

ستكون كما تؤمن أنك ستكون،.. حد أهدافك
واصنع حدودك بنفسك، أنت عظيم إن أردت

قدرات

ناتج $\sqrt{298116} = \dots\dots\dots$

٧٦٢ (د)

٥٤٦ (ج)

٧٦٣ (ب)

١٢٥ (أ)

ناتج $4063 \div 5621616 = \dots\dots\dots$

٥٤٣٥ (د)

١٢٣٢ (ج)

٤٥٦٧ (ب)

٦٥٤٣ (أ)



الجذور والأصفار

فيما سبق:

درست استعمال الأعداد
المركبة لوصف حلول
المعادلات التربيعية.
(الدرس 2 - 3)

والآن:

- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية للدالة.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.



أهداف الدرس

مفردات الدرس

النظرية الأساسية في الجبر Fundamental Theorm of Algebra





لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالة:
 $g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$
لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات،
حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.
ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة
قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة
بالدالة.

أنواع الجذور تعلمت سابقاً أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن
يكون أية قيمة مثل c ، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانياً
تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x .

هل تبقى المعادلة صحيحة لقيم x السالبة؟

بناءً على المعادلة ما تكلفة إنتاج القطعة الواحدة في
عام 1410؟

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود،

فإن العبارات الآتية متكافئة:

- C صفر للدالة $P(x)$.
- C جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - C$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان C عدداً حقيقياً، فإن $(C, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x .

مثال:

افتراض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

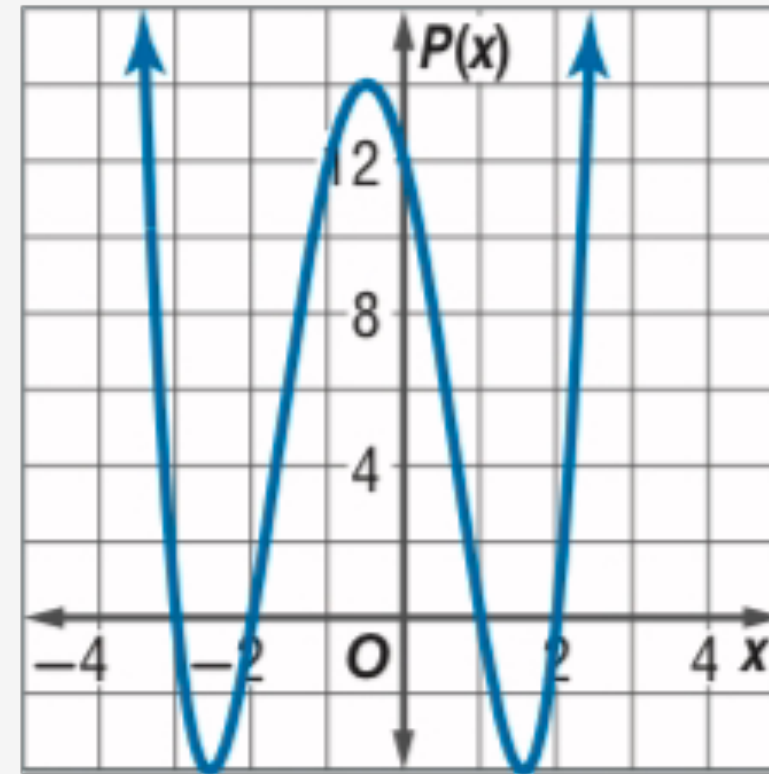
هي: $-3, -2, 1, 2$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x

هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.



عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أي أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

أضف إلى



النظرية الأساسية في الجبر

مفهوم أساسي

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

تحديد عدد الجذور وأنواعها

تحقق من فهمك



حلّ كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

$$x^3 + 2x = 0 \quad (1A)$$

تحديد عدد الجذور وأنواعها

تحقق من فهمك



حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

$$x^4 - 16 = 0 \quad (1B)$$

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات
كثيرات الحدود جذر
مكرر مرتين أو ثلاث
أو أربع مرات وهكذا



تحديد عدد الجذور وأنواعها

تحقق من فهمك



حلّ كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

$$3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0 \quad (1C)$$

تأكد



مثال 1

حلّ كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

$$(1) \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(2) \quad x^3 + 12x^2 + 32x = 0$$

اختبر حلّ كلّ معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

أضف إلى

مطوبتك

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

$$-2x^5 - 3x^2 + 8 = 0$$

5 جذور

$$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 = 0$$

4 جذور

$$x^3 + 2x^2 + 6 = 0$$

3 جذور

مثال:



قانون ديكارت للإشارات

مفهوم أساسي

- إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :
- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
 - عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.



تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت

(1596 - 1650 م)، فيلسوف،
ورياضي، وفيزيائي فرنسي،
يلقب بـ "أبو الفلسفة
الحديثة". له تأثير واضح
في علم الرياضيات؛ فقد
اخترع نظاماً رياضياً شكّل
أساس الهندسة التحليلية
سمّي باسمه وهو نظام
الإحداثيات الديكارتية.

إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية للدالة

تحقق من فهمك



(2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة.
$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية يساوي العدد 6 مطروحاً منه مجموع عدد الأصفار الحقيقية

استراتيجية الجيسكو

تأكد

مثال 2

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

$$(5) \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$$



وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

نظرية الأصفار المركبة المترافقة

التعبير اللفظي: إذا كان a, b عددين حقيقيين، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$ ، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

إرشادات للدراسة

استعمال الأصفار لكتابة الدالة

إن أي دالة على الصورة
 $f(x) = a(x^3 - 9x^2 + 16x + 26)$
 (حيث a عدد صحيح لا
 يساوي الصفر)، تحقق
 المعطيات الواردة في
 المثال 3، ولكن اعتبر أن
 $a = 1$ للتسهيل فقط.

استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $5 - i$, -1 من أصفارها .

افهم:

المعطيات: العددان $5 - i$, -1 من أصفار كثيرة حدود.

المطلوب: كتابة دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والعددان $5 - i$, -1 من أصفارها.

خطئ:

بما أن $5 - i$ صفر للدالة، فإن $5 + i$ أيضًا صفر للدالة بحسب نظرية الأصفار المركبة المترافقة.

لذا فإن $x - (5 + i)$, $x - (5 - i)$, $x + 1$ عوامل لكثيرة الحدود.

حل:

اكتب المعادلة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

$$= (x + 1)[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$$

$$= (x + 1)[(x - 5)^2 - i^2]$$

$$= (x + 1)[x^2 - 10x + 25 - (-1)]$$

$$= (x + 1)(x^2 - 10x + 26)$$

$$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$$

$$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$$

تحقق:

بما أن هناك 3 أصفار، فإن دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة، ولذا فإن $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، وأصفارها هي: $5 + i$, $5 - i$, -1 .

مثال



الرؤوس المرقمة



تأكد

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

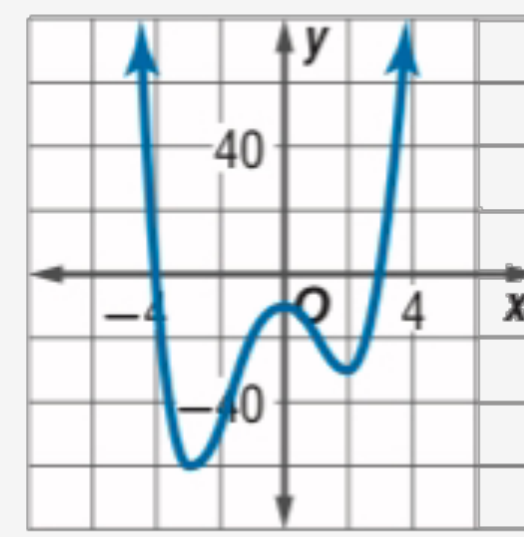
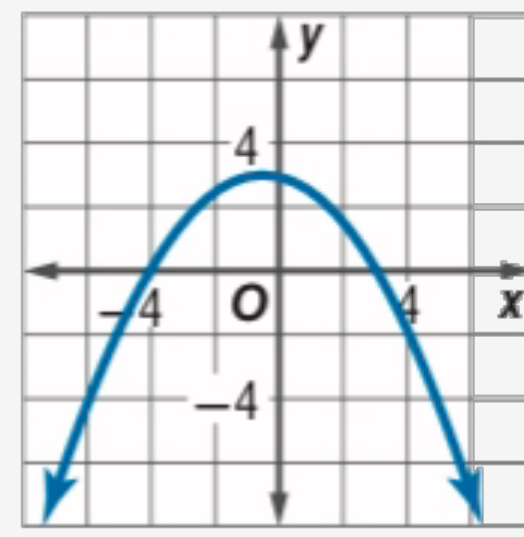
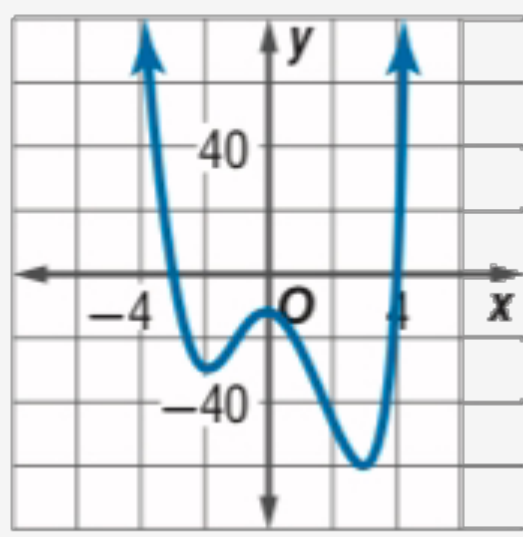
(9) $4, -1, 6$

اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

(a) $-3, 4, i, -i$

(b) $-4, 3$

(c) $-4, 3, i, -i$



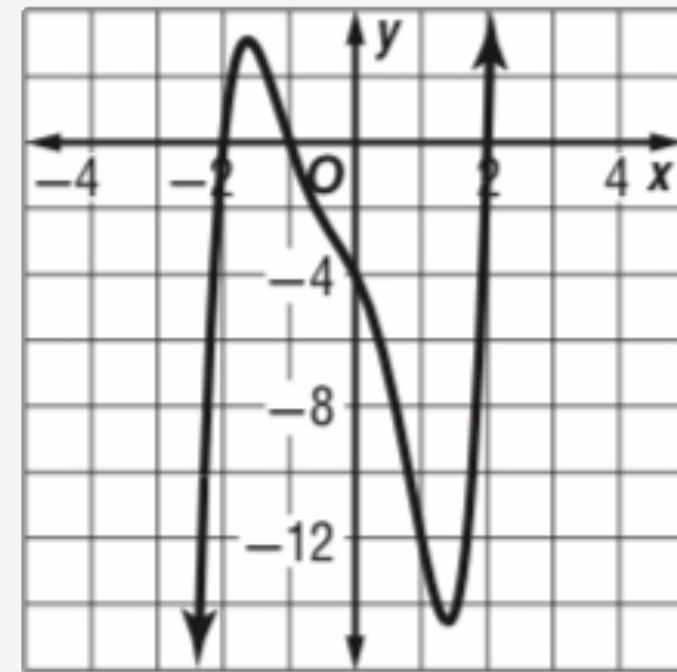
تدرب وحل مسائل

مسائل مهارات التفكير العليا

(41) **تبرير:** اكتب مثلاً مضاداً لكل عبارة فيما يأتي:

- (a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.
- (b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

تدريب على اختبار



43) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ وحدد أيًا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ ؟

$x + 2$ C

$x - 2$ A

$x + 1$ D

$x - 1$ B