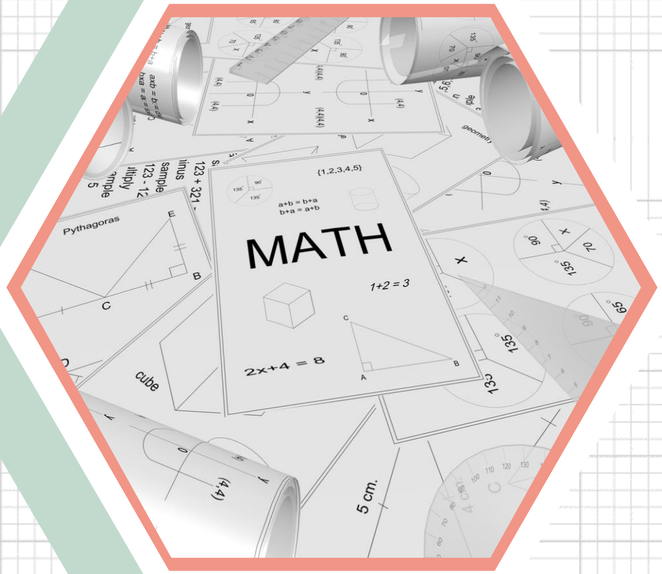
رياضيات ٢-١



إعداد:أ/عبدالعزيز الشريف

الباب
الثالث

كثيرات الحدود
ودوالها

٣-٧
نظريتا الباقي والعوامل

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

- درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية.

والآن

- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أستعمل التعويض التركيبي لأحدد ما إذا كانت ثنائية حد عاملًا من عوامل كثيرة حدود أم لا.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

المفردات

- نظرية الباقي.
- التعويض التركيبي.
- نظرية العوامل.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبدالعزيز الشريف

لماذا؟

قدّر صاحب بقالة أرباحه السنوية بالدالة:
$S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، حيث x عدد السنوات منذ العام 1420هـ، وتمثل $S(x)$ قيمة الأرباح بمئات الريالات.

يمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير الأرباح في العام 1440هـ، بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

التعويض التركيبي

التعويض التركيبي: يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x - 3 \overline{)\, -3x^2 + 5x + 4} \\ (-)\ \underline{-3x^2 + 9x} \\ \quad -4x + 4 \\ (-)\ \underline{-4x + 12} \\ \quad -8 \end{array}$$

الطريقة 2: القسمة التركيبية

3	−3	5	4
		−9	−12
	−3	−4	−8

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8 ، وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$ عوّض العدد **3** بدلًا من x

$= -27 + 15 + 4$ اضرب

$= -8$ بسّط

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضِّح **نظرية الباقي**.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

نظرية الباقي

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نظرية الباقي

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$ ، وكذلك :

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\bullet$	$(x - r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \bullet (x + 10) + 42$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم : عبد العزيز الشريف

التعويض التركيبي

تُسمى عملية تطبيق نظرية الباقي باستعمال القسمة التركيبية **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيمة دالة عند عدد، خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

مثال (١)

إذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ ، فأوجد $f(4)$ باستعمال التعويض التركيبي.

بناءً على نظرية الباقي، فإن $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 4$.

4	3	−2	0	5	2
		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

بما أنه لا يوجد حد يحتوي على x^2، لذا ضع 0 للمحافظة على مكان عامل الحد x^2 .

بما أن باقي القسمة يساوي 662 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 662$

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

وللتحقق نستعمل التعويض المباشر.

عوض عن x بالعدد 4 في دالة كثيرة الحدود.

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ **الدالة الأصلية**

$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$ **عوِّض العدد 4 بدلًا من x**

$= 768 - 128 + 20 + 2 = 662$ **بسِّط**

وعليه فإن $f(4) = 662$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى الإجابة نفسها من خلال التعويض المباشر .

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

التعويض التركيبي

تحقق من فهمك

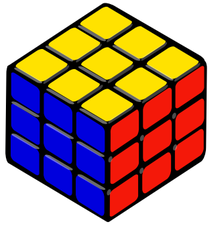
1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$.

