الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

فيما سبق

درستُ إيجاد تركيب دالتين.
(الدرس 6–1)

الآن

- أستعملُ اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.
- أجِدُ الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

المفردات

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

الدالة المتباينة
one-to-one function

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

لمـــــاذا

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

الدالة العكسية : العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلًّا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

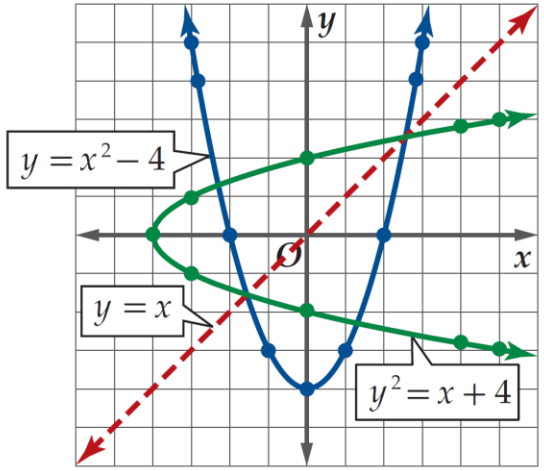
الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$y^2 = x + 4$ أو $x = y^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالَّ. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لِـ f، ويرمز لها بالرمز f^{-1}.
لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

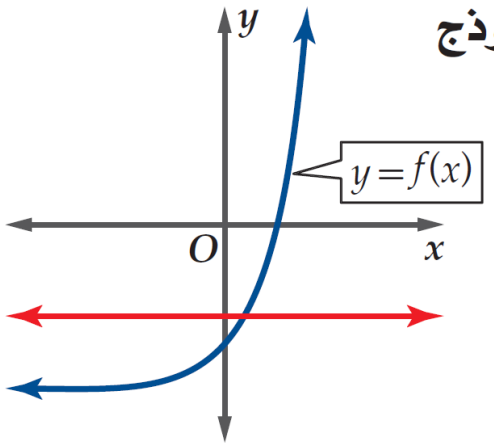
يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

مفهوم أساسي

اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

نموذج



مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

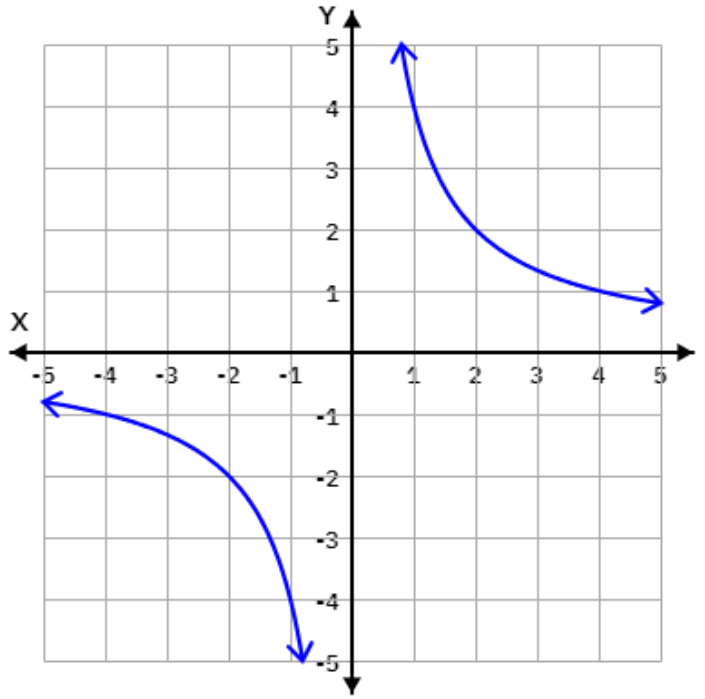
الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

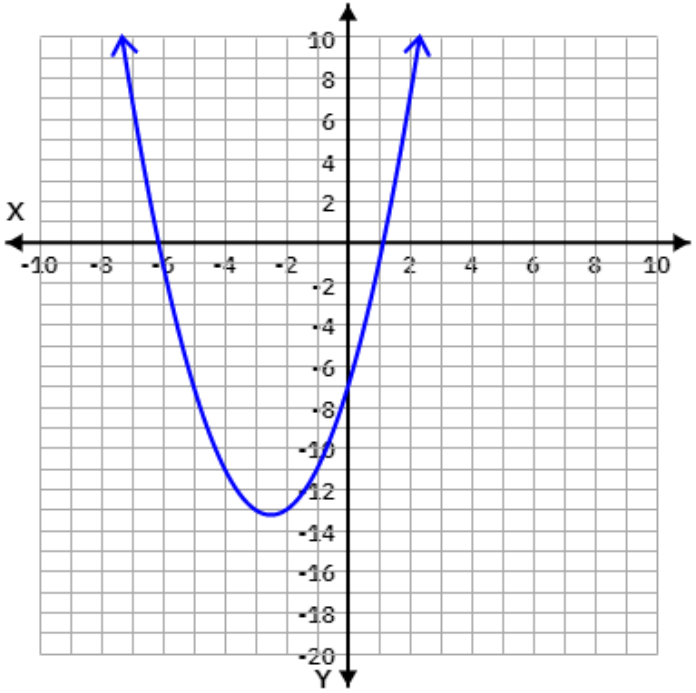
تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

1A $h(x) = \frac{4}{x}$



1B $f(x) = x^2 + 5x - 7$



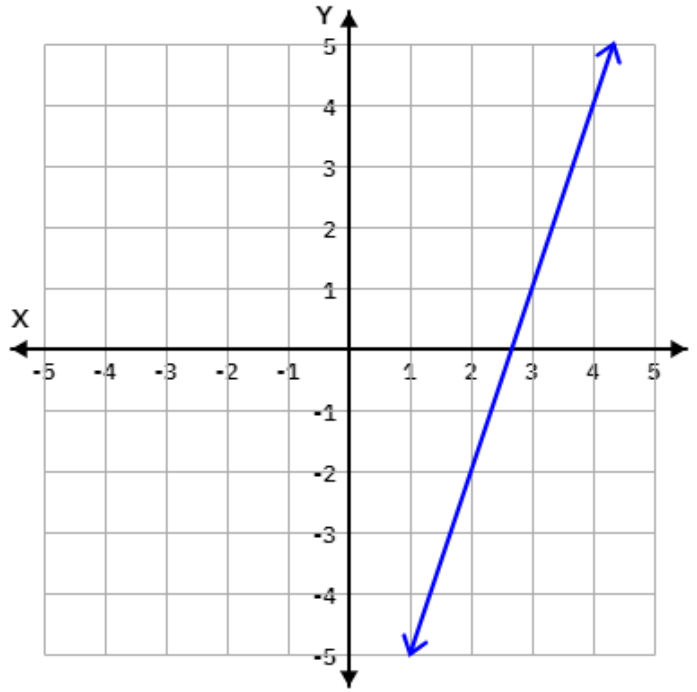
الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

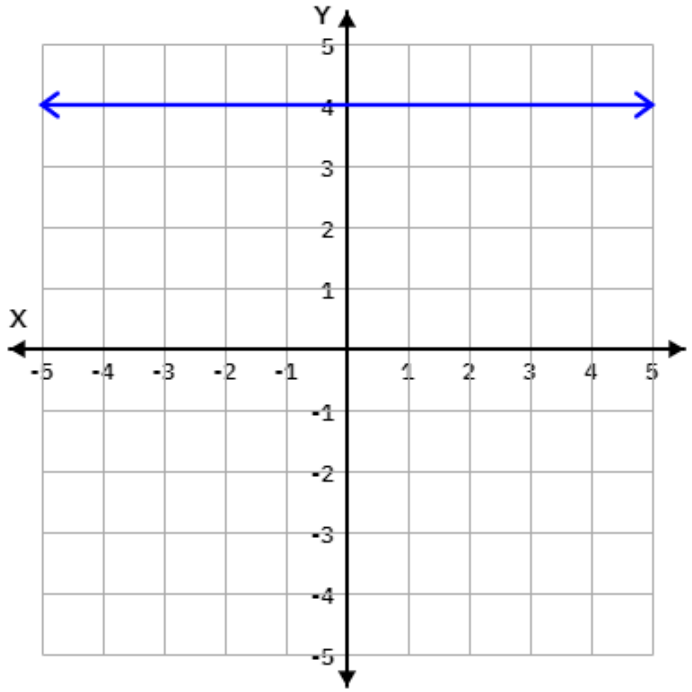
تدرب

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

3) $y = 3x - 8$



4) $y = 4$

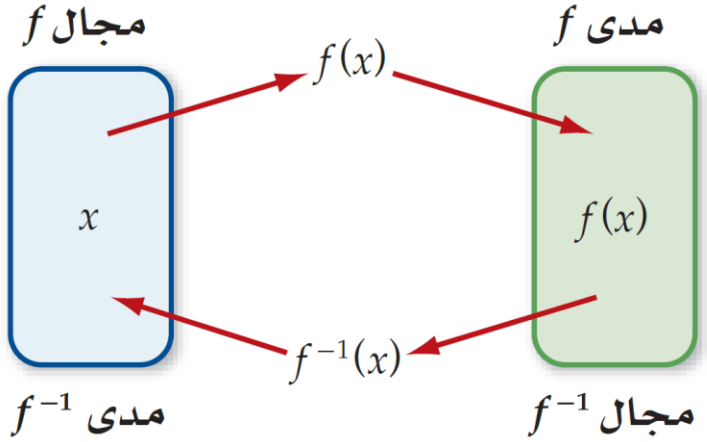


الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

إيجاد الدالة العكسية : إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y، ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

تحقق من فهمك

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

2A $f(x) = -16 + x^3$

2B $f(x) = \frac{x+7}{x}$

2C $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

تدرب

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

13) $f(x) = |x - 6|$

14) $f(x) = \frac{x - 6}{x}$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي **تركيب الدالة ودالتها العكسية**

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ **لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.**
- $f^{-1}[f(x)] = x$ **لجميع قيم x في مجال $f(x)$.**

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A) $f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(3B $f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

تدرب

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

20 $f(x) = 4x + 9$ $\quad g(x) = \frac{x - 9}{4}$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

تحصيلي

ما هي الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x$ ؟

(A) $\frac{x}{2}$ (B) $2x + 3$

(C) $\frac{2}{x}$ (D) $2x + 5$

ما هي الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{x-3}{4}$ ؟

(A) $\frac{x-4}{3}$ (B) $4x - 3$

(C) $\frac{4}{x-3}$ (D) $4x + 3$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

تحصيلي

إذا كانت $f(x) = (2x+1)(3x^{-1})$ فإن $f^{-1}(x)$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{3}{x-6}$ Ⓑ $5x+3$

Ⓒ $3x+5$ Ⓓ $\frac{5}{x-3}$

أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{x-3}$.

Ⓐ x^2-3 Ⓑ x^2+3

Ⓒ $\frac{3}{x^2}$ Ⓓ $\frac{-3}{x^2}$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٧		العلاقات والدوال العكسية

الأدوات

تحصيلي

إذا كان $f(x) = \sqrt{x-4}$ فما مجال الدالة $f^{-1}(x)$ ؟

Ⓐ $R - \{\pm 2\}$ Ⓑ $R - \{\pm 4\}$

Ⓒ $[0, \infty)$ Ⓓ R