# النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

## فيما سبق:

درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا. (مهارة سابقة)

## والآن:

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع $2 \times 2$.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها .

## المفردات :

**مصفوفة الوحدة**

identity matrix

**النظير الضربي للمصفوفة**

inverse matrix

**المعادلة المصفوفية**

matrix equation

**مصفوفة الثوابت**

constant matrix

**مصفوفة المتغيرات**

variable matrix

## لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات $w, s, d$ التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث $w$ تمثل سعر الشطيرة، و$s$ تمثل سعر علبة المقبلات، و$d$ تمثل سعر علبة العصير.

**مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي:** تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

**مصفوفة وحدة من النوع 2 × 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**مصفوفة وحدة من النوع 3 × 3**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**مفهوم أساسي** — **المصفوفة المحايدة لعملية الضرب**

أضف إلى مطويتك

**التعبيراللفظي:** المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A}$.

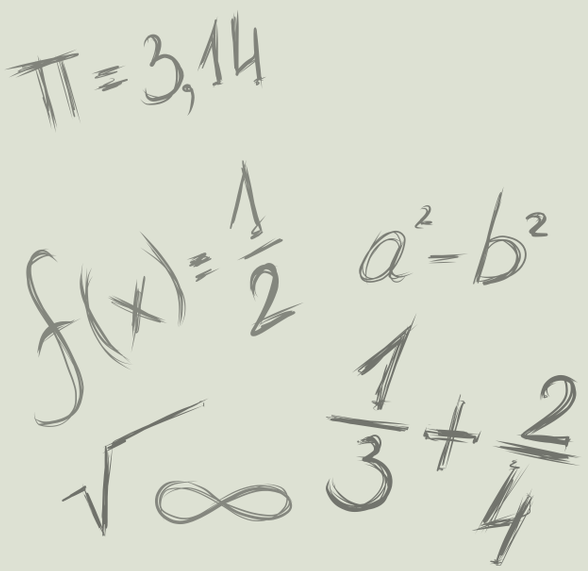
**الرمـــــوز:** إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

**مثال:**

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

اذا كانت المصفوفتان $\underline{A}$ و $\underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها وكان $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{A}\,\underline{B} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ نظيراً ضربياً للمصفوفة $\underline{A}$ وكذلك تسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيراً ضربياً للمصفوفة $\underline{B}$ وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز له بالرمز $\underline{A}^{-1}$



# تحقق من فهمك

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

**1)** $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

**إرشادات للدراسة**

**التحقق من النظير الضربي**

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

## مفهوم أساسي

### النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدِّدة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

**إرشادات للدراسة**

لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب $\underline{A}^{-1}$.

أضف إلى مطويتك

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

## مثال

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

a) $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

**إرشادات للدراسة**

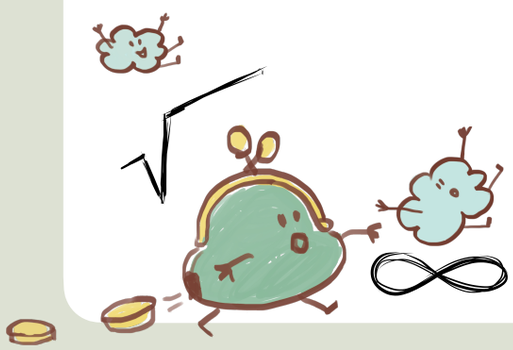
**خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة $2 \times 2$.**

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا نجده كما في الخطوات 2 – 4.

2) بادل بين موضعي عنصري القطر الرئيس.

3) غيِّر إشارتي عنصري القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 2, 3 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.



# تحقق من فهمك

**أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:**

**(2A** $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

**المعادلات المصفوفية :** يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{matrix} \underline{A} & \cdot & \underline{X} & = & \underline{B} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ثم حُلَّ المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تُحَلُّ بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

| المعادلة | |
|---|---|
| $ax = b$ | |
| اضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد | $\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$ |
| $\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}\,,\ \left(\frac{1}{a}\right)a = 1$ | $1x = \frac{b}{a}$ |
| $\underline{I}\underline{X} = \underline{X}\,,\ 1x = x$ | $x = \frac{b}{a}$ |

| | |
|---|---|
| $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ | |
| $\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$ | |
| $\underline{I}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$ | |
| $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$ | |

لاحظ أن حَلَّ المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

27) **اكتشف الخطأ:** أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

**هاجر**

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

**فاطمة**

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

# تحصيلي

إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x & x+1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؛ فما قيمة $x$ ؟

(A) $\frac{-4}{5}$

(B) $\frac{4}{5}$

2 (C)

3 (D)

# تحصيلي

ما النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؟

(A) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$