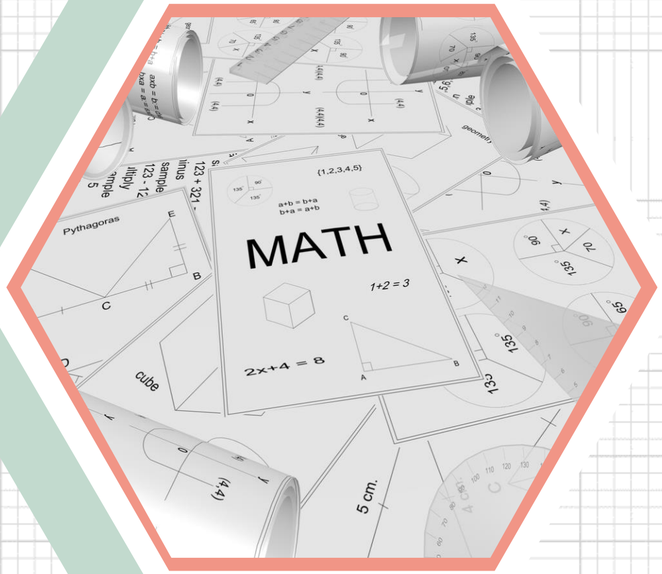
رياضيات ٢-١



إعداد:أ/عبدالعزيز الشريف

الباب
الثاني

المصفوفات

٢-٥
النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

- درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا.

والآن

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

المفردات

- مصفوفة الوحدة
- النظير الضربي للمصفوفة
- المعادلة المصفوفية
- مصفوفة الثوابت
- مصفوفة المتغيرات

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

التحقق من النظير الضربي

ملحوظة

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}, \underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$ ، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

مثال (١)

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

(a $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I}$.

اكتب المعادلة $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

اضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بما أن $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{I}$ ، فإن أيًّا منهما لا تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

التحقق من النظير الضربي

(b $\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

كلٌّ من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F} = \underline{I}$

اكتب المعادلة $\underline{F} \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \frac{5}{4} & \frac{15}{8} - \frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4} + \frac{6}{4} & -\frac{10}{8} + \frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

اضرب المصفوفتين

اكتب المعادلة $\underline{G} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \frac{10}{8} & -\frac{15}{4} + \frac{30}{8} \\ \frac{3}{4} - \frac{6}{8} & -\frac{5}{4} + \frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

اضرب المصفوفتين

بما أن $\underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F} = \underline{I}$، فإن كلًّا من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ نظير ضربي للأخرى.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

التحقق من النظير الضربي

تحقق من فهمك

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2×2

ملحوظة

يمكنك استعمال المحددات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موقعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب A^{-1} .

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محددة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

مثال (٢)

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(a $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

احسب المحدِّدة $|\underline{P}| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$

بما أن قيمة المحدِّدة لا تساوي صفرًا، فإن $\underline{P}^{-1}$ موجودة .

تعريف النظير الضربي للمصفوفة من الرتبة 2 × 2 $\underline{P}^{-1} = \frac{1}{|\underline{P}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$|\underline{P}| = 3$ $= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

بسط $= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة 2 × 2.

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$ ، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$ ، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا نجده كما في الخطوات 2 – 4.

2) بادل بين موضعي عنصري القطر الرئيس.

3) غيِّر إشارتي عنصري القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 2, 3 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

تأكد: أوجد ناتجي ضرب المصفوفتين. وإذا كان كلٌّ من ناتجي الضرب يساوي I، فإن كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3}+\frac{10}{3} & \frac{35}{3}-\frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{10}{3}-\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$ ✓

(b

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

احسب المحدِّدة

$$|\underline{Q}| = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$$

بما أن قيمة المحدِّدة تساوي صفرًا ، فإن $\underline{Q}^{-1}$ ليس موجودًا.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

تحقق من فهمك

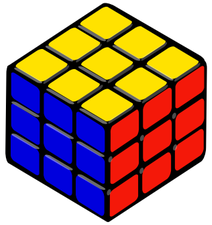
(2A $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2B $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

المعادلات المصفوفية

ملحوظة

المعادلات المصفوفية : يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام المعادلتين الآتي:

$$\begin{matrix} x + 2y = 9 \\ 3x - 6y = 3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وَيمكنك كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

مصفوفة المتغيرات
المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة الثوابت
الثوابت في النظام فقط

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

المعادلات المصفوفية

ثم حل المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تحل بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

$ax = b$	المعادلة.	$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	بضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد.	$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$
$1x = \frac{b}{a}$	$\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}\,,\ \left(\frac{1}{a}\right)a = 1$	$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$
$x = \frac{b}{a}$	$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{X}\,,\ 1x = x$	$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

مثال (٣)

سفر: زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة، إذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى **1.50** ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر **1.45** ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زوَّد به سيارته من البنزين **100** لتر، بسعر إجمالي **149** ريال، فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟

يُكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 100$$
$$1.50x + 1.45y = 149$$

الخطوة 1: اكتب المعادلة المصفوفية بافتراض أن x عدد لترات البنزين من المحطة الأولى، وy عدد لترات البنزين من المحطة الثانية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.50 & 1.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 149 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{1.50 - 1.45} \begin{bmatrix} 1.45 & -1 \\ -1.50 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05} \begin{bmatrix} 1.45 & -1 \\ -1.50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ 30 & -20 \end{bmatrix}$$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

الخطوة 3: حُلَّ المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ 30 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 149 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix}$$

إذن الحل هو $(80, 20)$، وهذا يعني أن سلمان زوّد سيارته بـ80 لترًا من المحطة الأولى و 20 لترًا من الثانية.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

الربط مع الحياة

هناك 90% من محطات الوقود العاملة في المملكة يُديرها أفراد يمتلكون هذه المحطات، بينما 10% فقط من هذه المحطات تُديرها شركات متخصصة في مجال تشغيل وإدارة محطات الوقود.

تصميم: عبد العزيز الشريف

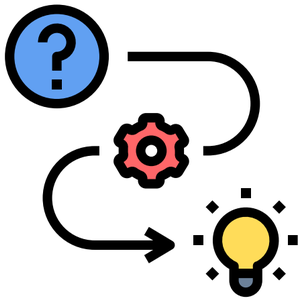
DES: Abdulaziz AL-Sharif

تأكد

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

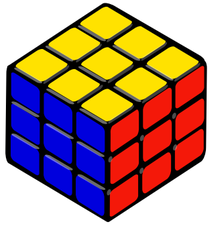
2) $\underline{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

مسائل التفكير العليا

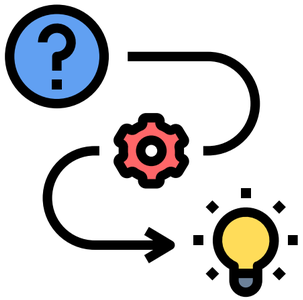
اكتشف الخطأ: أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$



DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

تحصيلي

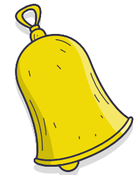
إجابة قصيرة: تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 2 ريال، وحجم متوسط بسعر 3 ريالاتٍ، وحجم كبير بسعر 4 ريالاتٍ، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 150 ريالًا. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟

A 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif