.

مفهوم أساسي

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

حل نظام من ثلاث معادلات

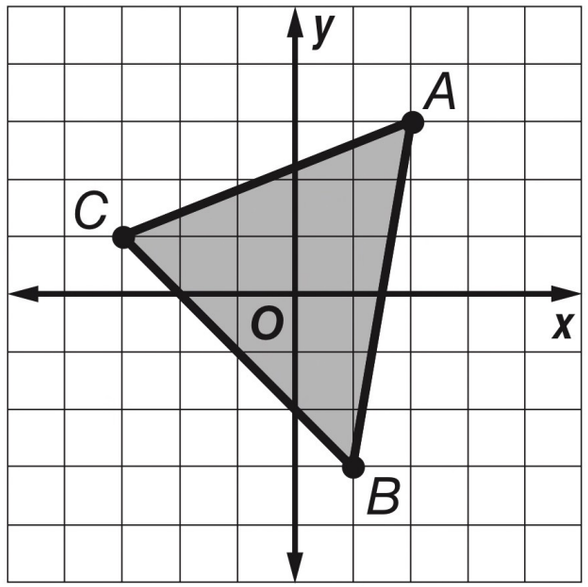
مثال

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$4x + 5y - 6z = -14$$
$$3x - 2y + 7z = 47$$
$$7x - 6y - 8z = 15$$

تدرب

36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة