النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

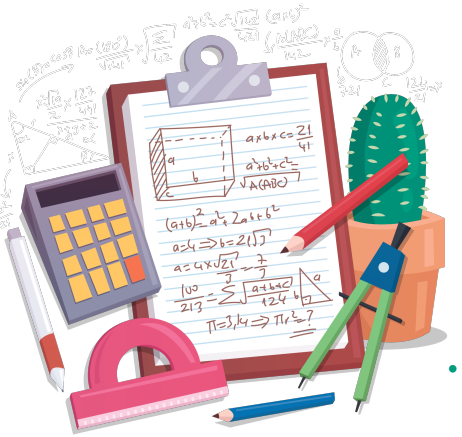
الاستراتيجية :

تمهيد:

استعمل قاعدة كرامر لحل
كل نظام معادلات ممايأتي :

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= -6 \\ 3x + y &= 18 \end{aligned}$$

فيما سبق : درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا .



فكرة الدرس :

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2 .
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين و أحلها .

المفردات :

- مصفوفة الوحدة .
- النظير الضربي للمصفوفة .
- المعادلة المصفوفية .
- مصفوفة المتغيرات .
- مصفوفة الثوابت .
- مصفوفة المعاملات .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

ما الذي تم التعبير عنه بالعدد 3 في المصفوفة الأولى ؟

ما رتبة مصفوفة ناتج ضرب المصفوفة 3×3 في المصفوفة 3×1 ؟

مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحد ، والباقي أصفار ،وإذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى .

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

مصفوفة الوحدة :

١\ أن تكون مربعة .

٢\ جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي تساوي الواحد .

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}, \underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$ ، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

مثال : التحقق من النظير الضربي

حدد ما اذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرا ضربيا للأخرى ام لا فيما يأتي :

(a $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين $\underline{B}$ و $\underline{A}$ تمثل نظيرا ضربيا للأخرى اذا وفقط اذا كان $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بما ان $\underline{I} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$، فان أيا منهما لا يمثل نظير ضربيا للأخرى .

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

(b $\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين $\underline{G}$, $\underline{F}$ تمثل نظيرا ضربيا للأخرى اذا وفقط اذا كان $\underline{I} = \underline{F} \bullet \underline{G} = \underline{G} \bullet \underline{F}$

$$\underline{G} \bullet \underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \frac{10}{8} & -\frac{15}{4} + \frac{30}{8} \\ \frac{3}{4} - \frac{6}{8} & -\frac{5}{4} + \frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} \bullet \underline{G} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \frac{5}{4} & \frac{15}{8} - \frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4} + \frac{6}{4} & -\frac{10}{8} + \frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما ان $\underline{F} \bullet \underline{G} = \underline{G} \bullet \underline{F} = \underline{I}$ ، فان كلا من المصفوفتين $\underline{G}$, $\underline{F}$ نظير ضربي للأخرى .

تحقق من فهمك :

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يمكن استعمال المحددات ، لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما .

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2×2

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

ملاحظات :

إذا كانت قيمة محددة مصفوفة ما تساوي صفرًا ، فليس للمصفوفة نظير ضربي .

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب $\underline{A}^{-1}$.

مثال : إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

اوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي ، ان وجد .

a) $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

لايجاد النظير الضربي للمصفوفة

أولا : نوجد المحدد

$$\underline{P} = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - 2(-5) = 3$$

بما ن المحدد لا يساوي صفرا ، فان $\underline{P}^{-1}$ موجودة لها قيمة

ثانيا : نستخدم القانون التالي :

$$\underline{P}^{-1} = \frac{1}{|\underline{P}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

تأكد : اوجد ناتجي ضرب المصفوفتين . واذا كان كل من ناتجي الضرب يساوي 1 ، فان كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى .

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3}+\frac{10}{3} & \frac{35}{3}-\frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{10}{3}-\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \checkmark$$

b) $\underline{Q} = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

نوجد المحدد:

$$|\underline{Q}| = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$$

بما ان قيمة المحدد تساوي صفر ، فان $\underline{Q}^{-1}$ **ليس** موجودا.

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة 2×2.

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$ ، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$ ، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا نجده كما في الخطوات 2 – 4.

2) بادل بين موضعي عنصري القطر الرئيس.

3) غيّر إشارتي عنصري القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 2, 3 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.

تحقق من فهمك :

(2A $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2B $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات — مصفوفة المتغيرات: المتغيرات في النظام فقط — مصفوفة الثوابت: الثوابت في النظام فقط

ثم حُلَّ المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تُحَلُّ بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

المعادلة	
$ax = b$	
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	اضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد
$1x = \frac{b}{a}$	$\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}, \left(\frac{1}{a}\right)a = 1$
$x = \frac{b}{a}$	$\underline{I}\underline{X} = \underline{X}, 1x = x$

$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$	
$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$	
$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$	
$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$	

لاحظ أن حَلَّ المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

مثال : حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

هناك 90% من محطات الوقود العاملة في المملكة يُديرها أفراد يمتلكون هذه المحطات، بينما 10% فقط من هذه المحطات تُديرها شركات متخصصة في مجال تشغيل وإدارة محطات الوقود.

سفر: زود سلمان سيارته بالوقود مرتين في اثناء سفره الى الرياض قادما من جدة ، اذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 1.50 ريال لكل لتر ، وفي المحطة الثانية كان السعر 1.45 ريال لكل لتر ، وكان مجموع ما زود به سيارته من البنزين 100 لتر ، بسعر اجمالي 149 ريال ، فكم لتر بنزين زود به سيارته من كل محطة ؟

يكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الاتي :

$$x + y = 100$$
$$1.50\,x + 1.45\,y = 149$$

الخطوة 1 : اكتب المعادلة المصفوفية بافتراض ان x عدد لترات البنزين من المحطة الأولى ، و y عدد لترات البنزين من المحطة الثانية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.50 & 1.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 149 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 : اوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات .

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{1.50 - 1.45}\begin{bmatrix} 1.45 & -1 \\ -1.50 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05}\begin{bmatrix} 1.45 & -1 \\ -1.50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ 30 & -20 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ 30 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 149 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix}$$

اذن الحل هو (20 , 80) ، وهذا يعني ان سلمان زود سيارته بـ 80 لترا من المحطة الأولى و 20 لترا من الثانية .

تأكد :

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5) **نقود:** مع أحمد 25 قطعة نقدية من فئة أرباع وأنصاف الريالات، بحيث تبلغ قيمة ما معه 8.5 ريالات. فما عدد الأرباع والأنصاف التي معه؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

9) $\underline{K}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}, \underline{L}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

12) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام إن أمكن فيما يأتي:

19) $-x + y = 3$

$-2x + y = 6$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا:

27) اكتشف الخطأ: أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

تحصيلي:

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام مما يأتي:

1) $2x + y = 8$
$5x - 3y = -12$

تدريب على اختبار

32) إجابة قصيرة: تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 2 ريال، وحجم متوسط بسعر 3 ريالاتٍ، وحجم كبير بسعر 4 ريالاتٍ، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 150 ريالًا. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟

A 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

الواجب:

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق