قسمة كثيرات الحدود

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

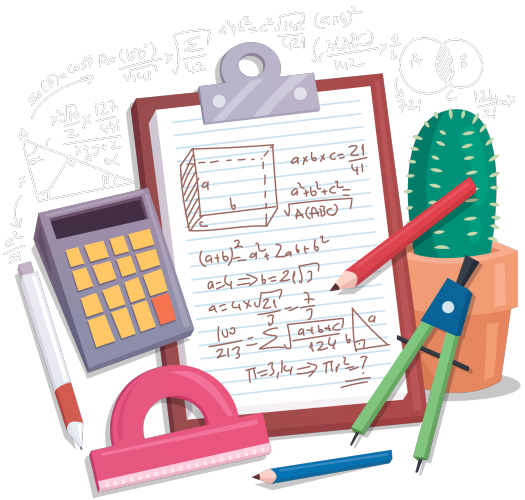
الاستراتيجية :

تمهيد :

أوجد قيمة :

$$\frac{x^5}{x^2} = \ldots\ldots$$

فيما سبق : درستُ قسمة وحيدات الحد .



فكرة الدرس :

- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة المطولة .
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية .

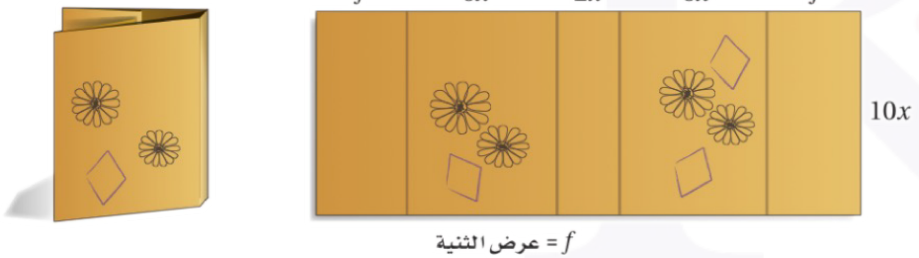
المفردات :

- القسمة التركيبية .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.



ما عرض غلاف الكتاب ؟

ما طول الغلاف ؟

إذا علمت أن عرض الغلاف $10x$ بوصات ، ومساحته $(14x^2 + 60x)$ بوصة مربعة ، فكيف يمكنك إيجاد طول الغلاف ؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال : قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

بسط العبارة :

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$$

$$= \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18yx^2}{3xy}$$

$$= \frac{6}{3}x^{4-1}y^{3-1} + \frac{12}{3}x^{3-1}y^{2-1} - \frac{18}{3}x^{2-1}y^{1-1}$$

$$= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

(1A $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

(1B $(18x^2y + 27\ x^3y^2z)\ (3xy)^{-1}$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يمكنك استعمال عملية مشابهة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى ، وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة .

مثال : قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج : $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$

$$
\begin{array}{r}
x + 8 \\
x - 5 \overline{)\, x^2 + 3x - 40} \\
(-)\ x^2 - 5x \\
\hline
8x - 40 \\
(-)\ 8x - 40 \\
\hline
0
\end{array}
$$

ناتج القسمة هو $x + 8$ ، والباقي 0

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:

- اكتب كثيرة الحدود في كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه، بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا حسب درجتها.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني ... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.

تحقق من فهمك :

(2A $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

(2B $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال :

أي مما يأتي يكافئ العبارة : $(3-a)^{-1}$(a^2+7a -11)

A) $a+10-\frac{19}{3-a}$

C) $-a-10+\frac{19}{3-a}$

B) $-a+10$

D) $-a-10-\frac{19}{3-a}$

اقرا فقرة الاختبار

بما ان العامل الثاني مرفوع للاس 1 - ، فهذا اذن مسالة قسمة .

$(3-a)^{-1}$(a^2+7a -11) $=\frac{a^2+7a-11}{3-a}$

حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r} -a-10 \\ -a+3 \overline{)\, a^2+7a-11} \\ (-)\quad a^2-3a \\ \hline 10a-11 \\ (-)\quad 10a-30 \\ \hline 19 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $-a-10$ ، والباقي 19 .

لذا فان $(3-a)^{-1}$(a^2+7a - 11) = -a – 10 + $\frac{19}{3-a}$ ، ومن ثم تكون الإجابة هي البديل C .

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

الاختيار من متعدد

يمكنك حذف بعض البدائل عن طريق اختيار قيمة للمتغير a ثم تعويض هذه القيمة في العبارة الأصلية وفي البدائل وإيجاد قيمة كل منها.

تحقق من فهمك :

أي مما يأتي يكافئ العبارة : $(1-r)^{-1}(r^2+5r+7)$ ؟

A) $-r-6+\frac{13}{1-r}$

B) $r+6$

C) $r-6+\frac{13}{1-r}$

D) $r+6-\frac{13}{1-r}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

القسمة التركيبية : هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد .

القسمة التركيبية

الخطوة 1 : اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x-r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2 : اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3 : اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4 : كرر الخطوتين 3 , 2 على ناتج الجمع في الخطوة السابقةحتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

مثال : القسمة التركيبية

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج : $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

الخطوة 1 : اكتب معاملات المقسوم . واكتب الثابت r في الصندوق ، وهو في هذا المثال 4 . ثم اكتب المعامل الأول وهو 2 اسفل الخط الافقي .

الخطوة 2 : اضرب المعامل الأول في الثابت r :
2(4) = 8 ، واكتب الناتج اسفا المعامل الثاني .

الخطوة 3 : اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني:
-13 + 8 = - 5

الخطوة 4 : اضرب المجموع ةهة 5 - في الثابت r : $-20 = 4 \times -5$ ، واكتب الناتج اسفل المعامل التالي ، ثم اجمع : 6 = (-20) + 26 . اضرب المجموع وهو 6 في الثابت r 24 = 6(4) ، واكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي ، ثم اجمع : 0 = 24 + 24 - .

اذن ناتج القسمة هو $2x^2 - 5x + 6$ ، والباقي0 .

تحقق : اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه ، فيكون الناتج هو المقسوم .

$$\begin{array}{rl} & 2x^2 - 5x + 6 \\ (\times) & \underline{\qquad x - 4} \\ & -8x^2 + 20x - 24 \\ (+) & \underline{2x^3 - 5x^2 + 6x\qquad} \\ & 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 4 & 2 & -13 & 26 & -24 & \\ & \downarrow & & & & \\ \hline & 2 & & & & | \\ \\ 4 & 2 & -13 & 26 & -24 & \\ & & 8 & & & \\ \hline & 2\nearrow & & & & | \\ \\ 4 & 2 & -13 & 26 & -24 & \\ & & 8 & & & \\ \hline & 2 & -5 & & & | \\ \\ 4 & 2 & -13 & 26 & -24 & \\ & & 8 & -20 & 24 & \\ \hline & 2 & -5\nearrow & 6\nearrow & | & 0 \end{array}$$

ملاحظات :

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم

$2x^3 - 4x^2 + 6$

فاكتبه في صورة

$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$

تحقق من فهمك :

(4A $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

(4B $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

(4C $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

(4D $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

ملاحظات :

ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$ ، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لايساوي الواحد ، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية .

تنبية!

قسمة جميع الحدود

تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

مثال : معامل x في المقسوم عليه لايساوي 1

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج : $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} = \frac{\left(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x\right) \div 3}{(3x + 1) \div 3} = \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

وبما ان المقسوم لا يحتوي حدا ثابتا ، فضع صفرا مكانه .

$x - r = x + \frac{1}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$ $\rightarrow -\frac{1}{3}$

1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
1	-2	1	2	$-\frac{2}{3}$

وعليه فان الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}}$. وأخيرا بسط الكسر

$$\frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \frac{3 \times \frac{2}{3}}{3 \times \left(x + \frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3x + 1}$$

وعلية يكون الناتج هو :

$$x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1} \quad .$$

تحقق : اوجد ناتج القسمة مستعملا القسمة الطويلة .

$$\begin{array}{r|l} & x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ \hline 3x + 1 & 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x \\ (-) & 3x^4 + x^3 \\ \hline & -6x^3 + x^2 + 7x \\ (-) & -6x^3 - 2x^2 \\ \hline & 3x^2 + 7x \\ (-) & 3x^2 + x \\ \hline & 6x \\ (-) & 6x + 2 \\ \hline & -2 \end{array}$$

وعلية يكون الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$

تحقق من فهمك :

(5A $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2X + 1)$

(4B $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

(5C $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$

(5D $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد : بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

1) $\dfrac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$

2) $(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

3) $(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$

4) $(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$

7) اختيار من متعدد: أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$ ؟

A $-x - 7 + \frac{19}{4 - x}$ **B** $-x - 7$ **C** $x + 7 - \frac{19}{4 - x}$ **D** $-x - 7 - \frac{19}{4 - x}$

مجموعة رقمة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

12) $\dfrac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$

17) $\dfrac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2}$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

20 $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$

22 $\dfrac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y + 2}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

24) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + x - 6)(2 - x)^{-1}$ ؟

A $x + 3$ **B** $-x - 1$ **C** $-x + 1$ **D** $-x - 3$

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

29) $(x^4 - y^4) \div (x - y)$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا:

37) **اكتشف الخطأ:** قسَّم كلٌّ من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$، فقال خليفة: إن الباقي 26، وقال جمال: إن الباقي -100. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

41) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك.

$5b + 11c - 9ad^2$	$x + 5$	$\frac{5}{x^2}$	$3xy + 6x^2$

مجموعة رقعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدريب على اختبار

43) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة:
$(-4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$؟

A $2x^2$ **C** $-10x^2 + 17x$

B $-10x^2$ **D** $2x^2 + 17x$

44) أيُّ كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟

A $x^3 + x^2 - 2x^4$ **C** $x^2 + x + 12^3$

B $-2x^2 - 3x + 4$ **D** $1 + x + x^3$

تحصيلي :

ناتج قسمة: $(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 2) \div (2 + 3x)$

(a $x^2 - 2x + 1$ **(b** $x^3 - 2x^2 + 1$

(c $x^3 - 2x + 1$ **(d** $x^3 - 2x^2 + x$

الواجب :