1B) إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $g(-1)$.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

إيجاد قيم الدالة

يمكنك استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي تكون فيها حسابات التعويض المباشر معقدة.

مثال (٢)

مبيعات: **ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. ما قيمة الأرباح في العام 1440 هـ؟**

أوجد ناتج قسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 20$ مستعملًا القسمة التركيبية.

20	0.02	−0.52	4.03	0.09	77.54
		0.4	−2.4	32.6	653.8
	0.02	−0.12	1.63	32.69	731.34

تقدر الأرباح بـ 73134 ريالًا تقريبًا.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

إيجاد قيم الدالة

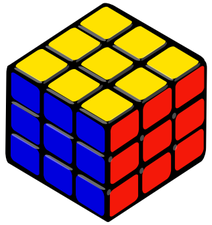
تحقق من فهمك

2) يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى محافظات المملكة منذ عام 1420، حيث تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلاب بالعشرات، قدّر عدد طلاب المحافظة عام 1432.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

عوامل كثيرات الحدود

عوامل كثيرات الحدود: تبيّن القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضِّح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

نظرية العوامل

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة.

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال نظرية العوامل

مثال (٣)

حدّد ما إذا كان $x-5$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)=x^3-7x^2+7x+15$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

الخطوة 1: استعمال نظرية العوامل

بناءً على نظرية العوامل تكون ثنائية الحد $x-5$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(5)=0$، ولإيجاد $P(5)$، يمكنك استعمال التعويض التركيبي.

5	1	−7	7	15
		5	−10	−15
	1	−2	−3	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا؛ أي أن $P(5)=0$، فإن $x-5$ عامل لكثيرة الحدود.

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطًا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملا كثيرة الحدود x^3+x^2-x+15 هما $x+3$ و x^2-2x+5.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

الخطوة 2: تحليل كثيرة الحدود

بما أن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود؛ لذا يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على النحو الآتي: $(x - 5)(x^2 - 2x - 3)$. وتكون $x^2 - 2x - 3$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على $(x - 5)$.

تحقق مما إذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل أم لا.

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ حلِّل ثلاثية الحدود

وعليه فإن $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x - 5)(x + 1)(x - 3)$

يمكنك التحقق من إجابتك بضرب العوامل ومقارنة كثيرة الحدود الناتجة بكثيرة الحدود الأصلية.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال نظرية العوامل

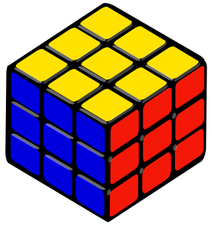
تحقق من فهمك

3) حدد ما إذا كان $x-2$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $x^3-7x^2+4x+12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تأكد

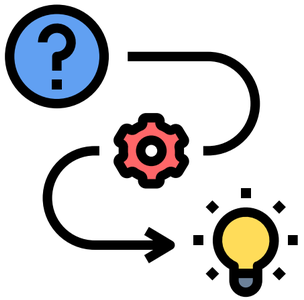
في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى، حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$

5) $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$

6) $3x^3 + 10x^2 - x - 12; x - 1$

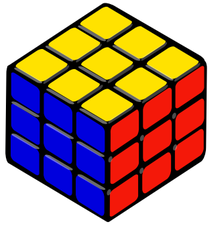
7) $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15; x + 3$



DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

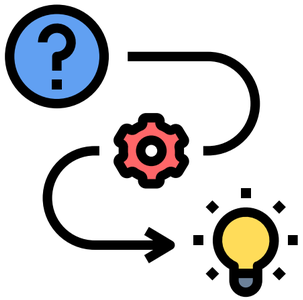
مسائل التفكير العليا

35) تبرير: إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

a) الباقي يساوي صفرًا؟

b) الباقي يساوي 1؟

c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفرًا؟



تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تحصيلي

ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 - i)(4 + i)$؟

A 15

B $16 - i$

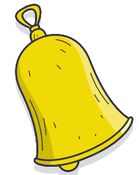
C 17

D $17 - 8i$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif