مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

سلسلة عروض رفعة الرياضيات

رياضيات (٥)

الصف الثالث ثانوي

إعداد وتصميم : شيخه راجح المزوقي

shikhah_math

الفصل الأول : تحليل الدوال

كن ملهماً لنفسك ، عظيماً بما تسعى له ، وأبدأ يومك متفائلاً ومتطلعاً للأفضل .. صباح الإيجابية والكفاح

الفصل الأول

تحليل الدّوال

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق:

درستُ مجموعات الأعداد ورموزها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

موضوع الدرس : الدوال

التاريخ : / / ١٤٤٣

لماذا:

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

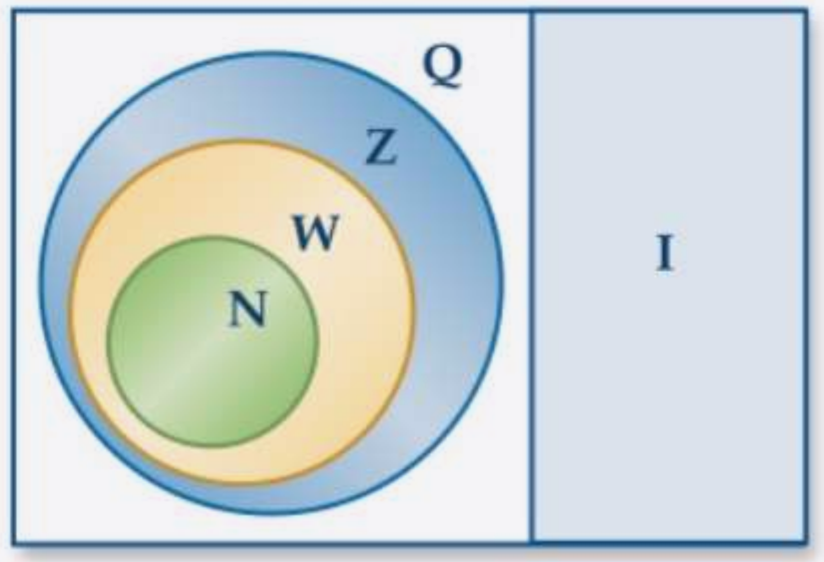
وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية : تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي

الأعداد الحقيقية

الرمز	المجموعة	أمثلة
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205...$
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

الأعداد الحقيقيّة R



يمكنك وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في .

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

الأعداد x حيث...

x لها هذه الخصائص...

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

مثال ١

استعمال الصفة المميزة

اكتب كلا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, \ldots\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \geq 8, x \in W\}$

وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، وَ x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

تحقق من فهمك

(1A $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

(1B $x \leq -3$

(1C $-1 \leq x \leq 5$

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

قراءة الرياضيات

غير محدودة :

تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقُّف).

مثال ٢

استعمال رمز الفترة

اكتب كلا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \leq 16$ $\qquad$ $(-8, 16]$

b) $x < 11$ $\qquad$ $(-\infty, 11)$

c) $x \leq -16$ أو $x > 5$ $\qquad$ $(-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

إرشادات للدراسة

الرمزان ∪، ∩:
يُقرأ الرمز "∪" (اتحاد)، ويعني: جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين.
يُقرأ الرمز "∩" (تقاطع)، ويعني: جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.

تحقق من فهمك

2A) $-4 \leq y < -1$

2B) $a \geq -3$

2C) $x > 9$ أو $x < -2$

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة بين مجموعتين من الأعداد الحقيقية هي:

1) **لفظيًا:** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.

مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًا:** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).

مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًا:** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.

4) **جبريًا:** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي

الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

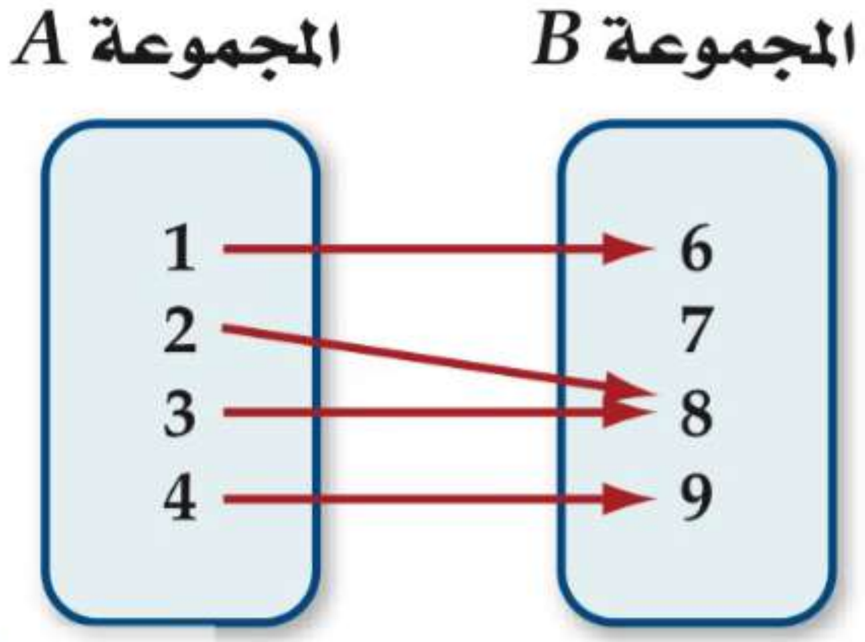
مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثَّلة في المخطط المجاور تمثّل دالةً.

حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.

المجال = $\{1, 2, 3, 4\}$.

وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.

المدى = $\{6, 8, 9\}$.



إرشادات للدراسة

المجال والمدى:
في هذا المفهوم الأساسي، يمكن أن يستعمل الرمز D للتعبير عن المجال، والرمز R للتعبير عن المدى، أي أن:

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

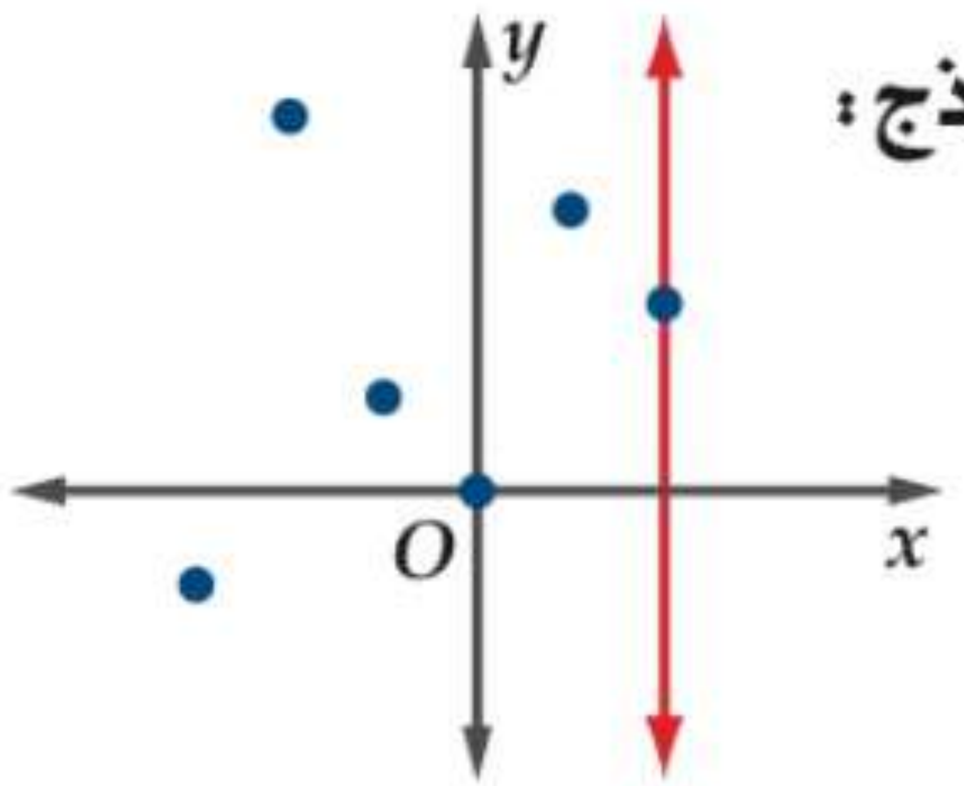
$R = \{6, 8, 9\}$

مفهوم أساسي

اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



مثال ٣

تحديد العلاقات التي تمثّل دوال

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

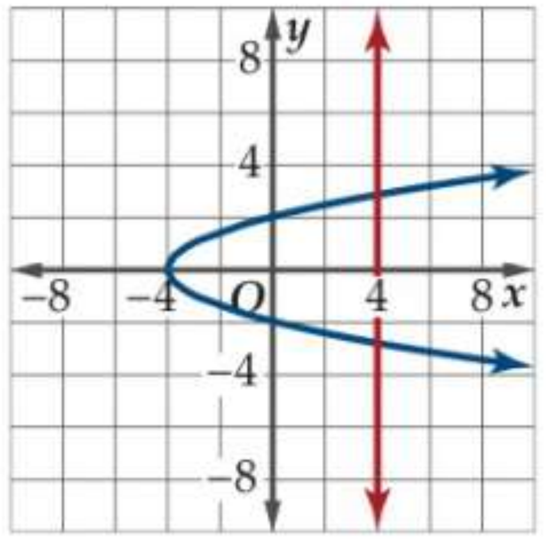
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثل دالةً في x .

b)

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y، وعليه فإن y تمثل دالةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإنّ y لا تمثّل دالةً في x .

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لِـ y.

$y^2 - 2x = 5$	المعادلة الأصلية
$y^2 = 5 + 2x$	أضف $2x$ لكلا الطرفين
$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثّل دالةً في x؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين لِـ y، إحداها موجبة ، والأخرى سالبة.

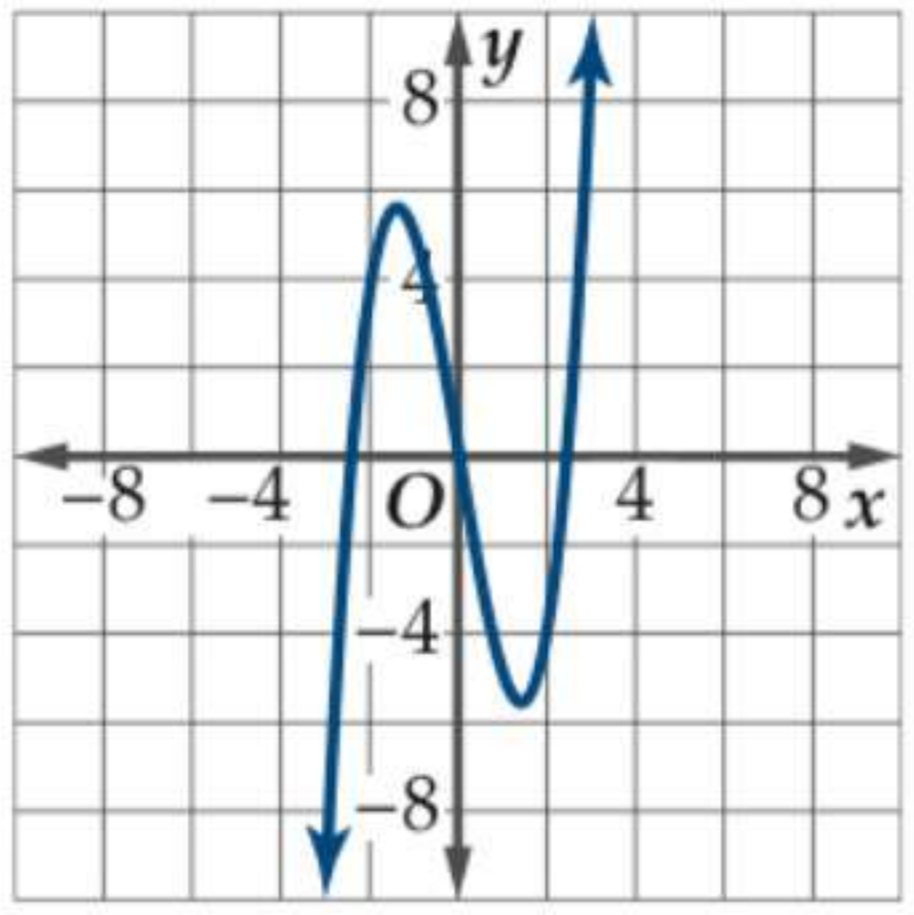
تحقق من فهمك

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C)



3D) $3y + 6x = 18$

مفهوم

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة**، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x ، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

المعادلة	الدالة المرتبطة بالمعادلة
$y = -6x$	$f(x) = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

مثال ٤

إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

(a) $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$	عوّض 6 مكان x
$= 36 + 48 - 24$	بسّط
$= 60$	بسّط

(b) $f(-4x)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$	عوّض $-4x$ مكان x
$= 16x^2 - 32x - 24$	بسّط

(c) $f(5c + 4)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(5c+4) = (5c+4)^2 + 8(5c+4) - 24$	عوّض $(5c+4)$ مكان x
$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$	فك الأقواس $(5c+4)^2$ و $8(5c+4)$
$= 25c^2 + 80c + 24$	بسّط

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

4A) $f(12)$ **4B)** $f(6x)$ **4C)** $f(-3a+8)$

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًّا.

مثال ٥ تحديد مجال الدالة جبريًّا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2-7x}$

تكون العبارة $\dfrac{2+x}{x^2-7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2-7x=0$ ، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x=0$ و $x=7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x=0$ و $x=7$ ، أي $D=\{x \mid x\neq 0, x\neq 7, x\in R\}$ أو $D=(-\infty,0)\cup(0,7)\cup(7,\infty)$.

b) $g(t)=\sqrt{t-5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t-5\geq 0$ ؛ أي أن مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D=\{x \mid x\geq 5, x\in R\}$ أو $D=[5,\infty)$.

إرشادات للدراسة

مجال الدالة:
يمكنك كتابة مجال الدالة في المثال 5a بالطريقة المختصرة بالشكل:
$D = R - \{0,7\}$

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال:
يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلًا،
$f(x)=\sqrt{x-5}$
و $g(t)=\sqrt{t-5}$
يعبران عن الدالة نفسها.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$

5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

5C) $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

مثال من واقع الحياة

إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

... نطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 \ , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 \ , & 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 \ , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ عوّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لايجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ عوّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

تحقق من فهمك

6) سرعة : إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \quad 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \quad 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ **6B)** $v(15)$ **6C)** $v(245)$

إرشادات للدراسة

سرعة السيارة: تقاس سرعة السيارة عادة بالميل أو بالكيلومتر لكل ساعة، ويمكن أن تتغير كل ثانية ما لم يستعمل مثبت السرعة.

مسائل
مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله: إن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. في حين قال سلمان: أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

54) اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟

تدريب على الإختبار

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب دليل على تفوقك وتميزك ...

بارك الله جهودك 🌹

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

درست الدوال وكيفية إيجاد قيمها. (الدرس ١–١)

والآن:

- أستعملُ التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y، وأصفارها.
- أستكشف تماثل منحنيات الدوال، وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المفردات:

الأصفار
zeros

الجذور
roots

التماثل حول مستقيم
line symmetry

التماثل حول نقطة
point symmetry

الدالة الزوجية
even function

الدالة الفردية
odd function

لماذا

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلًا يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1440 – 1433) هـ بالدالة:

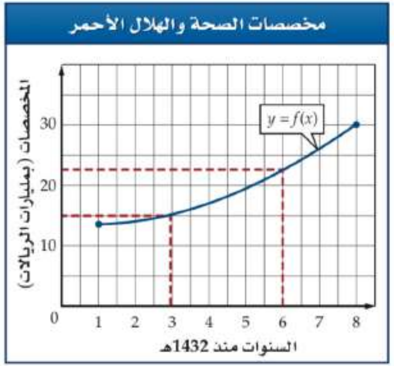
$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07 \,,\; 1 \le x \le 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1433هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

إقرأ المثال وتأمل طريقة الحل

مثال 1 من واقع الحياة تقدير قيم الدوال

مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:



a) قدّر قيمة المخصصات سنة 1438 هـ ، ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا.

السنة 1438 هـ هي السنة السادسة بعد 1432 هـ ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1438هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا.

وللتحقُّق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولًا.

b) قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا.

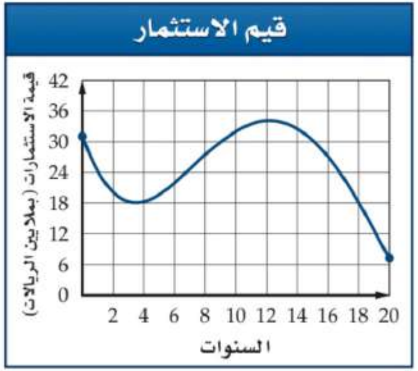
يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3 ، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1435 هـ . وللتحقق جبريًّا أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

لذا تعد السنة التقريبية 1435هـ معقولة.

تحقق من فهمك

1) **استثمار:** تمثل الدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$ تقديرًا لاستثمارات أحد رجال الأعمال في السوق المحلية؛ حيث $v(d)$ قيمة الاستثمارات بملايين الريالات في السنة d.



1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة الاستثمارات في السنة العاشرة. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد السنوات التي بلغت فيها قيمة الاستثمارات 30 مليون ريال. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

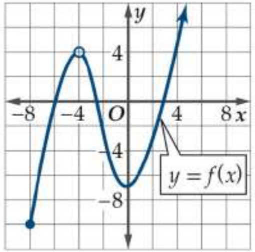
موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

التاريخ : / / ١٤٤٣

إقرأ المثال وتأمل طريقة الحل

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور.



المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f.
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid x \geq -8, x \neq -4, x \in R\}$.

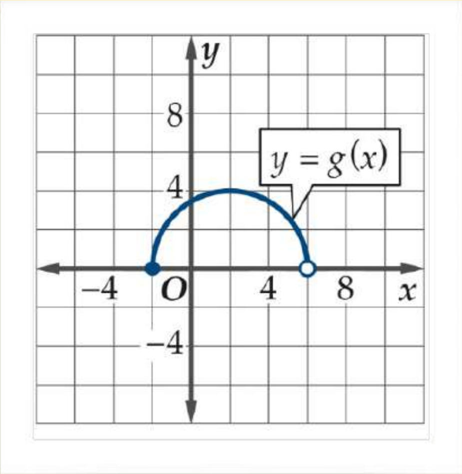
المدى:

إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

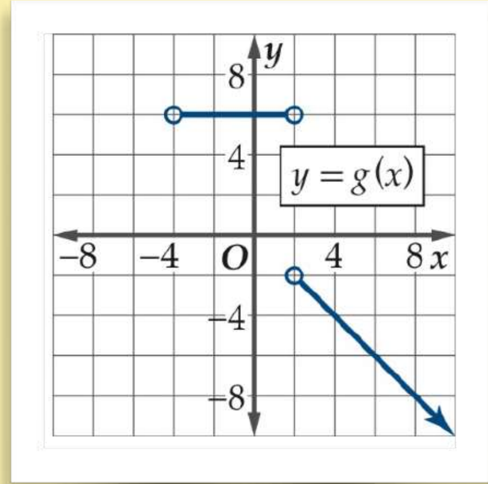
لايقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها
إذ من الممكن استعماله لإيجاد المجال والمدى للدالة

تحقق من فهمك

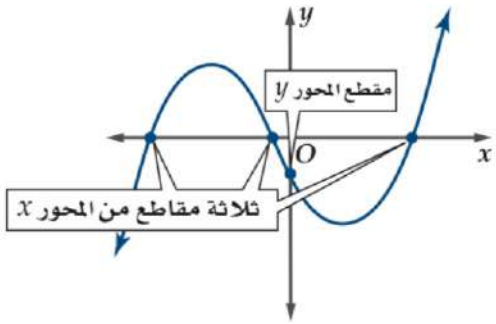
2A)



2B)



النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.



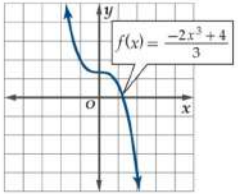
ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نوجد $f(0)$.

إقرأ المثال وتأمل طريقة الحل

مثال 3 إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:

(a



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

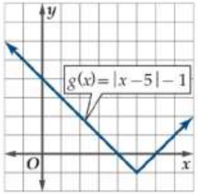
الحل جبريًّا:

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3+4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

أي أن المقطع y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$.

(b



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$، وعليه فإن المقطع y هو 4 .

الحل جبريًّا:

أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0-5| - 1 = 4$$

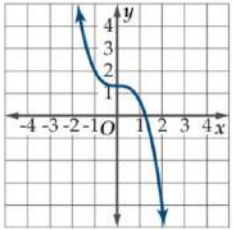
أي أن المقطع y هو 4 .

إرشادات للدراسة

تدريج المحورين y , x:

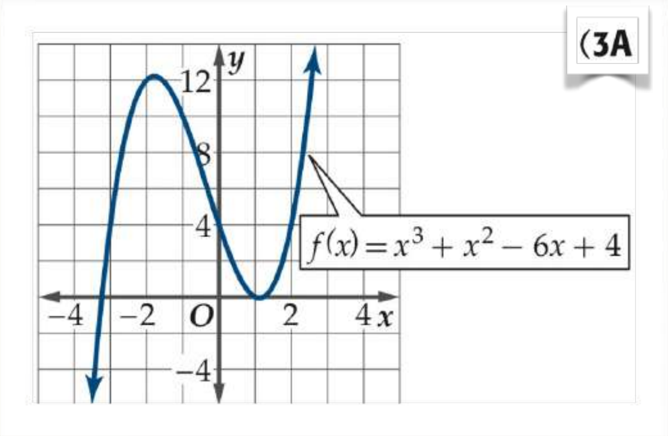
إذا لم يظهر التدريج على المحورين y , x في التمثيل البياني، فذلك يعني أن التدريج بالوحدات.

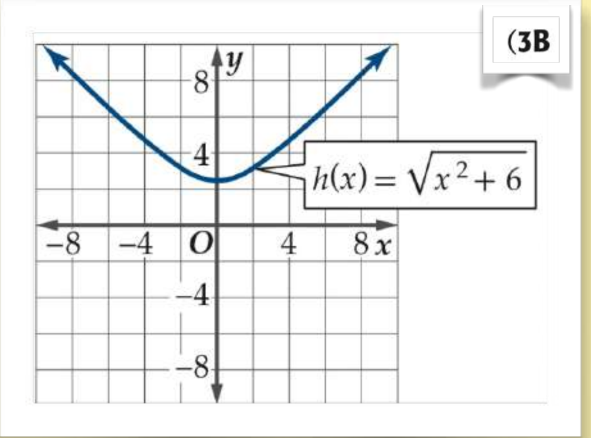
انظر المثال 3a:



موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك

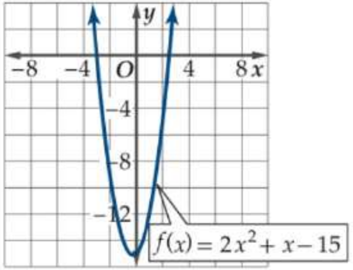




إقرأ المثال وتأمل طريقة الحل

مثال 4 إيجاد الأصفار

استعمل التمثيل البياني المجاور، الذي يمثل الدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.



التقدير من المنحنى:

يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 وَ 2.5 تقريبًا.
لذا فإن صفري الدالة f هما -3 وَ 2.5

الحل جبريًّا:

$2x^2 + x - 15 = 0$			ضع $f(x) = 0$
$(2x - 5)(x + 3) = 0$			حلّل
$2x - 5 = 0$	أو	$x + 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2.5$	أو	$x = -3$	حل كل معادلة

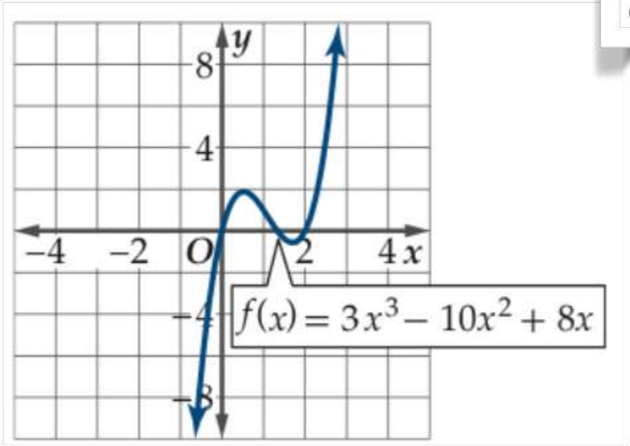
أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 وَ 2.5 وهما صفرا الدالة f.

تسمى المقاطع x لمنحنى الدالة أصفار الدالة وتسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة جذور المعادلة ولإيجاد أصفار الدالة f ، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل .

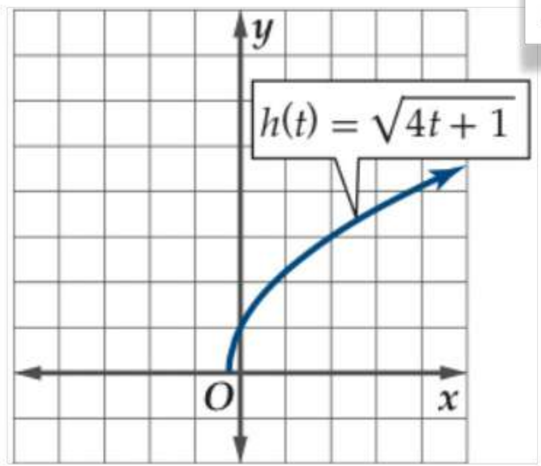
موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات   التاريخ :   /   / ١٤٤٣

تحقق من فهمك

4A)

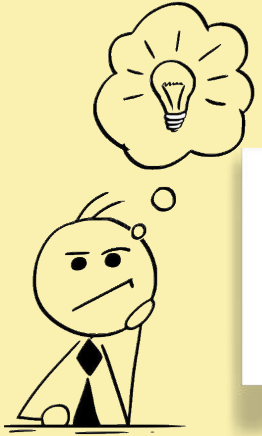


4B)



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

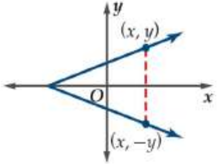
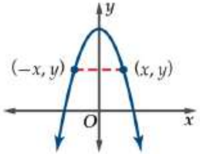
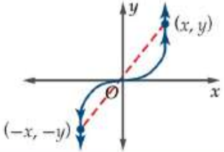
موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات　　　　التاريخ : / / ١٤٤٣



التماثل: يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها $180°$ حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأهم أنواع التماثل:

موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات   التاريخ :   /   / ١٤٤٣

مفهوم أساسي   اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

إرشادات للدراسة

تماثل العلاقات والدوال:

يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط . أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

التاريخ : / / ١٤٤٣

إقرأ المثال وتأمل طريقة الحل

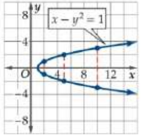
إرشادات للدراسة

التماثل:
من الممكن أن يكون للتمثيل البياني الواحد أكثر من نوع تماثل.

مثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا.

a) $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

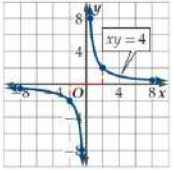
يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x :

x	2	2	5	5	10	10
y	1	−1	2	−2	3	−3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

التحقق جبريًا:

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

b) $xy = 4$



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

x	−8	−2	−0.5	0.5	2	8
y	−0.5	−2	−8	8	2	0.5
(x, y)	(−8, −0.5)	(−2, −2)	(−0.5, −8)	(0.5, 8)	(2, 2)	(8, 0.5)

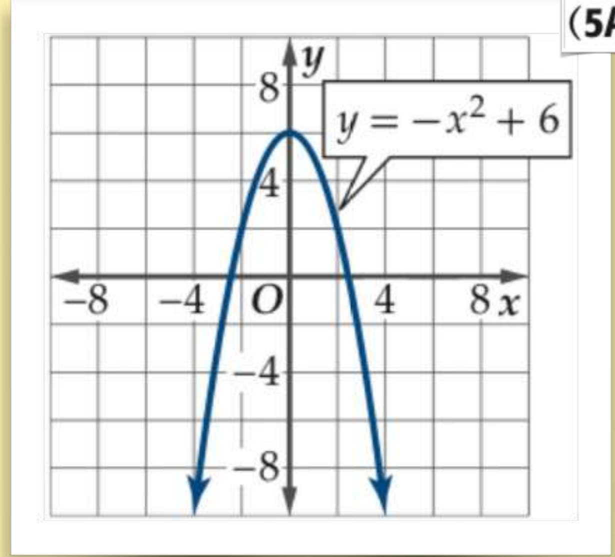
التحقق جبريًا:

بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

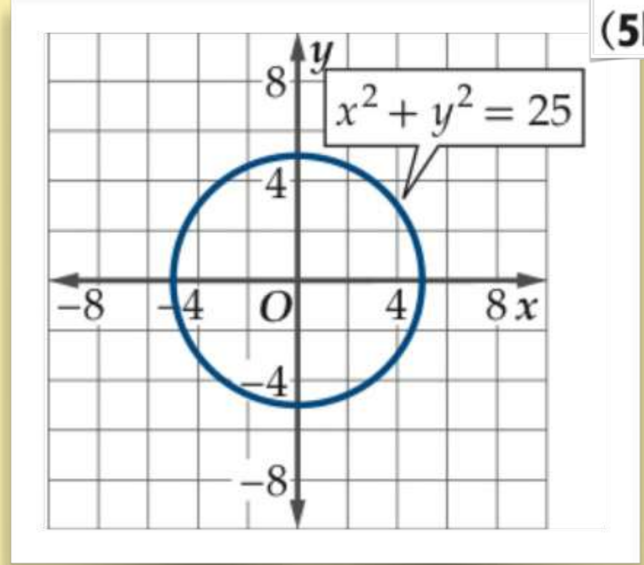
موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات   التاريخ :   /   / ١٤٤٣

تحقق من فهمك

(5A



(5B



موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات   التاريخ :   /   / ١٤٤٣

مفهوم أساسي الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y **الدوال الزوجية**.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل **الدوال الفردية**.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط، ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصتان

موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

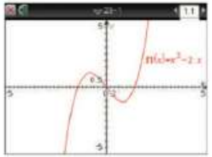
التاريخ : / / ١٤٤٣

إقرأ المثال وتأمل طريقة الحل

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًا. ثمّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

a) $f(x) = x^3 - 2x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

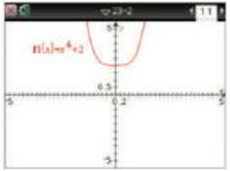
$= -x^3 + 2x$ بسّط

$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

b) $f(x) = x^4 + 2$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

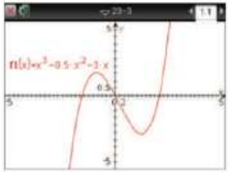
$f(-x) = (-x)^4 + 2$ عوّض $-x$ مكان x

$= x^4 + 2$ بسّط

$= f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^4 + 2$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

c) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست متماثلة حول المحور y وليست متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$ بسّط

وبما أن $-f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$،

فإن $f(-x) \neq f(x)$، وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$؛

لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

موضوع الدرس : تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات   التاريخ :   /   / ١٤٤٣

تحقق من فهمك

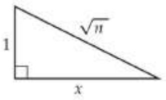
6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ 6B) $g(x) = 4\sqrt{x}$ 6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **اكتب:** وضّح لماذا يمكن أن يكون للدالة 0 أو 1 أو أكثر من مقاطع x، بينما يوجد لها مقطع y واحد على الأكثر.

تدريب على اختبار معياري

81) إذا كان n عددًا حقيقيًّا أكبر من 1، فأوجد قيمة x بدلالة n في الشكل أدناه.



A $\sqrt{n^2-1}$ **C** $\sqrt{n+1}$

B $\sqrt{n-1}$ **D** $n-1$

82) ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$، إذا كان مجالها $-2 < x < 3$ ؟

A $5 < f(x) < 9$ **C** $1 < f(x) < 9$

B $5 < f(x) < 10$ **D** $1 \leq f(x) < 10$

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب دليل على تفوقك وتميزك ...

بارك الله جهودك

حلمك ليس له تاريخ إنتهاء ، خذ نفساً عميقاً وأعد الكرة مرةً ومرة

الإتصال والنهايات

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

إعداد : شيخة المرزوقي

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

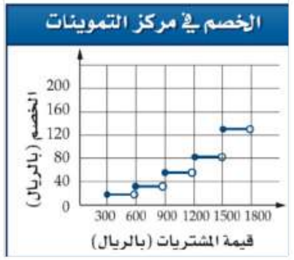
- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

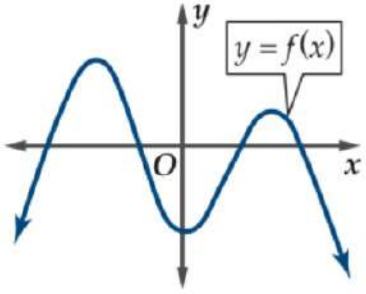
لماذا:

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

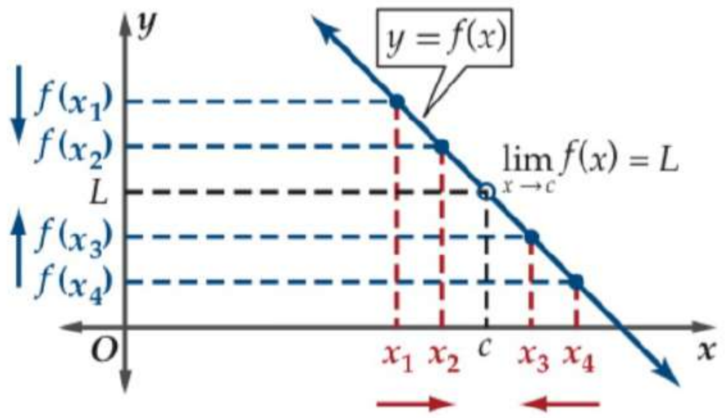
موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز: نقول: إن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

- الدالة المتصلة continuous function
- النهاية limit
- الدالة غير المتصلة discontinuous function
- عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
- عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
- عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
- عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
- سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

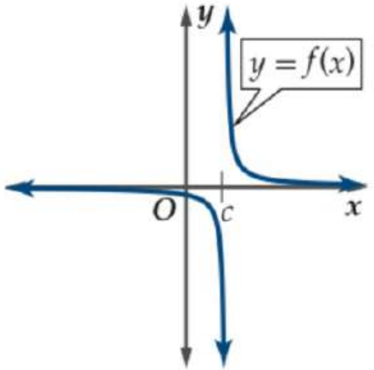
موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

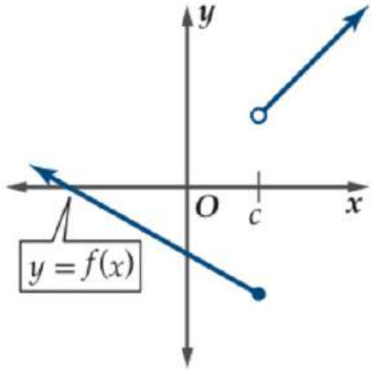
للدالة عدم اتصال لانهائي عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



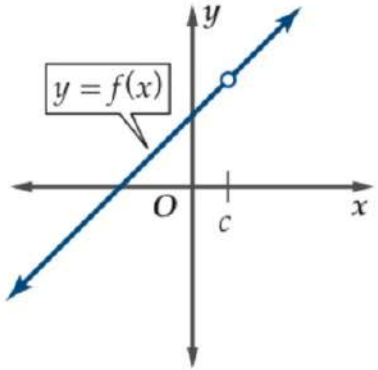
للدالة عدم اتصال قفزي عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة عدم اتصال قابل لإزالة عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

التاريخ : / / ١٤٤٣

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function

النهاية limit

الدالة غير المتصلة discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

إرشادات للدراسة

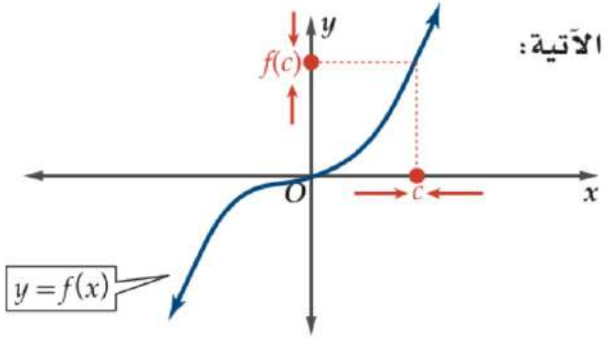
النهايات: إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

ملخص المفهوم — اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

التاريخ : / / ١٤٤٣

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

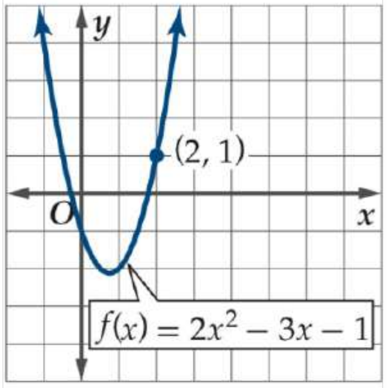
والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبّقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

- الدالة المتصلة continuous function
- النهاية limit
- الدالة غير المتصلة discontinuous function
- عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
- عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
- عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
- عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
- سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

الشكل 1.3.1



مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة؟

كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$.

3) هل $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

التاريخ : / / ١٤٤٣

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

(1A $f(x) = x^3$

(1B $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , \quad x > -3 \\ 2 - x & , \quad x \le -3 \end{cases}$ عند $x = -3$.

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3) = 5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x = -3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x = -3$.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

- الدالة المتصلة continuous function
- النهاية limit
- الدالة غير المتصلة discontinuous function
- عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
- عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
- عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
- عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
- سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = -3$, $x = 3$.

عند $x = 3$

1) $f(3) = \frac{6}{0}$، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = 3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim_{x \to 3} f(x)$ غير موجودة.

3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x = 3$؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

عند $x = -3$

1) $f(-3) = \frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من −3.

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3.0	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	−0.164	−0.166	−0.167		−0.167	−0.167	−0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من −0.167 عندما تقترب x من −3 من الجهتين، أي أن $\lim_{x \to -3} f(x) \approx -0.167$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = -3$. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

(2A $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

(2B $f(x) = \begin{cases} 5x+4 & , x > 2 \\ 2-x & , x \le 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق:

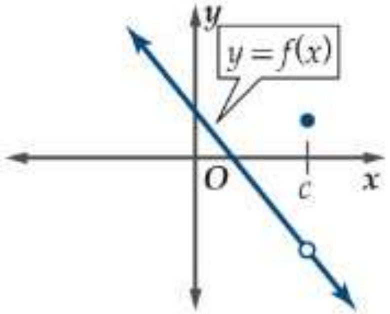
درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior



لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنَّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

التاريخ : / / ١٤٤٣

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 3 إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

1) $f(4) = \frac{0}{0}$، أي أن $f(4)$ غير موجودة.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x\to4} f(x) = 8$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x\to4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$

4) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4 \\ 8, & x = 4 \end{cases}$$

لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function

النهاية limit

الدالة غير المتصلة discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

التاريخ : / / ١٤٤٣

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

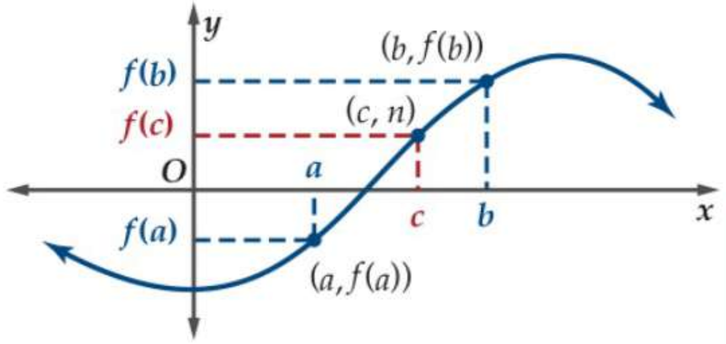
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a $(\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a))$ ، ومتصلة من اليسار عند b $(\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b))$. ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

نظرية — نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.



نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات التاريخ : / / ١٤٤٣

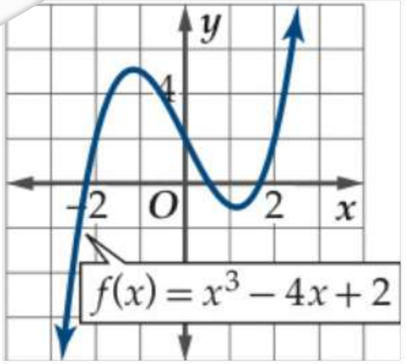
مثال 4 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -2, -3 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 وَ -2 ، والعددين 0 وَ 1 والعددين 1 وَ 2. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.

الشكل 1.3.4



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2-1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

التاريخ : / / ١٤٤٣

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

4B) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

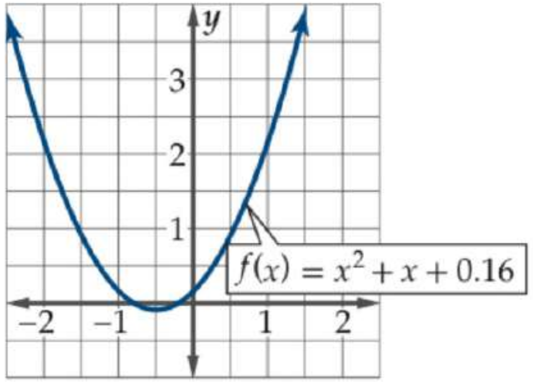
إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمَّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

مثال 5 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0.
مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.



يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

فيما سبق:
درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:
- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:
الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

التاريخ : / / ١٤٤٣

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

إرشاد : استعمل الآلة الحاسبة البيانية (إذا لزم الأمر)

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2-1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2−1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function	عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
النهاية limit	عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
الدالة غير المتصلة discontinuous function	عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity	سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

قراءة الرياضيات

النهايات: تقرأ العبارة $\lim_{x\to\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

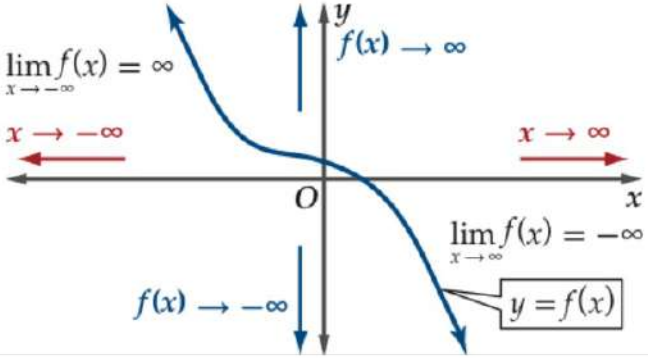
سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف سلوك طرفي التمثيل البياني شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$



أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

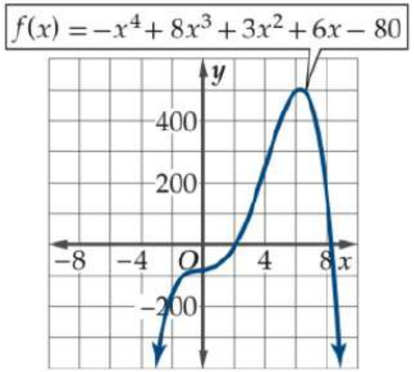
- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

مثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$، وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	-80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

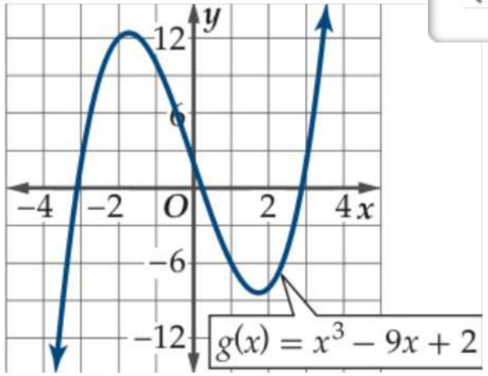
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

إرشادات للدراسة

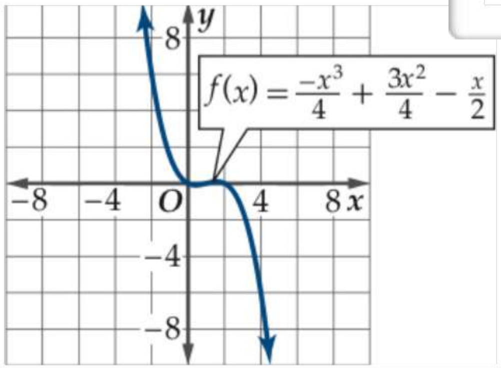
في المثال 6، أوجدت قيم تقريبيّة لـ $f(x)$ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الدقيقة لـ $f(x)$. وكذلك في المثال 7.

تحقق من فهمك :

(6A



(6B



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2−1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبّقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحققّ من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

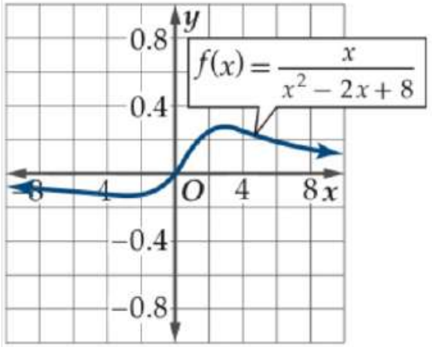
المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو $-\infty$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، في حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 7 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

التعزيز عدديًا:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$، فإن $f(x) \to 0$ و عندما $x \to \infty$، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

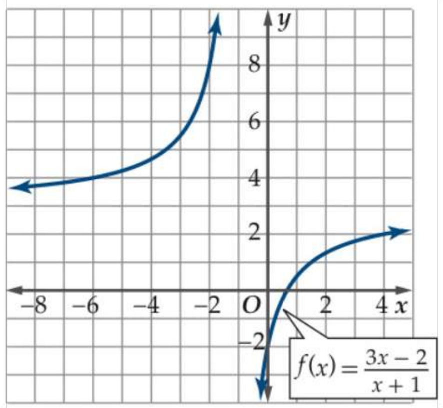
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

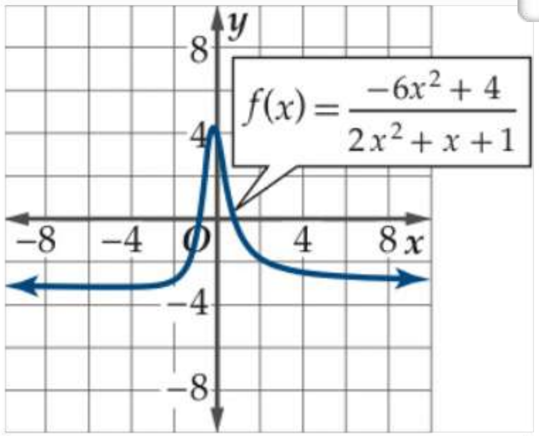
التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

7A)



7B)



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function	عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
النهاية limit	عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
الدالة غير المتصلة discontinuous function	عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity	سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

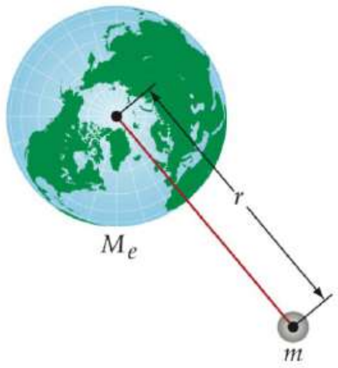
المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

إن معرفة سلوك طرفي التمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

مثال 8 من واقع الحياة — تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني

فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟



المطلوب من المسألة وصف سلوك طرف التمثيل البياني لـِ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيرًا، أي إيجاد $\lim\limits_{r\to\infty} U(r)$.

وبما أن كلًا من G , m , M_e ثوابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا. وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر؛ لذا فإن $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = 0$ ، ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

39) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^6}{x^5}$

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

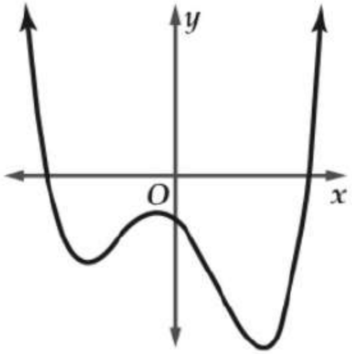
الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدريب على اختبار

58) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟



A 1

B 2

C 3

D 4

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function
النهاية limit
الدالة غير المتصلة discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب دليل على تفوقك وتميزك ...

بارك الله جهودك 🌹

إعداد : شيخة المرزوقي

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يوماً ما ستصعد كل تلك القمم ، سيصبح كل ذلك التعب من الماضي وسنفتخر بوصولنا القمة..

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1–1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات:

الصغرى
minimum

القصوى
extrema

متوسط معدل التغير
average rate of change

القاطع
secant line

المتزايدة
increasing

المتناقصة
decreasing

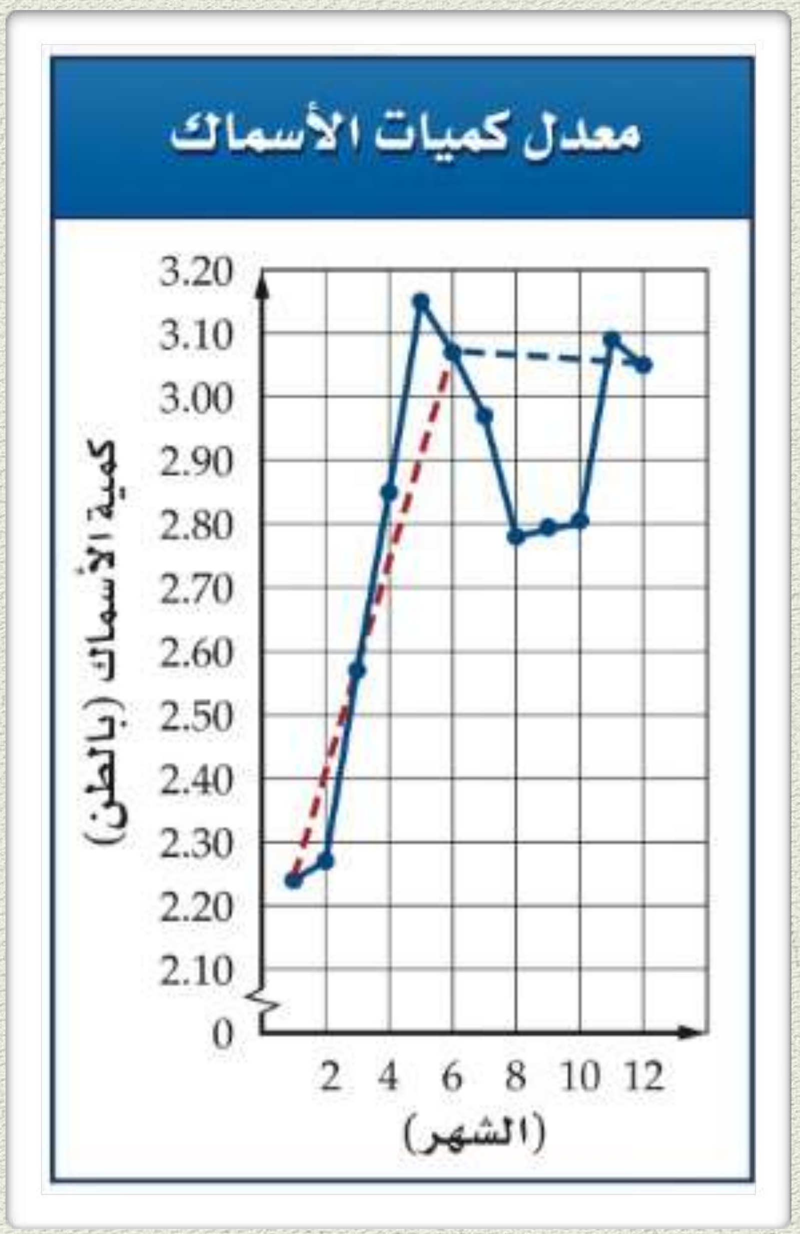
الثابتة
constant

النقطة الحرجة
critical point

العظمى
maximum

لماذا

يبيِّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

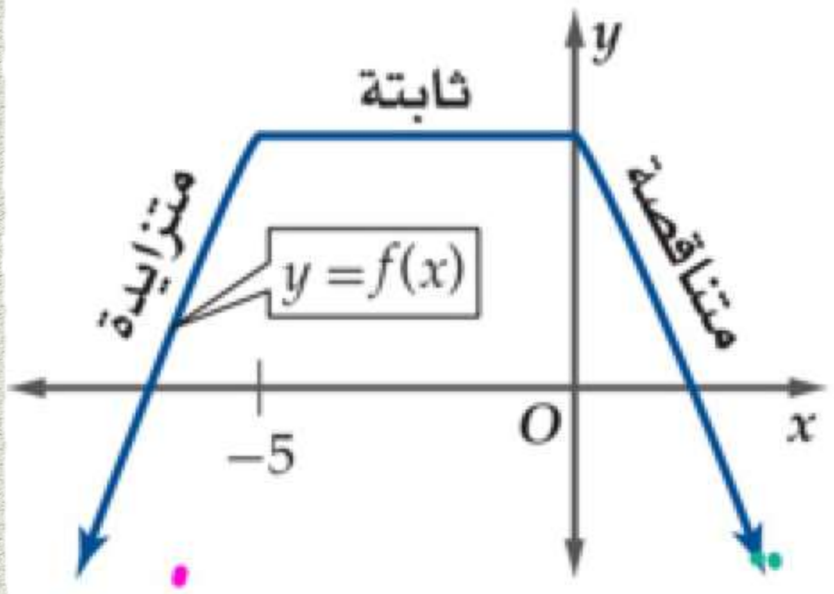


يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:



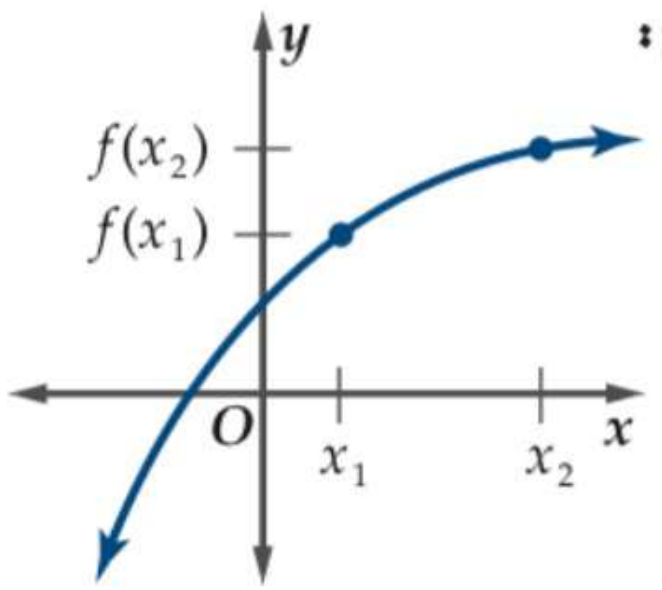
- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

مفهوم أساسي   الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f **متزايدة** على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

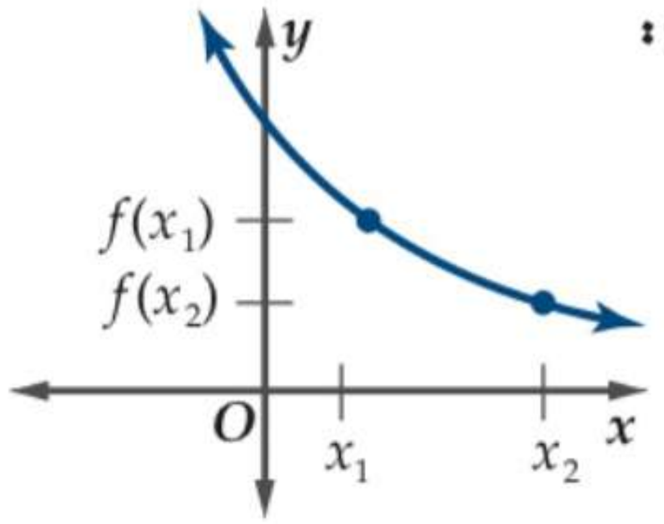
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f **متناقصة** على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

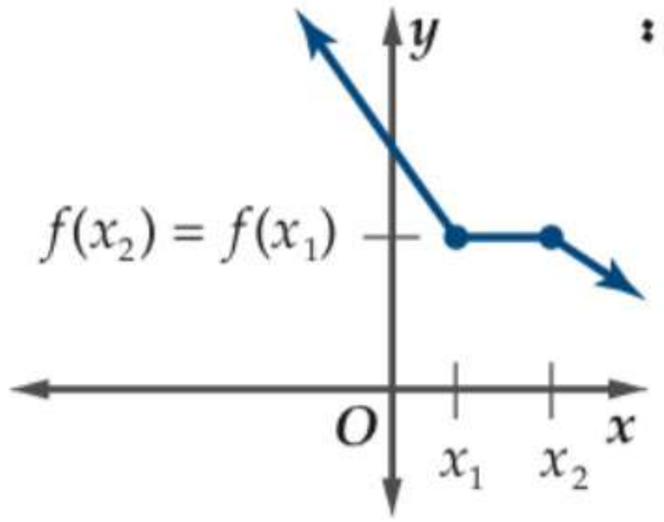
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f **ثابتة** على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



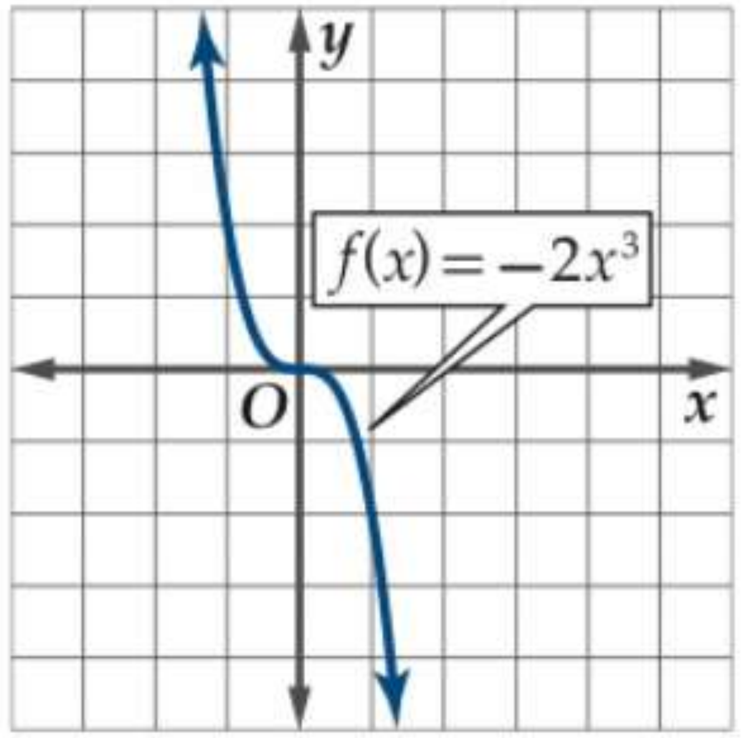
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال١ تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًا.

a) $f(x) = -2x^3$



التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x ؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	−16	−128	−432	−1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x ، تتناقص قيم $f(x)$ ؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

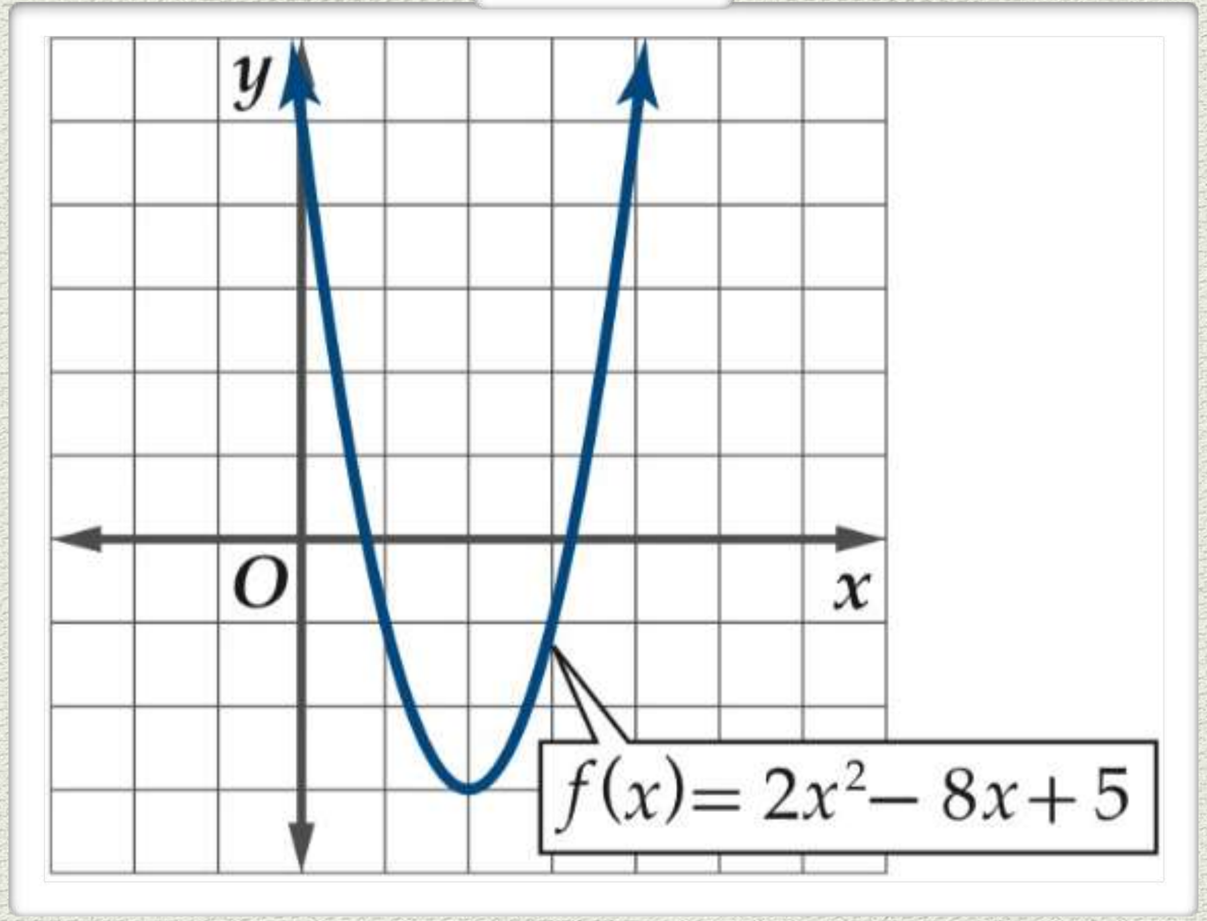
تنبيه!

فترات:
لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (,) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

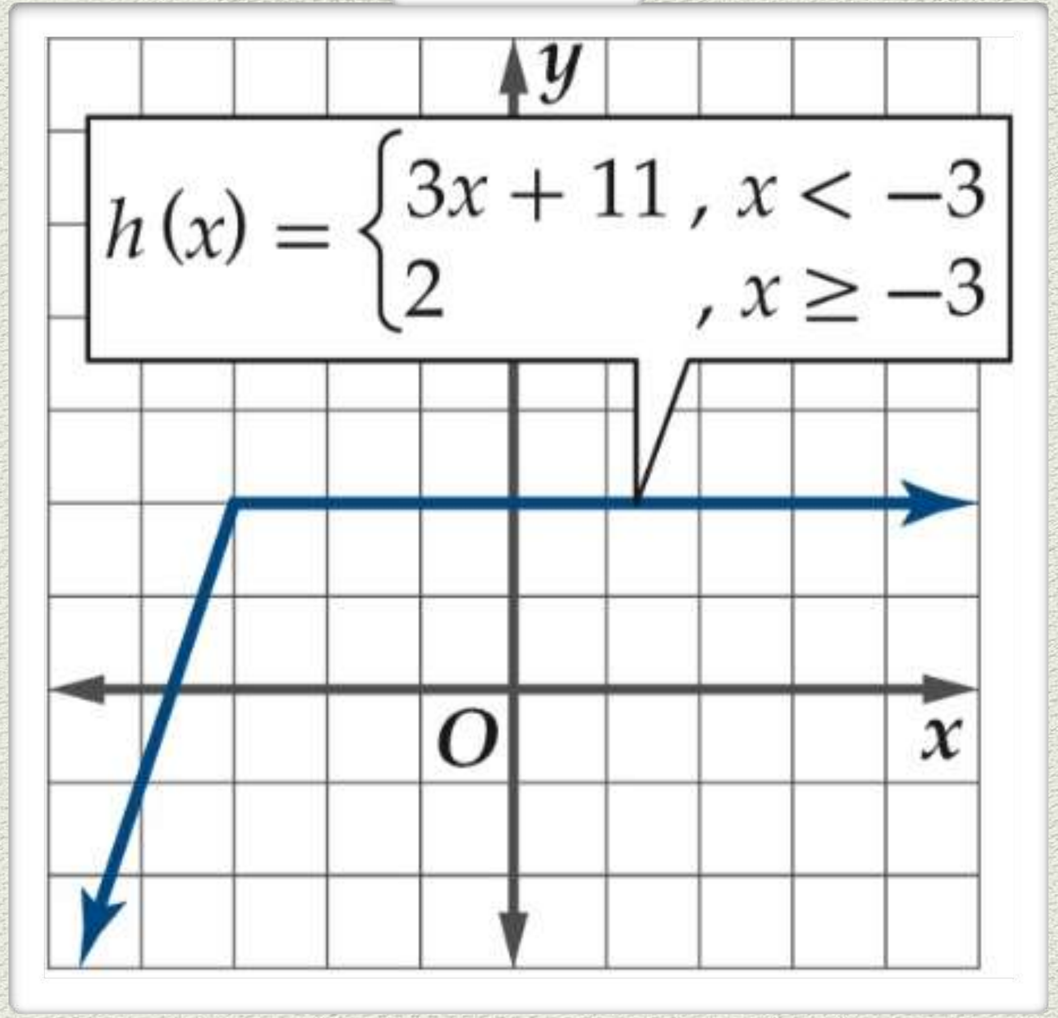
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

(1A

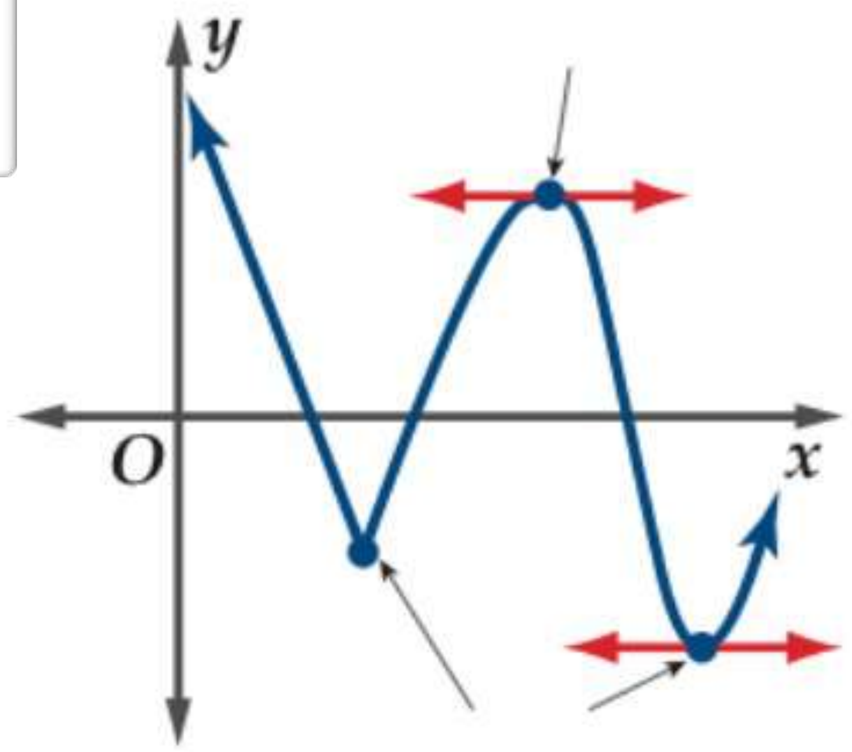


(1B



إرشادات للدراسة

القيم القصوى:
ليس من الضروري أن توجد قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.



لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًا أو عموديًا (أي أن ميله صفر أو غيرمعرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

موضوع الدرس : القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

التاريخ :   /   / ١٤٤٣

مفهوم أساسي: القيم القصوى المحلية والمطلقة

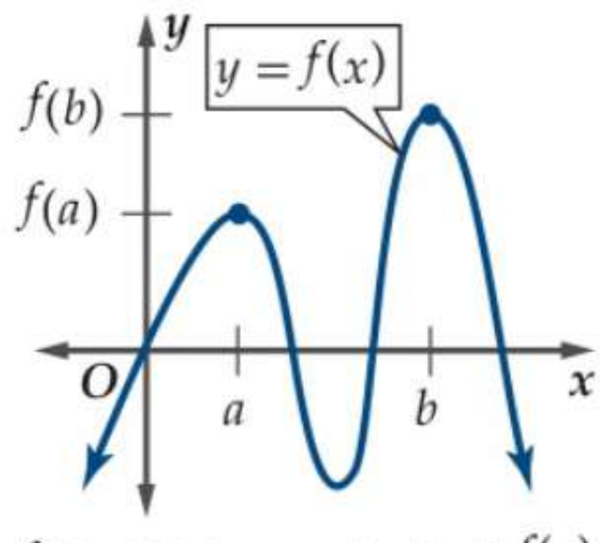
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمِّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

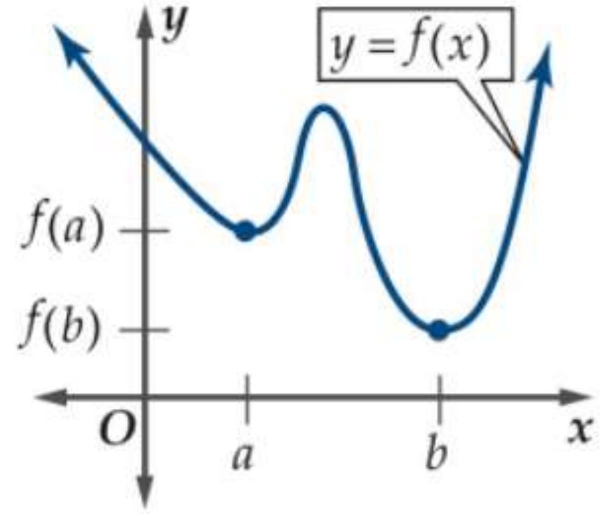
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمِّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمةً صغرى مطلقةً.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

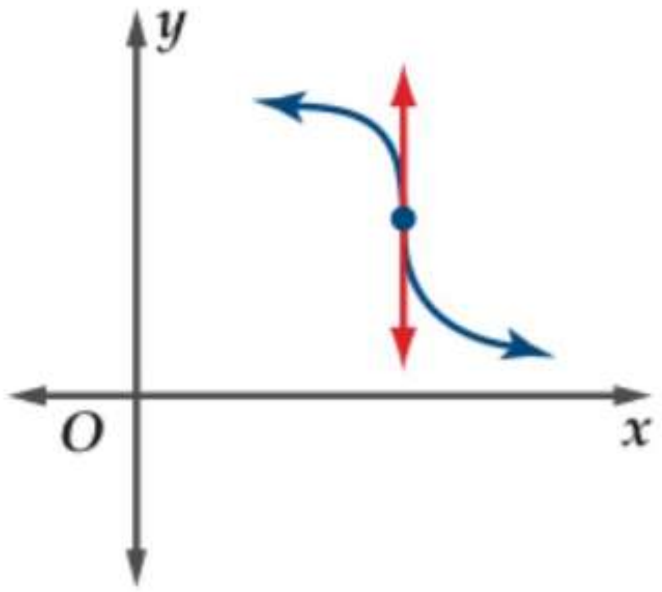
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

إرشادات للدراسة

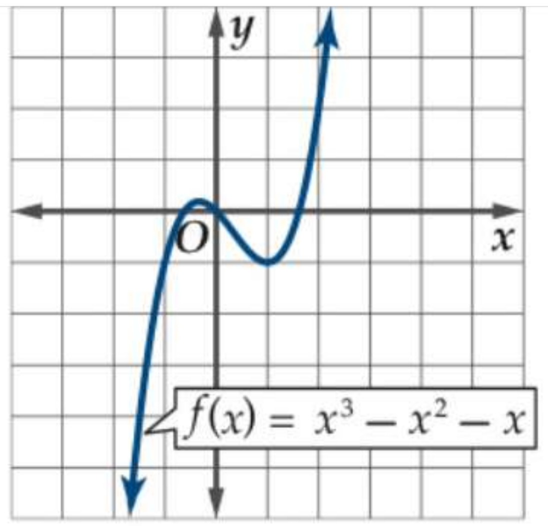
قيمة قصوى محلية : يُستعملُ مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى: إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة الحرجة غير معرف كما في الشكل أدناه؛ فإنه لا توجد للدالة عند هذه النقطة قيمة عظمى أو صغرى.



مثال ٢ تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا :

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًّا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1 . لاحظ كذلك أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًّا :

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

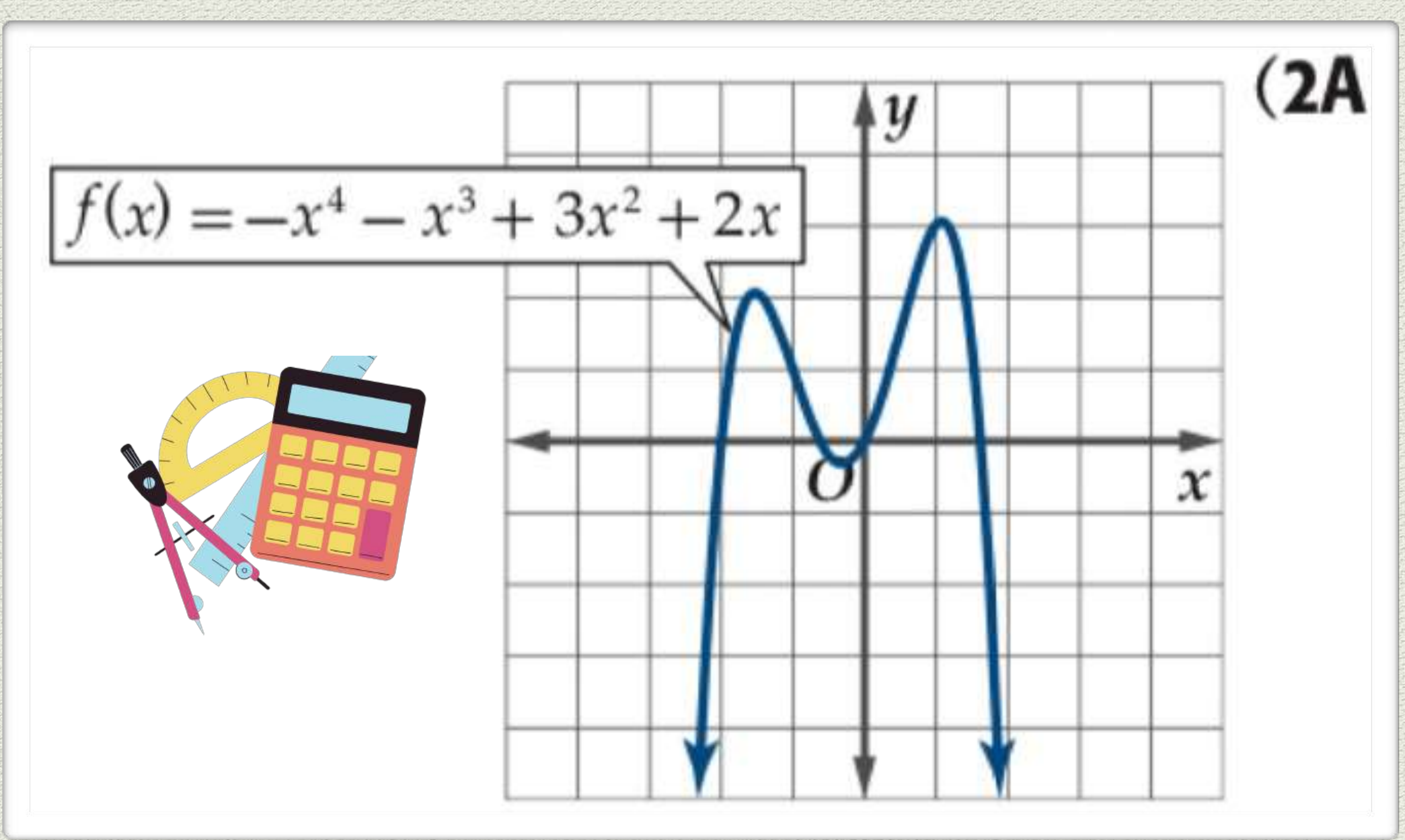
x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

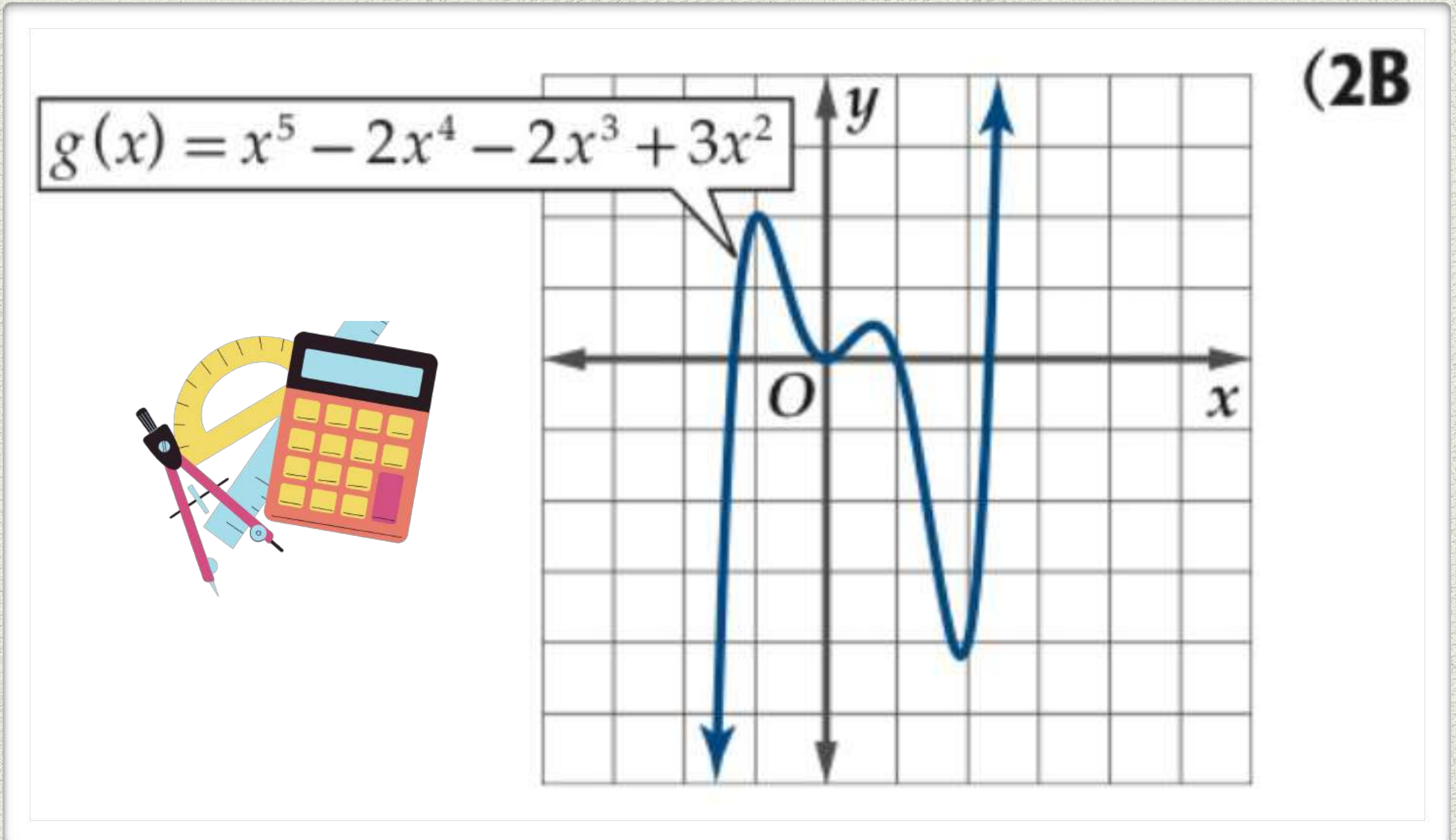
بما أن $f(-1) < f(-0.5)$ و $f(0) < f(-0.5)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(1.5)$, $f(1) < f(0.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولًا.

وبما أن $f(1) < f(-100)$, $f(-0.5) < f(100)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

تحقق من فهمك





مثال ٤
من واقع الحياة

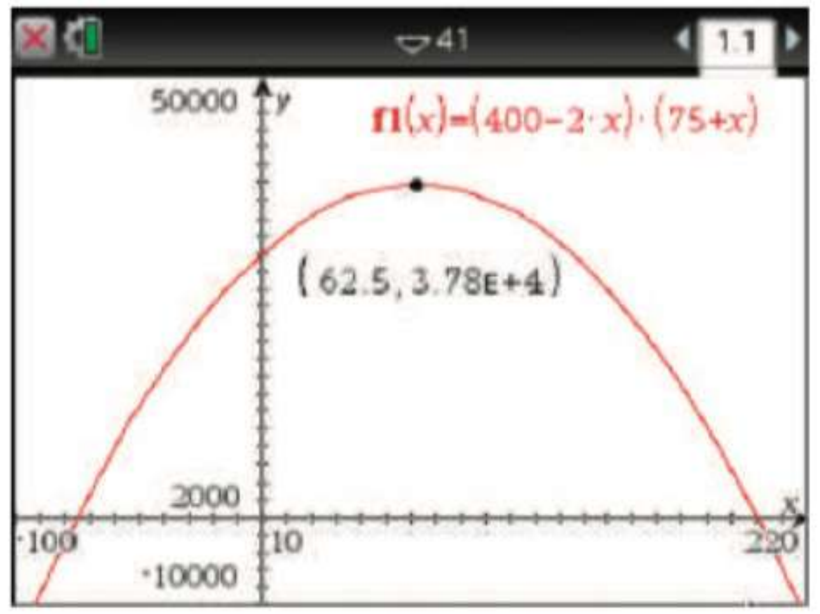
تطبيقات القيم القصوى

زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان	=	عدد الأشجار في البستان	×	إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال
$f(x)$	=	$(75 + x)$	×	$(400 - 2x)$

المطلوب هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$.
لذا مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح menu،
ثم 6: تحليل الرسم البياني، واختر منها 3: القيمة العظمى، ثم مرّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة العظمى، تقدر بـ 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$.



لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

الربط مع الحياة

تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

4) **صناعة :** يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

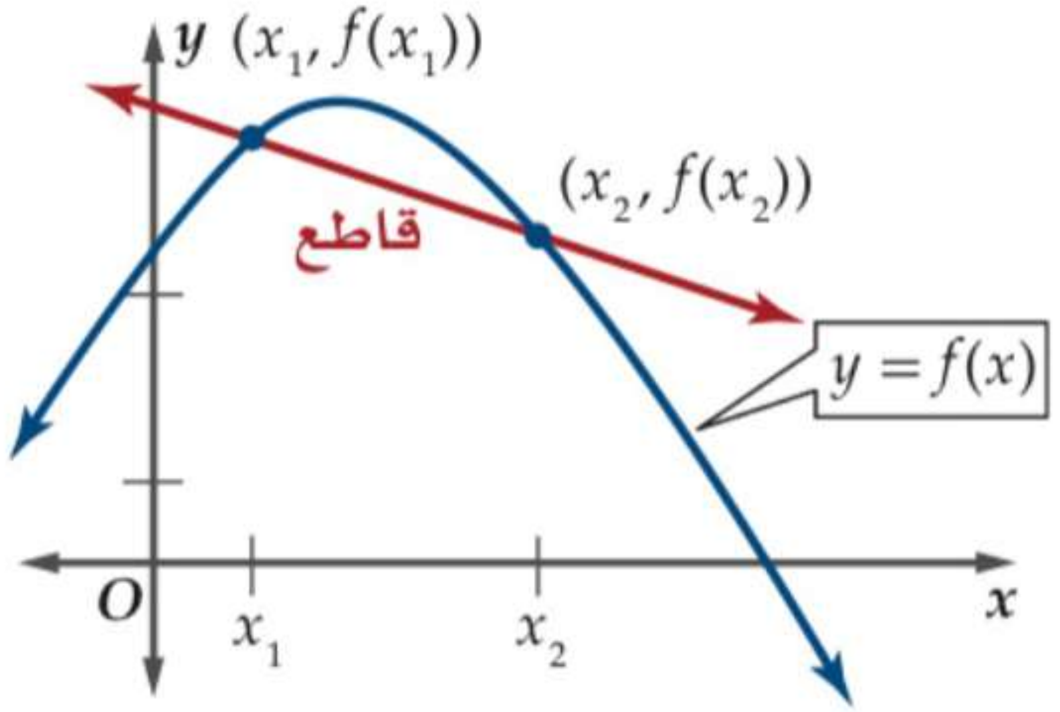
مفهوم أساسي — متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



مثال ٥ ايجاد معدل متوسط التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ عوّض -1 مكان x_2 ، -2 مكان x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ عوّض $f(-1)$ ، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$ بسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4 .

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ عوّض 1 مكان x_2 ، 0 مكان x_1

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$ عوّض $f(1)$ ، $f(0)$ وبسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال٦
من واقع الحياة

ايجاد السرعة المتوسطة

الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمّى السرعة الحديّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديّة (120-150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{d(2)-d(0)}{2-0}$$ عوّض 2 مكان t_2، 0 مكان t_1

$$= \frac{64-0}{2} = 32$$ عوّض $d(2)$، $d(0)$، وبسّط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

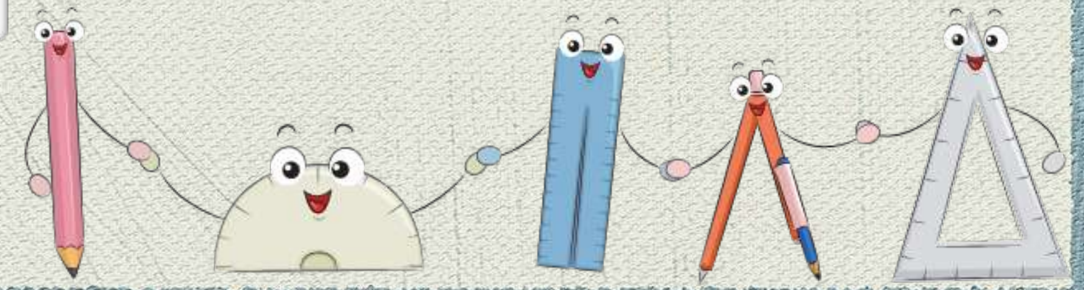
$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{d(4)-d(2)}{4-2}$$ عوّض 4 مكان t_2، 2 مكان t_1

$$= \frac{256-64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوّض $d(4)$، $d(2)$، وبسّط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

تنبيه!

السرعة المتوسطة: يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة: فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).



تحقق من فهمك

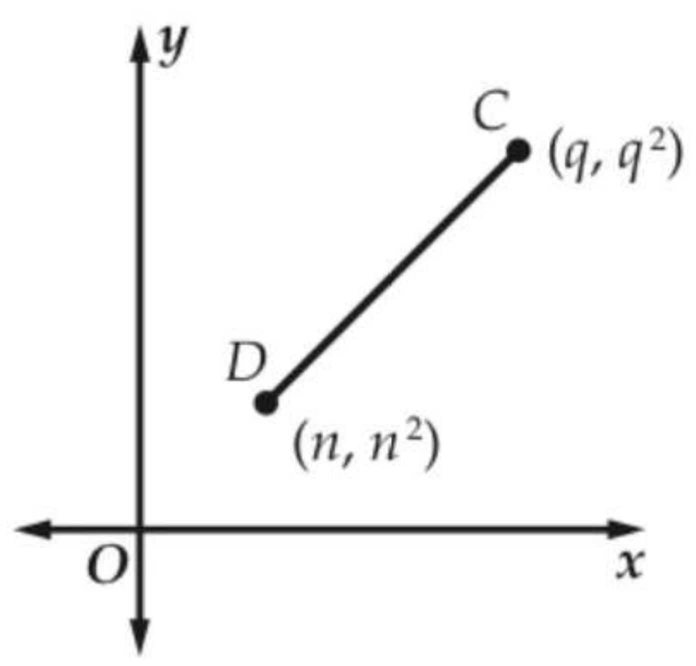
6) **فيزياء:** قَذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **اكتب:** صف متوسط معدل تغير الدالة إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة في فترة معينة.

تدريب على الاختبار

61) في الشكل أدناه، إذا كان $n \neq q$، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD.



A $q + n$

B $q - n$

C $\dfrac{q^2 + q}{n^2 - n}$

D $\dfrac{1}{q + n}$

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب

دليل على تفوقك وتميزك ...

بارك الله جهودك 🌹

صباح الخير ، سنكسب رهان الحياة يوماً .. ماكان جهادنا على أحلامنا عبثا..

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها. (الدرس 4–1)

والآن:

- أقومُ بتعيين الدوال الرئيسة (الأم)، وأصفها، وأمثلها بيانيًّا.
- أقومُ بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة، وأمثلها بيانيًّا.

المفردات:

الدالة الرئيسة (الأم)
parent function

الدالة الثابتة
constant function

الدالة المحايدة
identity function

الدالة التربيعية
quadratic function

الدالة التكعيبية
cubic function

دالة الجذر التربيعي
square root function

دالة المقلوب
reciprocal function

دالة القيمة المطلقة
absolute value function

الدالة الدرجية
step function

دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function

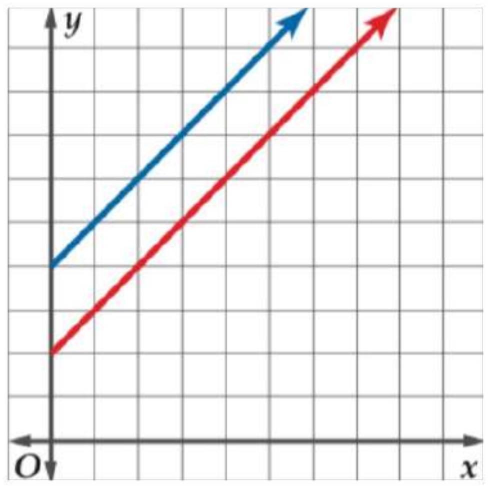
التحويل الهندسي
transformation

الإزاحة (الانسحاب)
translation

الانعكاس
reflection

التمدد
dilation

لمـــاذا:



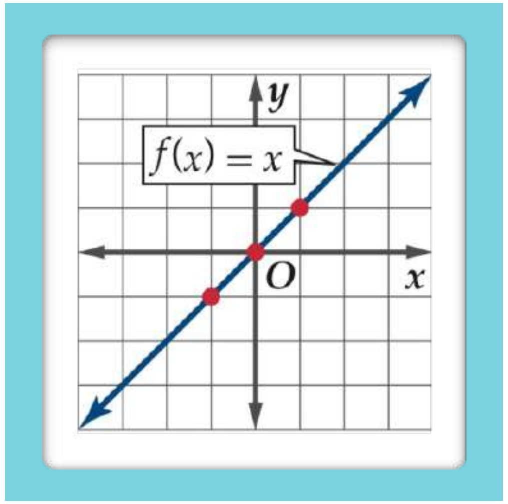
استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

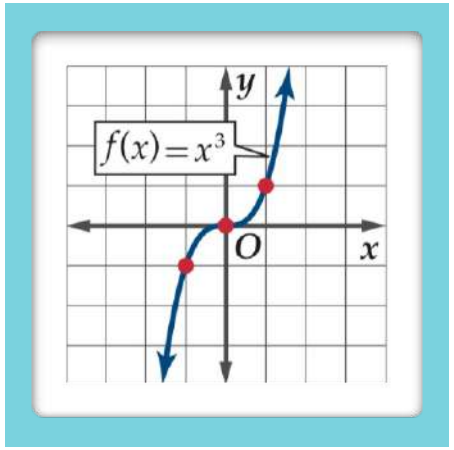
ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

مفهوم أساسي الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

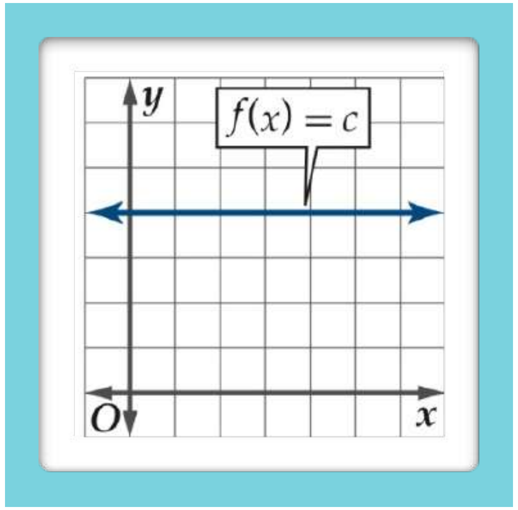
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



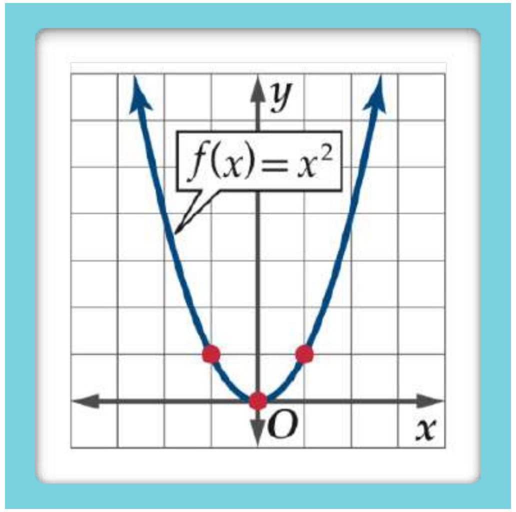
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



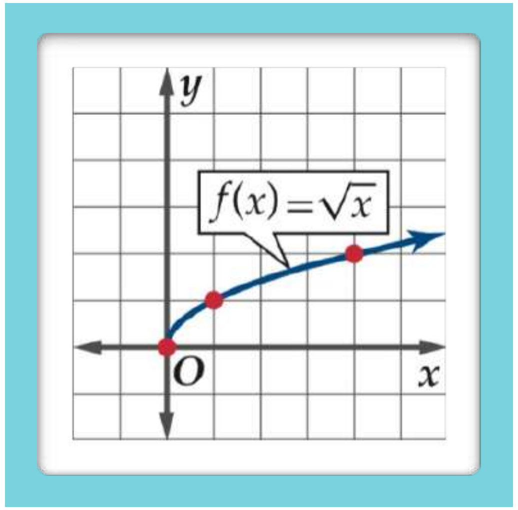
يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



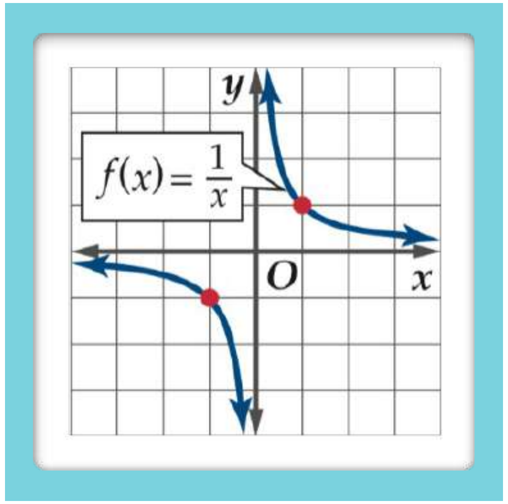
مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ x \geq 0$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\ ,\ x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

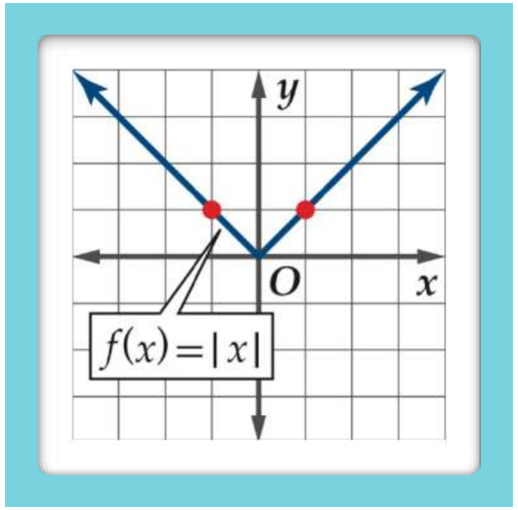


مفهوم أساسي دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \ x < 0 \\ x & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

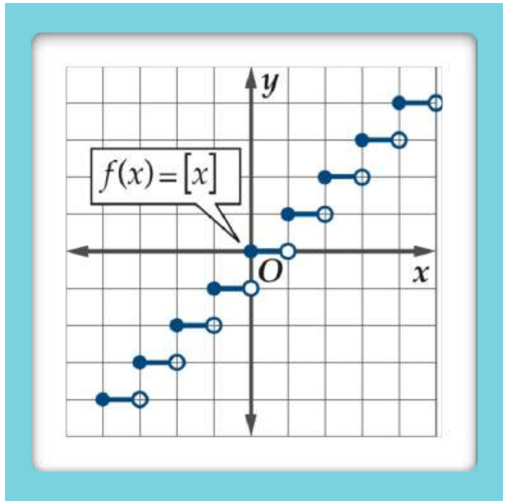
أمثلة: $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$



مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $[-4] = -4, [-1.5] = -2, \left[\frac{1}{3}\right] = 0$



مثال ١ : وصف خصائص الدالة الرئيسة(الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

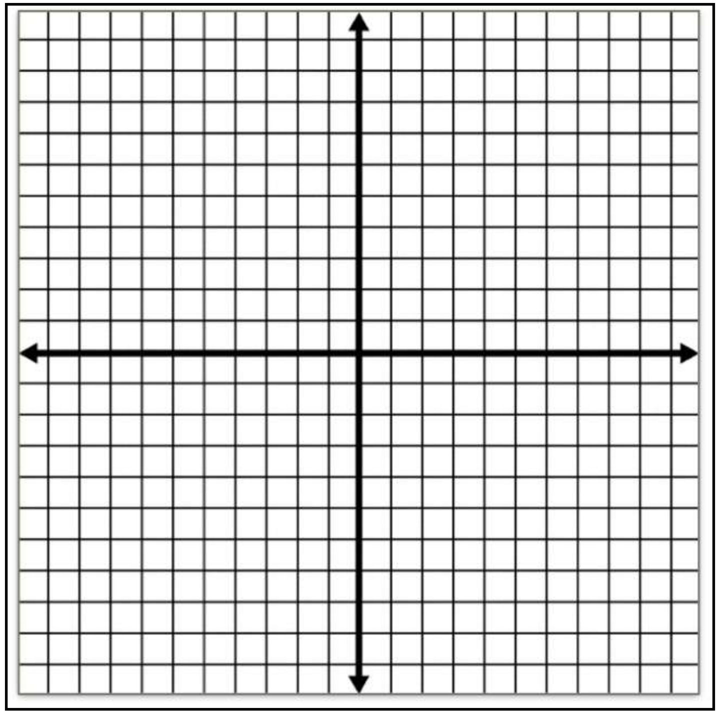
خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.

تحقق من فهمك :

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$



الحل :

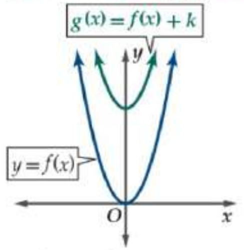
الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

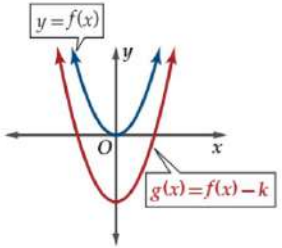
مفهوم أساسي — الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

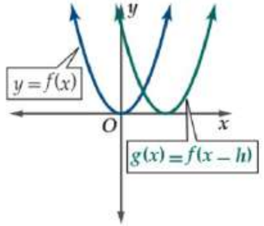


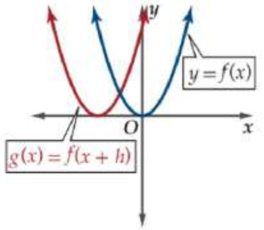


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





مثال ٢ : انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

a) $g(x) = |x| + 4$

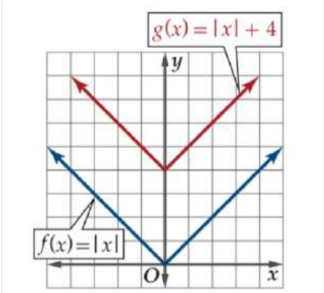
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

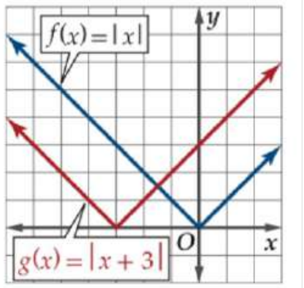
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

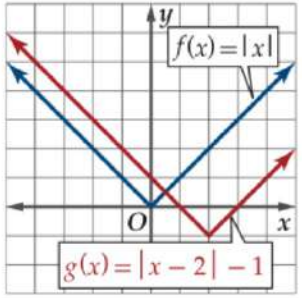
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

تحقق من فهمك :

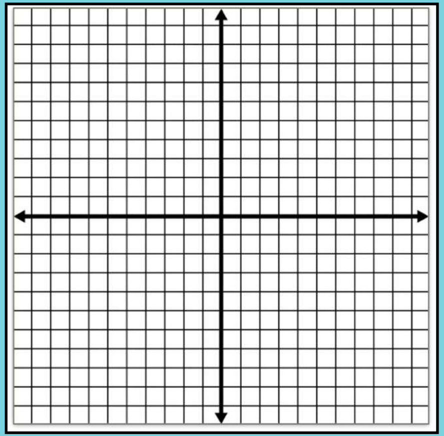
استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

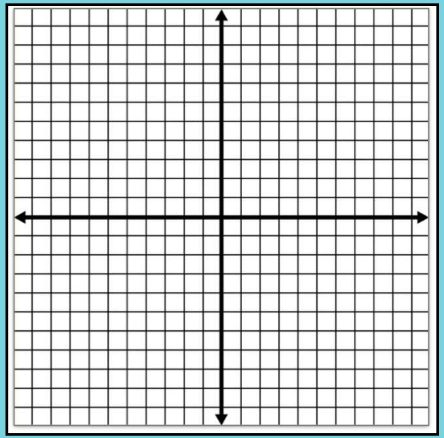
2A) $h(x) = x^3 - 5$

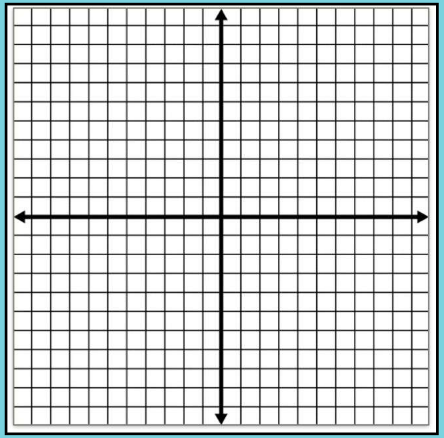
2B) $h(x) = 8 + x^3$

2C) $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

الحل :



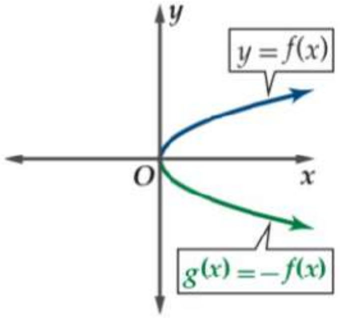




مفهوم أساسي — الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

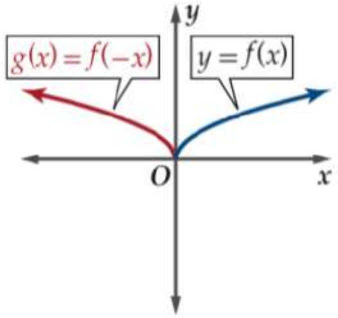
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x .

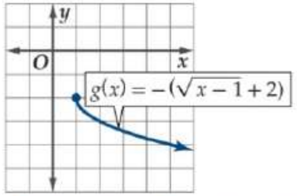


الانعكاس حول المحور y

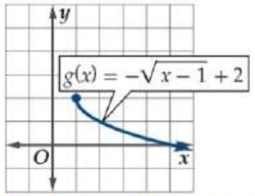
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.

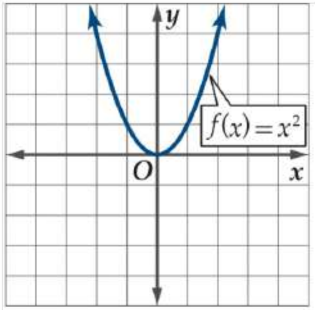


انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

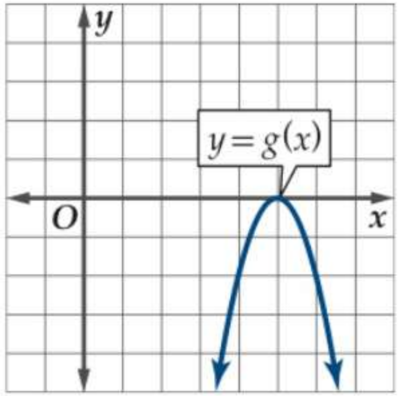
مثال ٣ : كتابة معادلات التحويل



الشكل 1.5.5

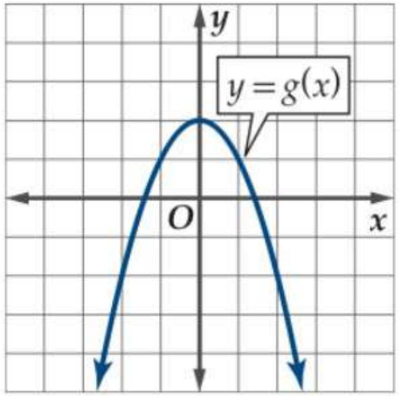
صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:

(a



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x، أي أن $g(x) = -(x-5)^2$.

(b



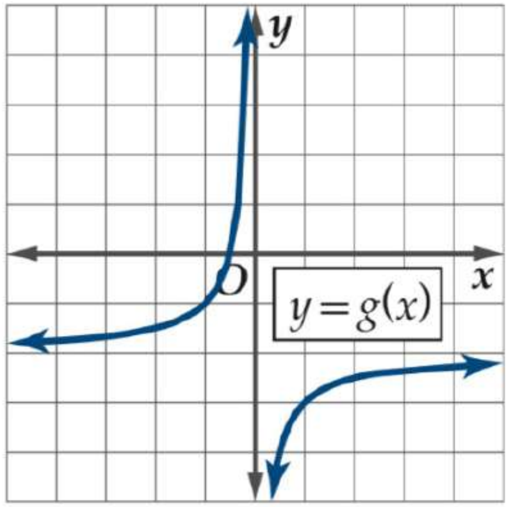
منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

الحل :

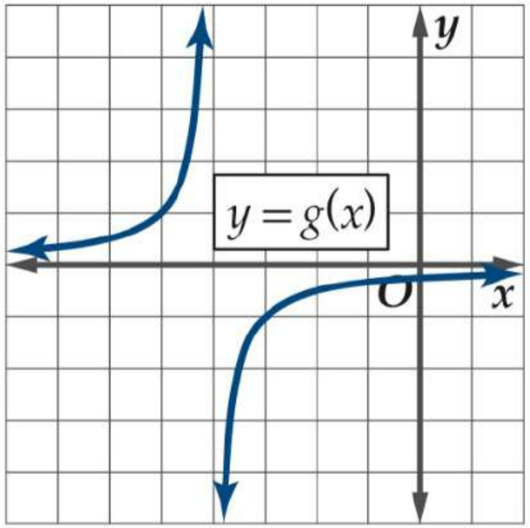
تحقق من فهمك :

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3A



(3B



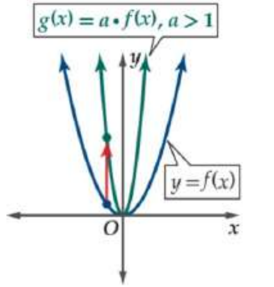
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

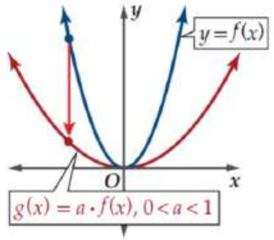
مفهوم أساسي: التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

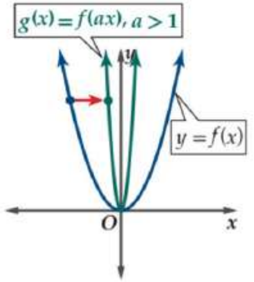


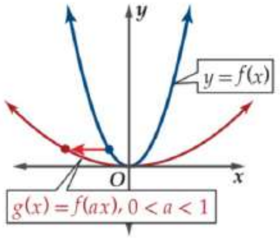


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

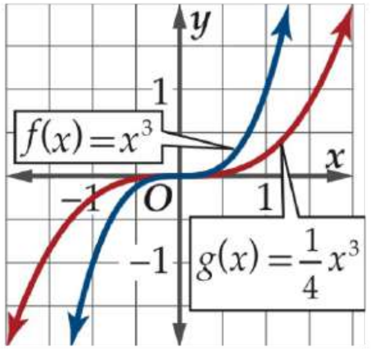




عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

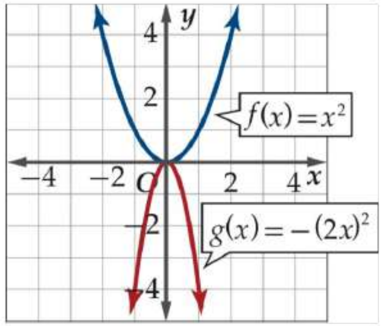
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(2x)^2$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ أولًا؛ لأن $f(x) = x^2, f(2x) = (2x)^2$ وَ $2 > 1$، ثم انعكاس حول المحور x؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$

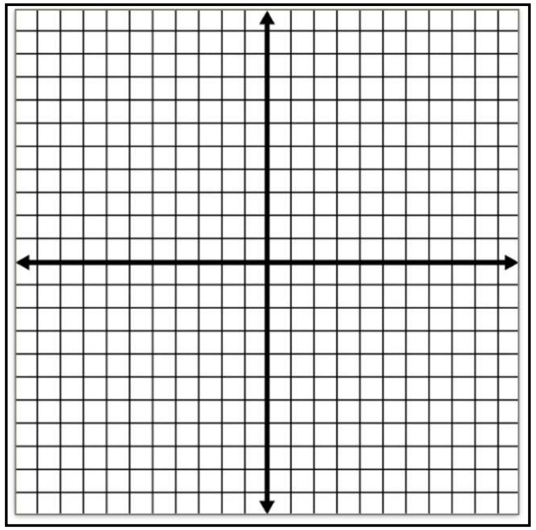


إرشادات للدراسة

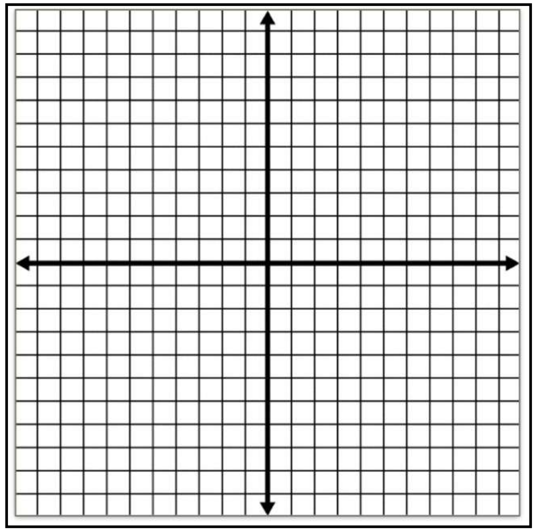
التمدد:
يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبِّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

تحقق من فهمك :

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$



4B) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$



الحل :

مثال ٥ : تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانياً

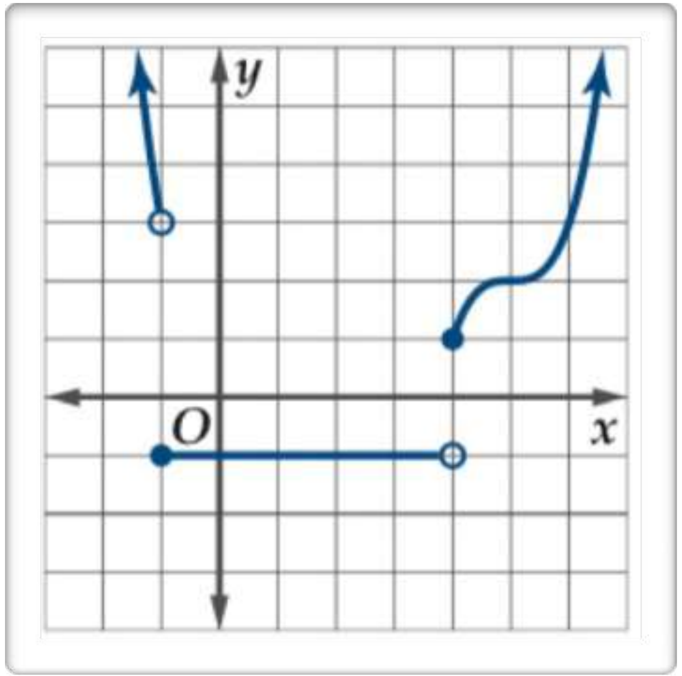
مثّل الدالة بيانيًّا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$.

في الفترة $(-\infty, -1)$، أمثّل الدالة $y = 3x^2$.

في الفترة $[-1, 4)$، أمثّل الدالة الثابتة $y = -1$.

في الفترة $[4, \infty)$ أمثّل الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطة عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.

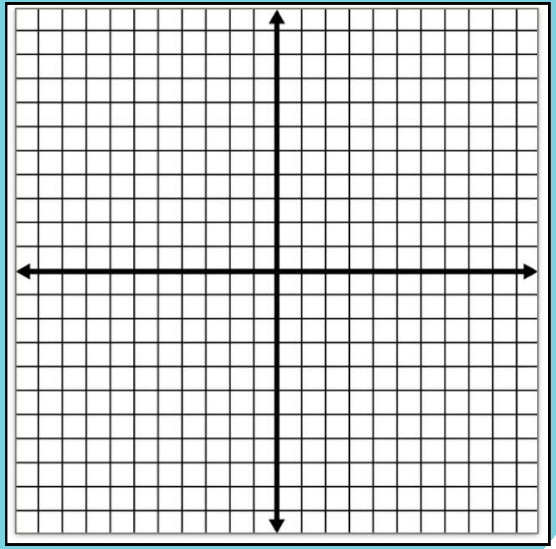


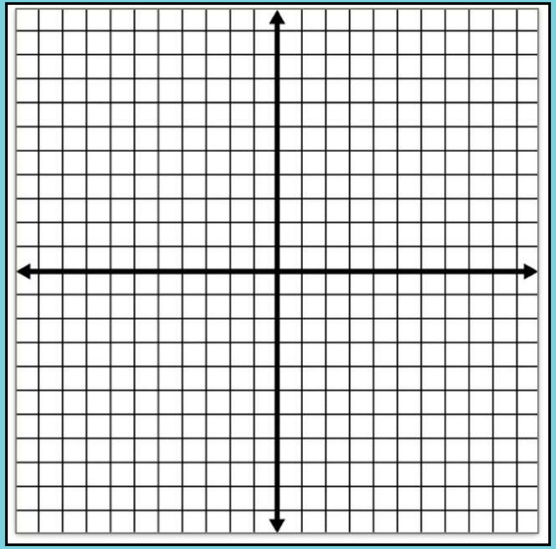
تحقق من فهمك :

5A) $g(x)=\begin{cases} x-5 & , \quad x\le 0 \\ x^3 & , \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x>2 \end{cases}$

5B) $h(x)=\begin{cases} (x+6)^2 & , \quad x<-5 \\ 7 & , \quad -5\le x\le 2 \\ |4-x| & , \quad x>2 \end{cases}$

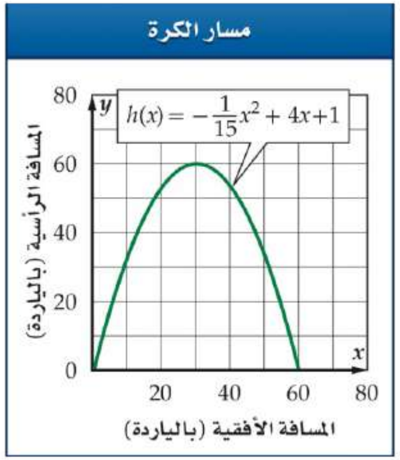
الحل :





مثال ٦ من واقع الحياة : التحويلات الهندسية على الدوال

حرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x-h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

$h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$	الدالة الأصلية
$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$	حلّل $-\frac{1}{15}x^2 + 4x$
$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$	أكمل المربع
$= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61$	اكتب $x^2 - 60x + 900$ على صورة مربع كامل ثم بسّط

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

تحقق من فهمك :

6) **كهرباء :** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

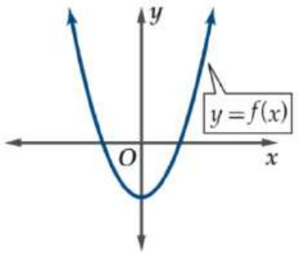
الحل :

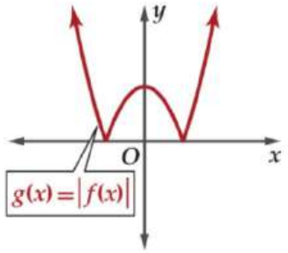
تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

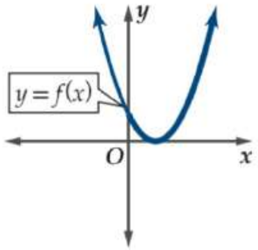
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

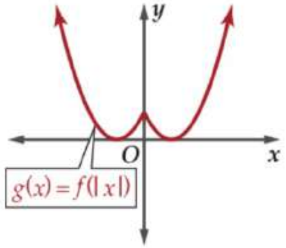




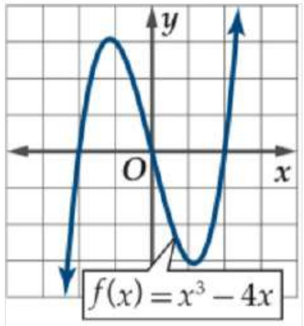
$g(x) = f(|x|)$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





مثال ٧ : وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

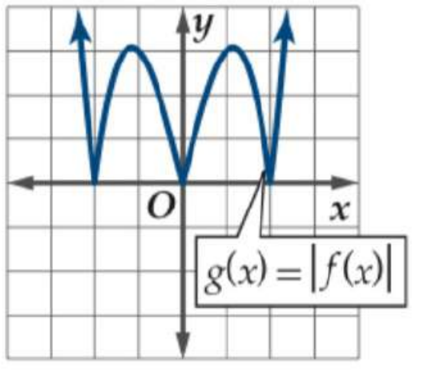


الشكل 1.5.6

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

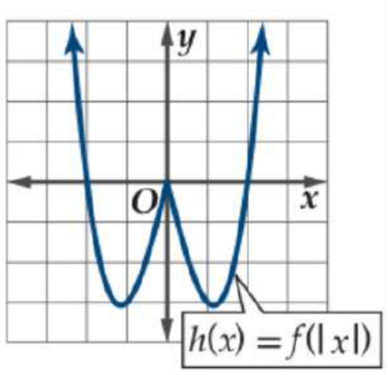
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

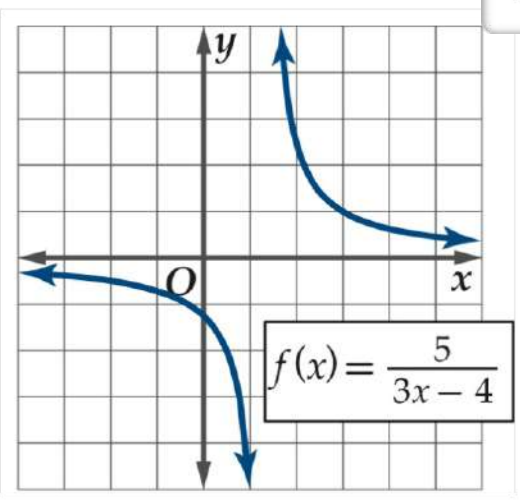
ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



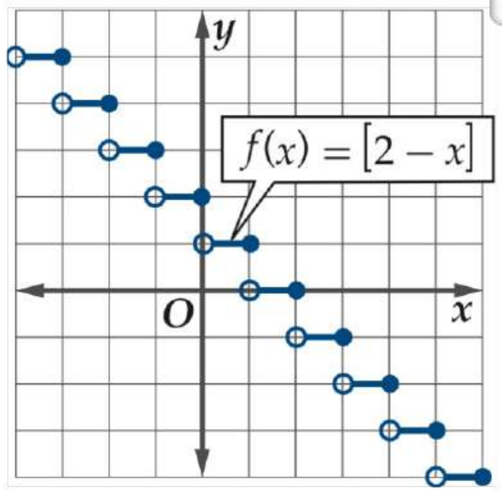
تحقق من فهمك :

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

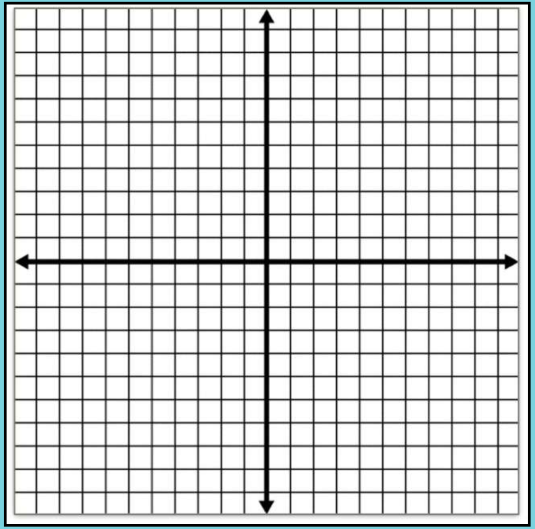
7A)

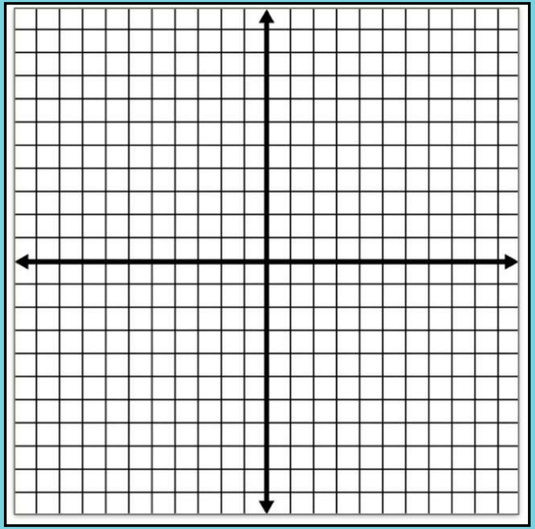


7B)



الحل :





إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مسائل مهارات التفكير العليا

51) **تبرير:** إذا كانت $f(x)$ دالة فردية وكانت $g(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x و $h(x)$ انعكاسًا للدالة $g(x)$ حول المحور y، فما العلاقة بين $h(x)$, $f(x)$؟ برِّر إجابتك.

55) **تبرير:** وضِّح الفرق بين التوسع الرأسي بمعامل مقداره 4، والتوسع الأفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$. ما النتيجة النهائية بعد إجراء كلٍّ من التحويلين الهندسيين على الدالة نفسها؟

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب دليل

على تفوقك وتميزك ...

بارك الله جهودك

عوّد ودرب عقلك بأن يرى الجانب الإيجابي في كُل موقف ..

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

موضوع الدرس : العمليات على الدوال وتركيب دالتين

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال.
(الدرس 1–1)

والآن:

- أُجري العمليات على الدوال.
- أجِدُ تركيب الدوال.

المفردات:

تركيب الدالتين

لماذا:

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

العمليات على الدوال: ستتعلمُ في هذا الدرس إجراءَ العمليات الأربع على الدوال.

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

الضرب: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

القسمة: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مثال ١: العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x,\ g(x) = \sqrt{x+2},\ h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

a) $(f + g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2 + 4x) + \left(\sqrt{x+2}\right)$$
$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f, g، وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f - h)(x)$

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (x^2 + 4x) - (3x - 5)$$
$$= x^2 + 4x - 3x + 5$$
$$= x^2 + x + 5$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$،
لذا فإن مجال $(f - h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c) $(f \cdot h)(x)$

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$$
$$= (x^2 + 4x)(3x - 5)$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x$$
$$= 3x^3 + 7x^2 - 20x$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛
لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$
ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq -4, x \in R\}$.

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A) $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B) $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

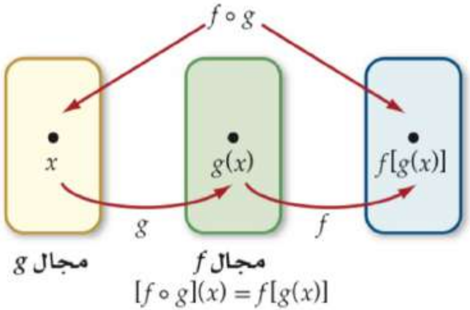
تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

مفهوم أساسي تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين: يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

تقرأ الدالة $g \circ f$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيث تُطبَّق الدالة g أولًا ثم الدالة f.

مثال ٢: تركيب دالتين

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x-4)$ $g(x) = x - 4$

$= (x-4)^2 + 1$ عوّض $(x-4)$ بدلًا من x في $f(x)$

$= x^2 - 8x + 16 + 1$ بسّط

$= x^2 - 8x + 17$

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ تعريف $g \circ f$

$= g(x^2 + 1)$ $f(x) = x^2 + 1$

$= (x^2 + 1) - 4$ عوّض (x^2+1) بدلًا من x في $g(x)$

$= x^2 - 3$ بسّط

c) $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع **a** عندما $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ عوّض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$ ، $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

بما أن مجال كل من g ،f في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين:

من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

مثال ٣: ايجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x^2 - 9)$	$g(x) = x^2 - 9$
$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$	عوّض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

مثال ٣: ايجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x^2 - 9)$	$g(x) = x^2 - 9$
$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$	عوّض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين:
من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \sqrt{x+1}\,, g(x) = x^2 - 1$

3B) $f(x) = \frac{5}{x}\,, g(x) = x^2 + x$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٤: كتابة الدالة كتركيب دالتين

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x+5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x + 5$، وعندئذٍ:

$$h(x) = 2(x+5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

b) $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

لاحظ أن الدالة h يمكن أن تكتب كتركيب دالتين f, g حيث يمكن اختيار $g(x) = -7x$، وكتابة: $h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9}{7}(-7x)$، وعندئذ: $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{7}x$

$$h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9}{7}(-7x) = \sqrt{g(x)} - \frac{9}{7}(g(x)) = f(g(x)) = [f \circ g](x)$$

إرشادات للدراسة

كتابة الدالة كتركيب دالتين:

في المثال $4a$، يمكنك إيجاد دالتين أخريين غير $g(h) = x + 5$, $f(x) = 2x^2$ بحيث إن: $h(x) = [f \circ g](x)$، وكذلك الأمر بالنسبة للفرع 4b

تحقق من فهمك

4A) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

4B) $h(x) = \dfrac{1}{x + 7}$

مثال ٥ من واقع الحياة : على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية : تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$.
أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L\,(L + 40) = L^2 + 40L$، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$	تعريف $A \circ L$
$= A(20 + 15t)$	$L(t) = 20 + 15t$
$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$	عوِّض $(20 + 15t)$ بدلًا من L في $A(L)$
$= 225t^2 + 1200t + 1200$	بسِّط

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن.

تحقق من فهمك

5) **أعمال:** أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كانت الدالة $(f \circ g)(x)$ زوجية، أم فردية أم غير ذلك.

65) f, g دالتان فرديتان.

66) f, g دالتان زوجيتان.

67) f زوجية، g فردية.

68) f فردية، g زوجية.

73) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرِّر إجابتك.

"إذا كانت f دالة جذر تربيعي و g دالة تربيعية ، فإن $f \circ g$ هي دائمًا دالة خطية".

العلاقات والدوال العكسية

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

فيما سبق:

درستُ إيجاد تركيب دالتين.
(الدرس 6–1)

والآن:

- أستعملُ اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.
- أجِدُ الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا.

المفردات:

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

الدالة المتباينة
one-to-one function

لماذا:

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

اليوم الوطني السعودي ٩١

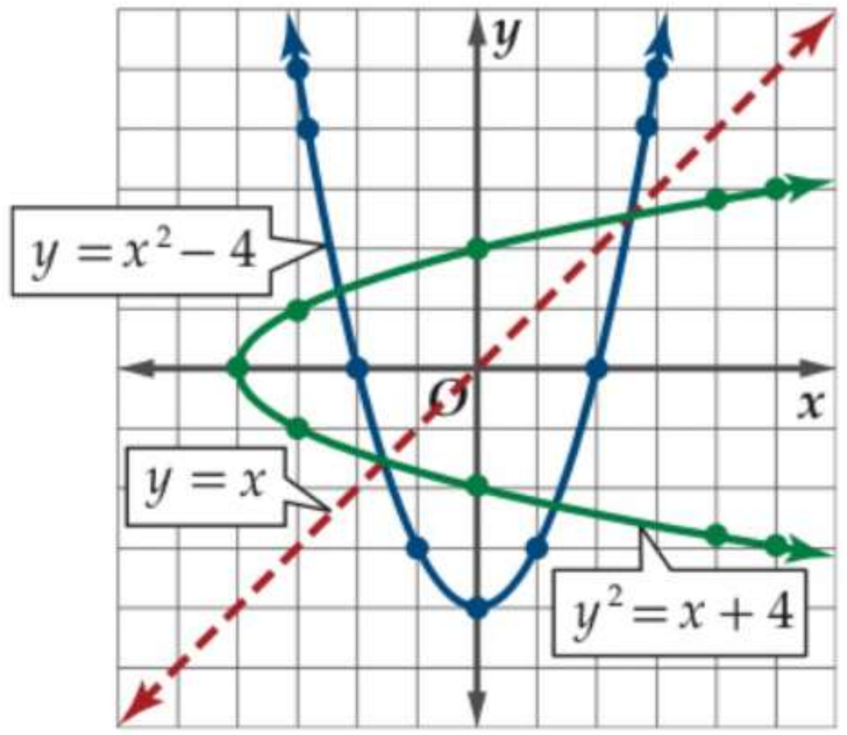
موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

الدالة العكسية : العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلًّا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالَّ. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لـ f، ويرمز لها بالرمز f^{-1}.

لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

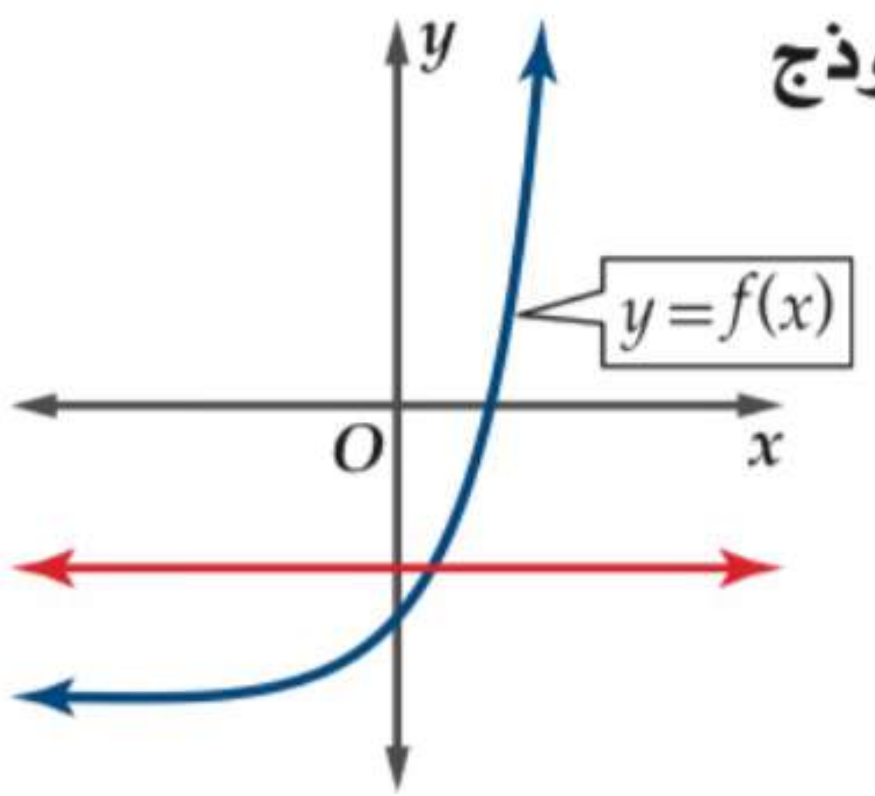
يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

مفهوم أساسي — اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج



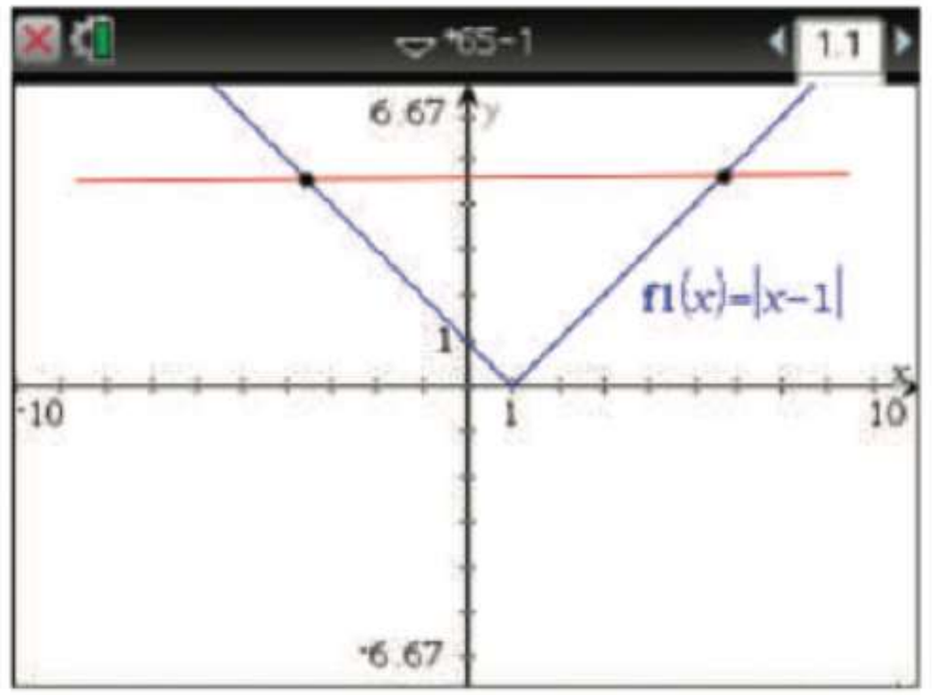
قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية: يجب ألّا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

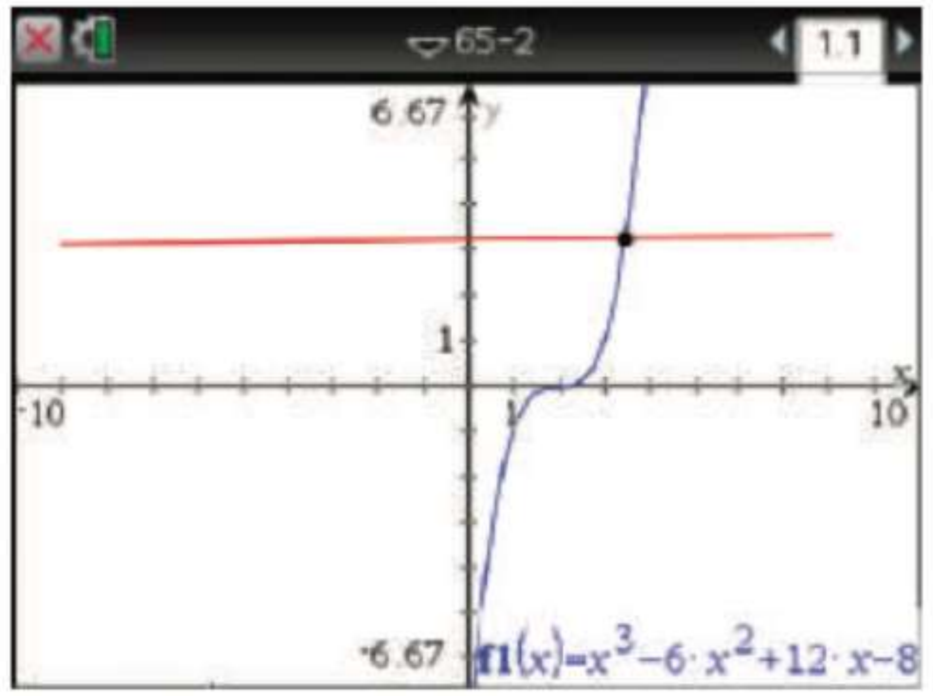
مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

a) $f(x) = |x - 1|$



يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.

تنبيه!

اختبار الخط الأفقي
عند استعمال الحاسبة البيانية، اختبر بدقة المواقع التي يفشل فيها اختبار الخط الأفقي باستعمال
4: تكبير/تصغير النافذة
واختر منها
3: تكبير
أو 4: تصغير
أو اضبط الشاشة للتأكد.

تحقق من فهمك

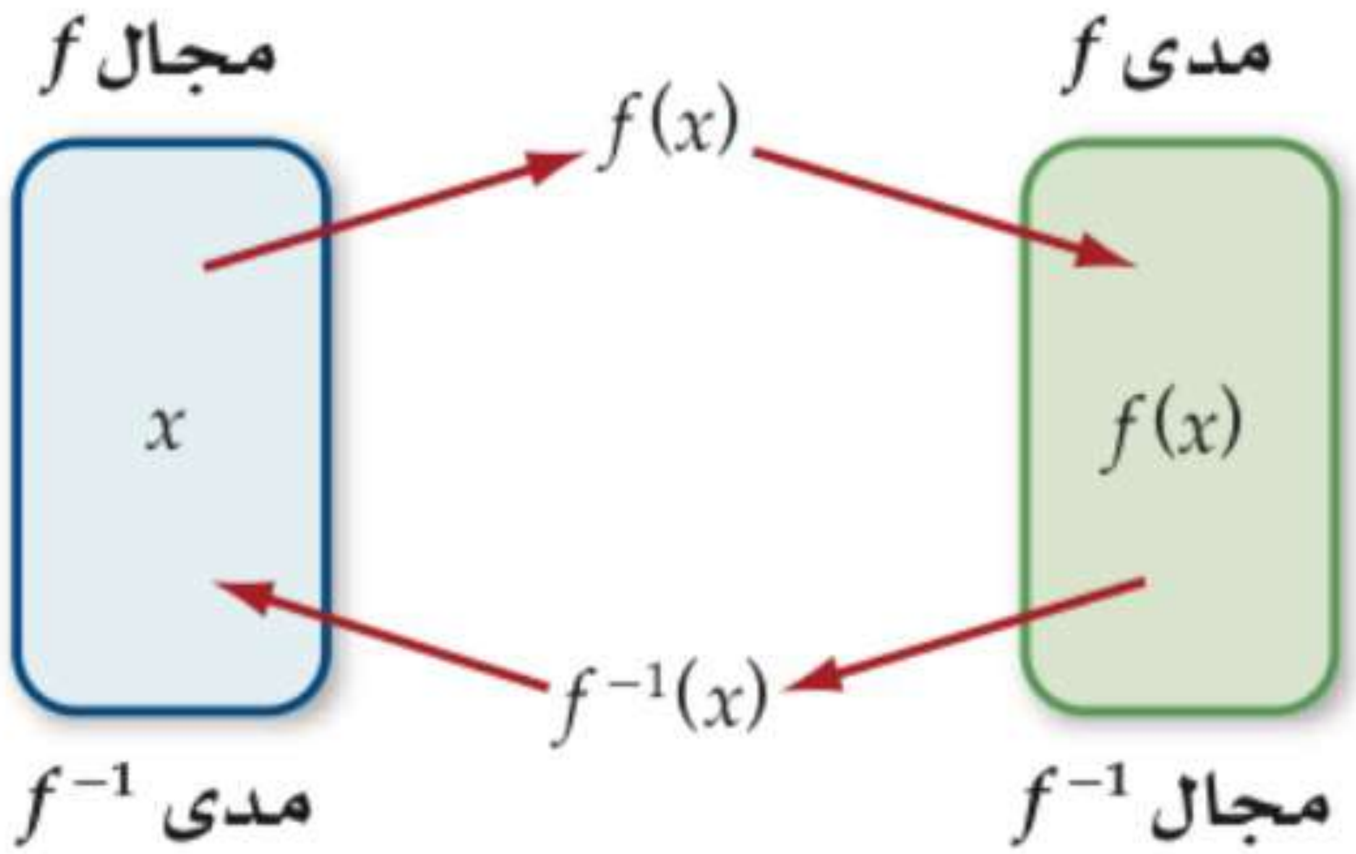
1A) $h(x) = \frac{4}{x}$

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

إيجاد الدالة العكسية : إذا حققّت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y، ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي — إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y .

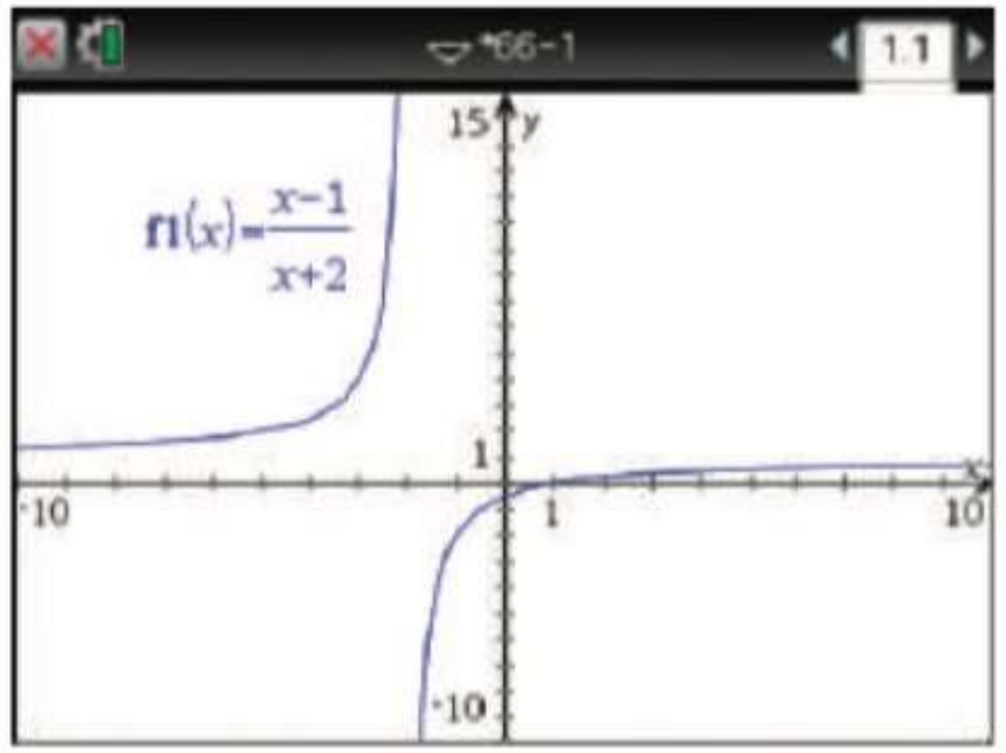
الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y ، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1} . وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1} .

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1} .

مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

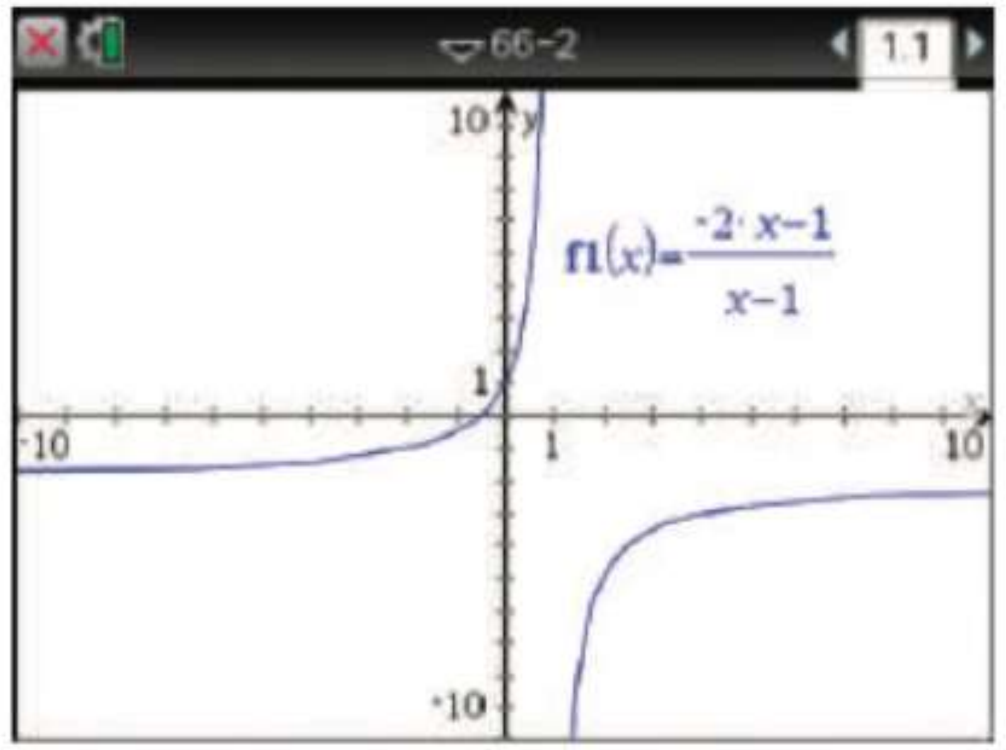
a) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$



يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

والآن أوجد f^{-1}.

$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$	الدالة الأصلية
$y = \frac{x-1}{x+2}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \frac{y-1}{y+2}$	بدّل بين x, y
$xy + 2x = y - 1$	اضرب الطرفين في $(y+2)$، ثم طبق خاصية التوزيع
$xy - y = -2x - 1$	ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد
$y(x-1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \frac{-2x-1}{x-1}$	حل بالنسبة لـ y
$f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y، لاحظ أن $x \neq 1$



قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس:
يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.

تحقق من فهمك

2A) $f(x) = -16 + x^3$

2B) $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$

2C) $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي — تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f\,[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

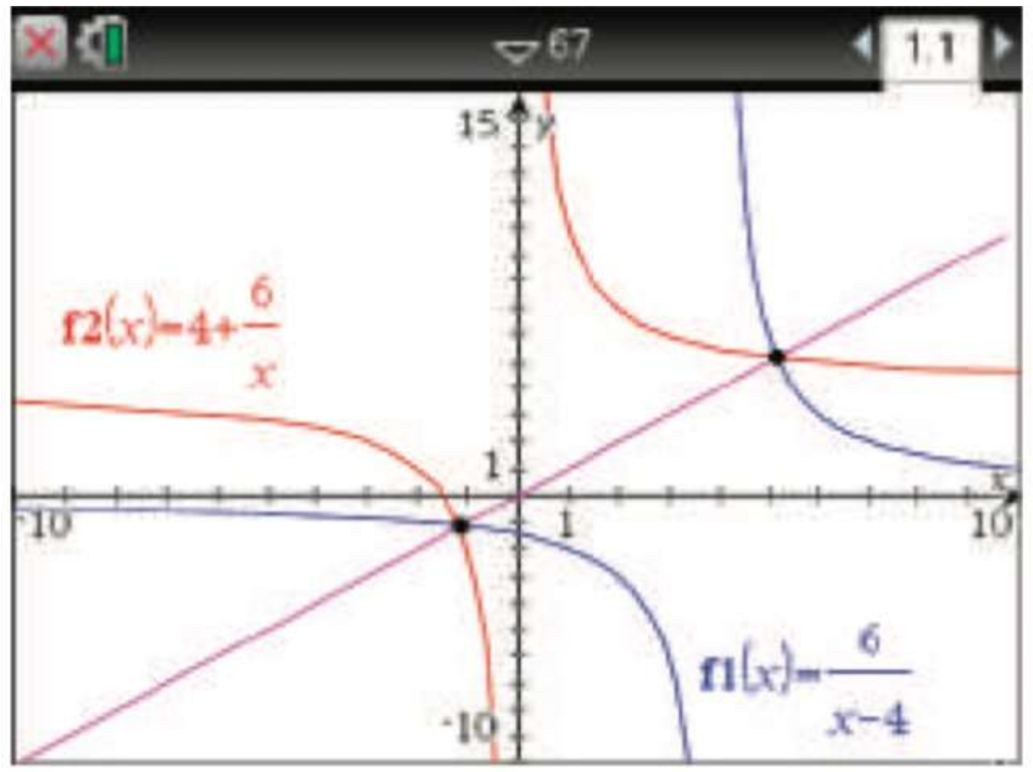
مثال 3 إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وَ $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right)$$
$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4}$$
$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right)$$
$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4$$
$$= x - 4 + 4 = x$$



بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، فإن كلًّا من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

اليوم الوطني السعودي ٩١

تحقق من فهمك

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(3A $f(x) = 18 - 3x\,,\ g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

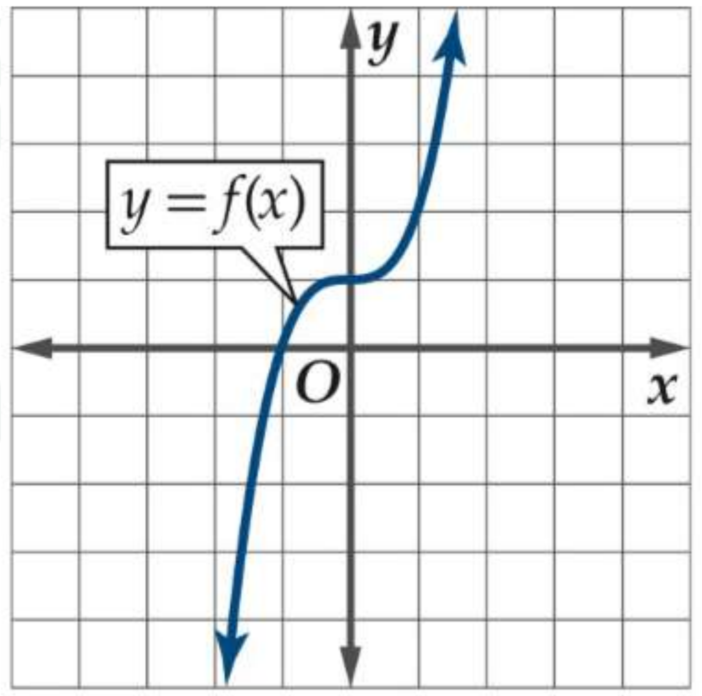
(3B $f(x) = x^2 + 10\,,\ x \geq 0\,,\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًا لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

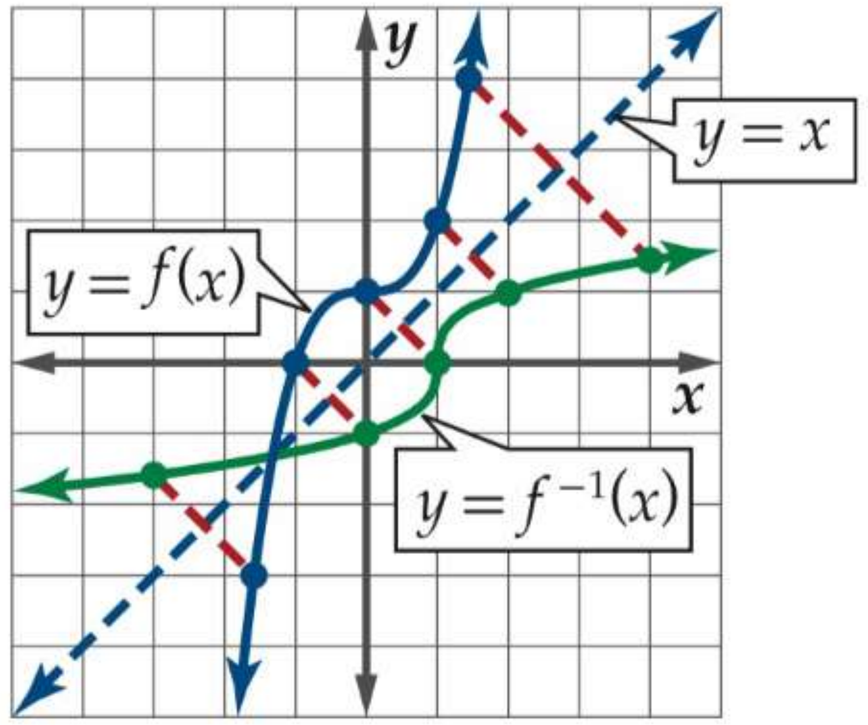
مثال 4 إيجاد الدالة العكسية بيانيًا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3



الشكل 1.7.4

إرشادات للدراسة

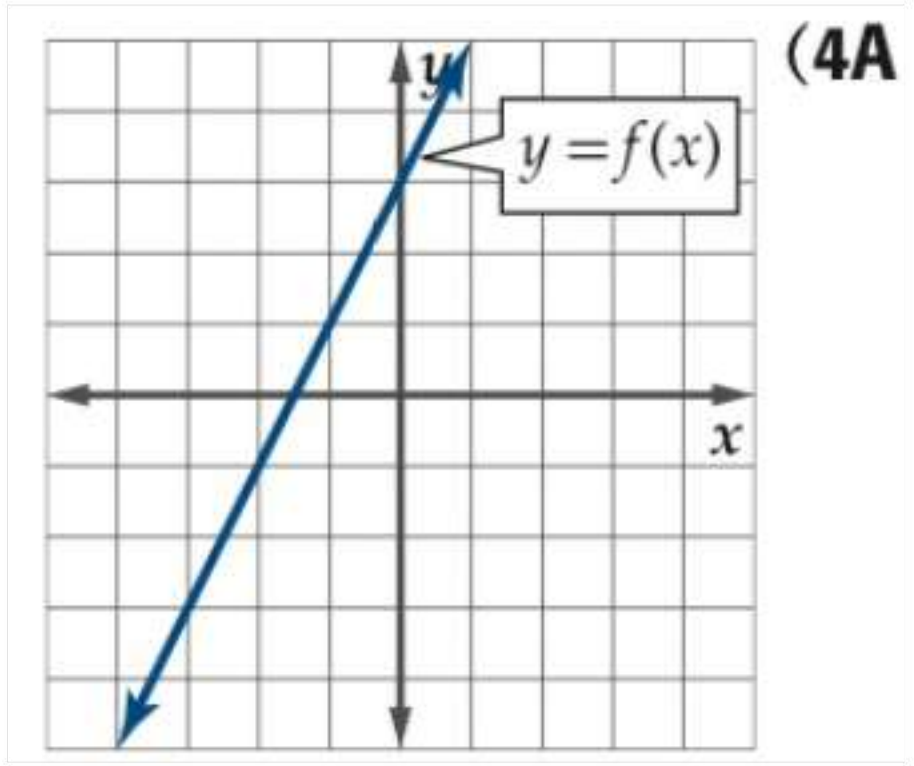
الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي، ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

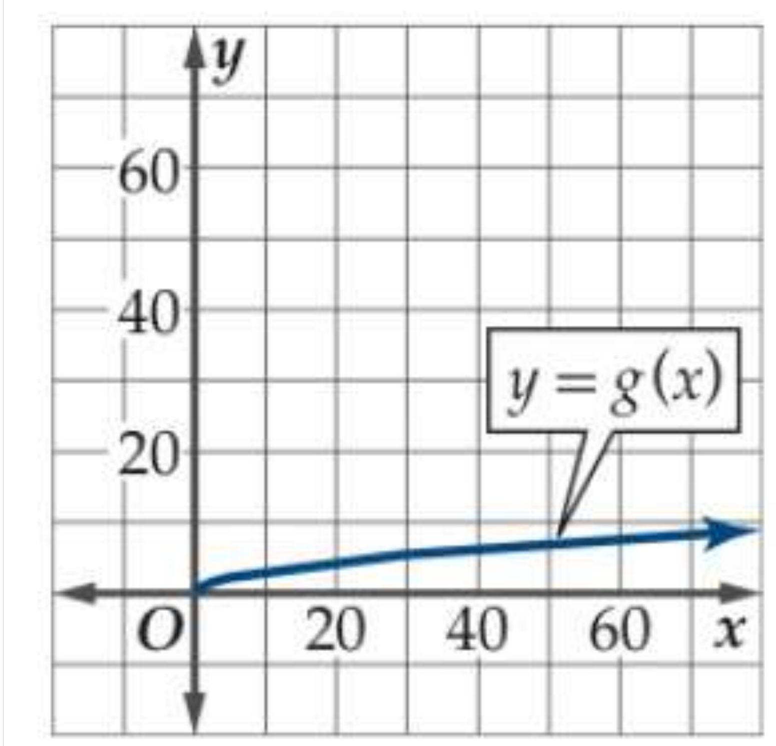
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا:

(4A

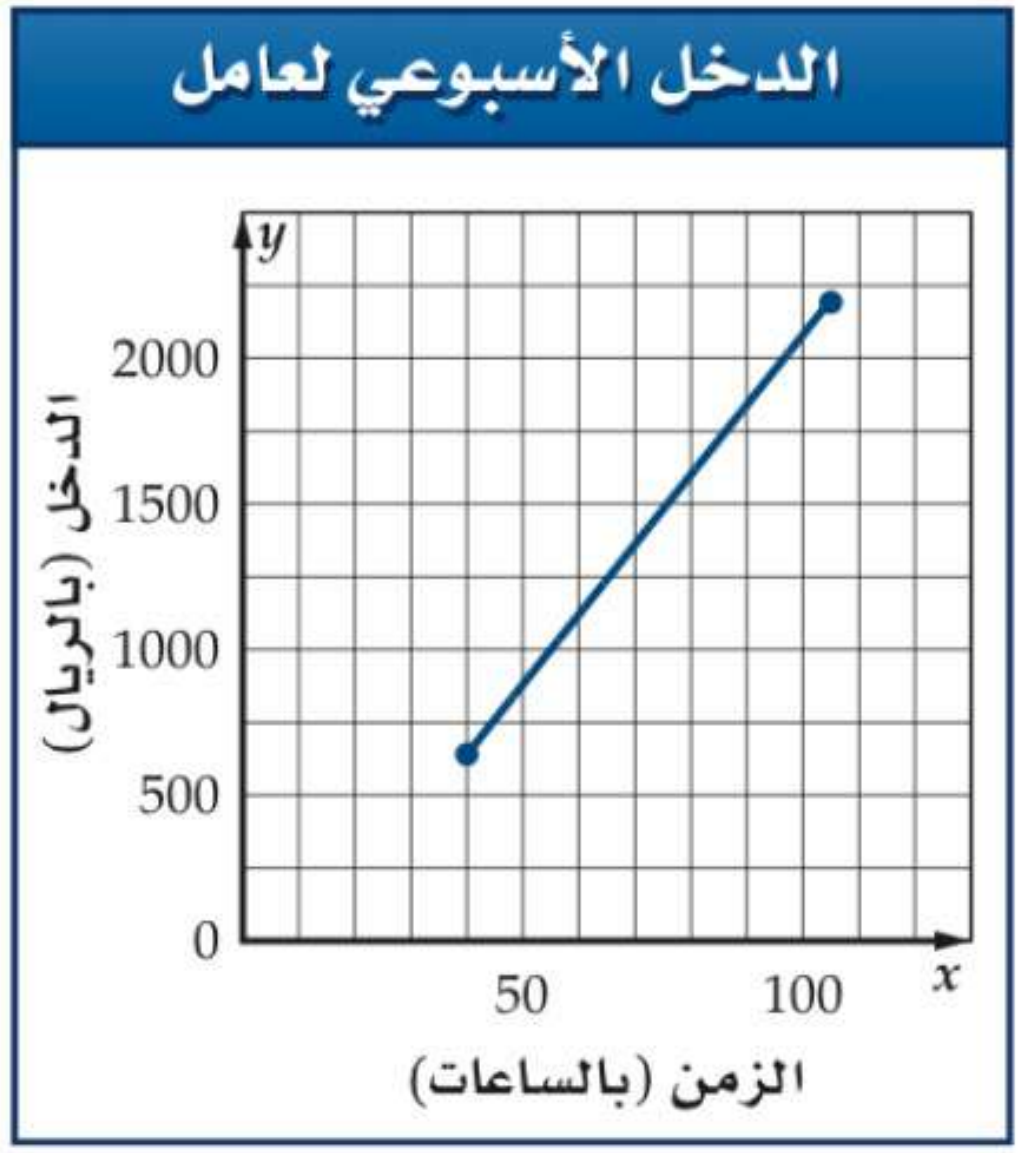


(4B



مثال 5 من واقع الحياة — استعمال الدالة العكسية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$ أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 24x - 320$	الدالة الأصلية
$y = 24x - 320$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = 24y - 320$	بدّل بين x و y
$x + 320 = 24y$	أضف 320 إلى الطرفين
$y = \dfrac{x + 320}{24}$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = \dfrac{x + 320}{24}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

الربط مع الحياة

ينص نظام العمل في المملكة على أنه "لا يجوز تشغيل العامل تشغيلًا فعليًا أكثر من 8 ساعات في اليوم الواحد إذا اعتمد صاحب العمل المعيار اليومي، أو أكثر من 48 ساعة إذا اعتمد المعيار الأسبوعي".

مسائل مهارات التفكير العليا

56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرًا عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟

57) **اكتب:** وضح القيود التي يجب وضعها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية. وضّح بمثال.

58) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برِّر إجابتك.
"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

59) **تحدّ:** إذا كانت $f(x) = x^3 - a,\ f^{-1}(23) = 3$، فأوجد قيمة a.

الفصل الثاني: العلاقات
والدوال الأسية واللوغاريتمية

لن تكون عظيماً حتى تملأ عقلك بالعلم النافع ، وحياتك بالعمل الصادق..

اليوم :

الأثنين

موضوع الدرس:

العلاقات
والدوال الأسية واللوغاريتمية
(التهيئة)

التـــاريخ :

١٤٤٣/٢/١٣

معلمة المادة : شيخة المرزوقي

موضوع الدرس:

العلاقات
والدوال الأسية واللوغاريتمية
(التهيئة)

الفكرة العامة:

درست تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانياً

والآن :

- أتعرف الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أمثل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانياً .
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

لماذا :

علوم: ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطًا وثيقًا. ويظهر ذلك جليًّا في الفيزياء والكيمياء والأحياء، وغيرها. وتحتاج هذه الفروع إلى مهارات رياضية عالية. وستتعلم في هذا الفصل جوانب رياضية ذات صلة قوية بعلوم: الحاسوب، والفيروسات، والحشرات، ونمو البكتيريا، وانقسام الخلايا، وعلم الفلك، والأعاصير، والهزات الأرضية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

مراجعة المفردات

المجال (domain):
مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

المدى (range):
مجموعة الإحداثيات y للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

الدالة (function):
علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

سلوك طرفي التمثيل البياني (end behaviour):
سلوك تمثيل $f(x)$ البياني عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$ أو سالب مالانهاية $(x \to -\infty)$.

خط التقارب (asymptote):
مستقيم يقترب منه تمثيل الدالة البياني.

الدالة المتباينة (one-to-one function):
هي دالة تحقق اختبار الخط الأفقي؛ أي لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.

الدالة العكسية (inverse function):
تكون كل من الدالتين f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:
$f\left[f^{-1}(x)\right] = x , f^{-1}\left[f(x)\right] = x$.

الدالة المتصلة (continuous function):
هي الدالة التي يخلو منحناها من الانقطاعات أو الفجوات؛ أي يمكن تمرير القلم على منحناها دون أن نضطر لرفعه.

موضوع الدرس:
العلاقات
والدوال الأسية واللوغاريتمية
(التهيئة)

الفكرة العامة:
درست تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانياً

والآن :
- أتعرف الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أمثل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانياً.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

العلاقات
والدوال الأسية واللوغاريتمية
(التهيئة)

الفكرة العامة:

درست تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانياً

والآن :

- أتعرف الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أمثل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانياً.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اختبار سريع

بسّط كل عبارة مما يأتي مفترضًا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $a^4a^3a^5$

2) $(2xy^3z^2)^3$

3) $\dfrac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$

4) $\left(\dfrac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

5) **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. فإذا كانت كتلة جسم $7.5 \times 10^3 \text{g}$، وحجمه $1.5 \times 10^3 \text{ cm}^3$، فما كثافته؟

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

6) $f(x) = 2x + 5$

7) $f(x) = x - 3$

8) $f(x) = -4x$

9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

11) $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

12) $f(x) = x - 6$
$g(x) = x + 6$

13) $f(x) = 2x + 5$
$g(x) = 2x - 5$

14) **طعام:** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال. فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافًا إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$، موضحًا ماذا تعني.

الحل:

موضوع الدرس : الدوال الأُسية

اليوم : الأحد

التاريخ : ١٤٤٣/٢/١٩

الحصة : الثانية

الاستراتيجيات : المناقشة والحوار / العصف الذهني

فيما سبق : درستُ الدوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانياً

فكرة الدرس : ١/ أتعرف الدالة الأسية . ٢/ أمثل الدالة الأسية
٣/ أمثل دوال النمو الأسي بيانياً .٤/ أمثل دوال الاضمحلال الأسي بيانياً

المفردات : الدالة الأسية / النمو الأسي / عامل النمو / الاضمحلال الأسي / عامل الاضمحلال .

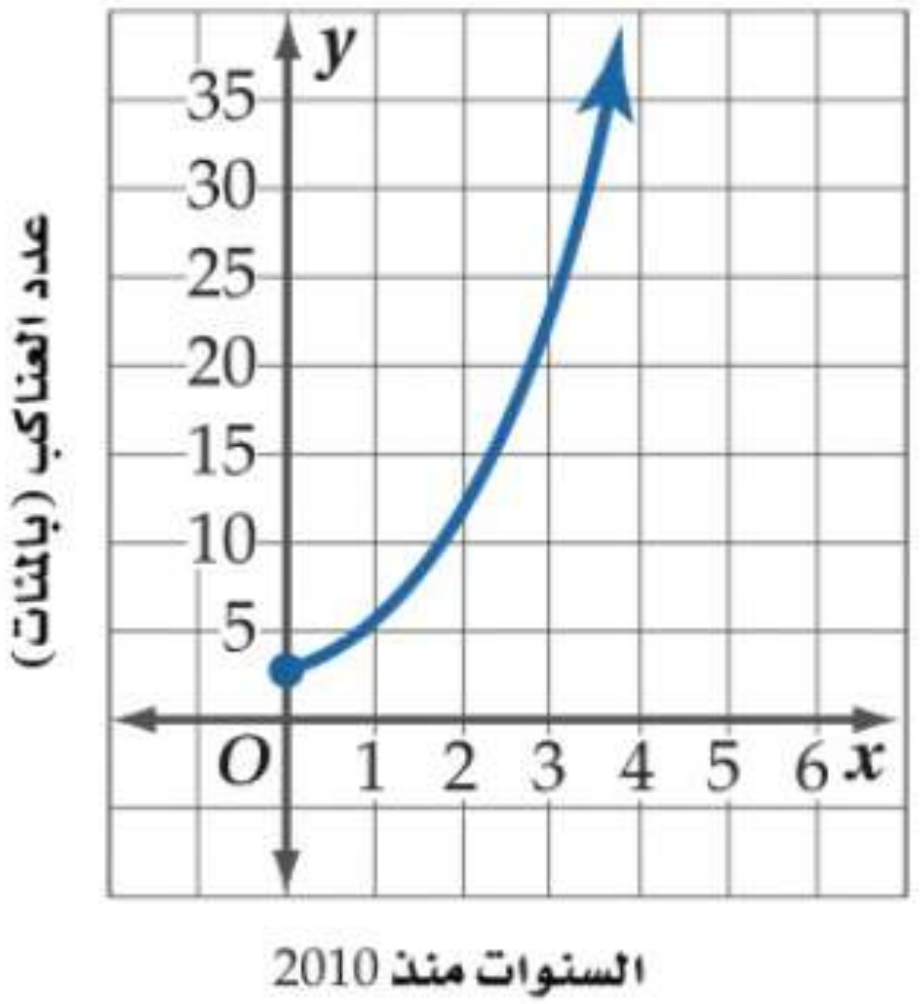
اليوم الوطني السعودي ٩١

روحي وماملكت يداي فداهٌ وطني الحبيب وهل أحب سواهٌ

لماذا

قد تبدو عناكب الرتيلاء (*Tarantulas*) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيِّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.

لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًّا، وليس تربيعيًّا أيضًا، وإنما يمثِّل الدالة $y = 3(2)^x$، والتي هي مثال على الدالة الأسية.



تمثيل الدوال الأسّية: **الدالة الأسّية** هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

مفهوم أساسي — الدالة الأسية

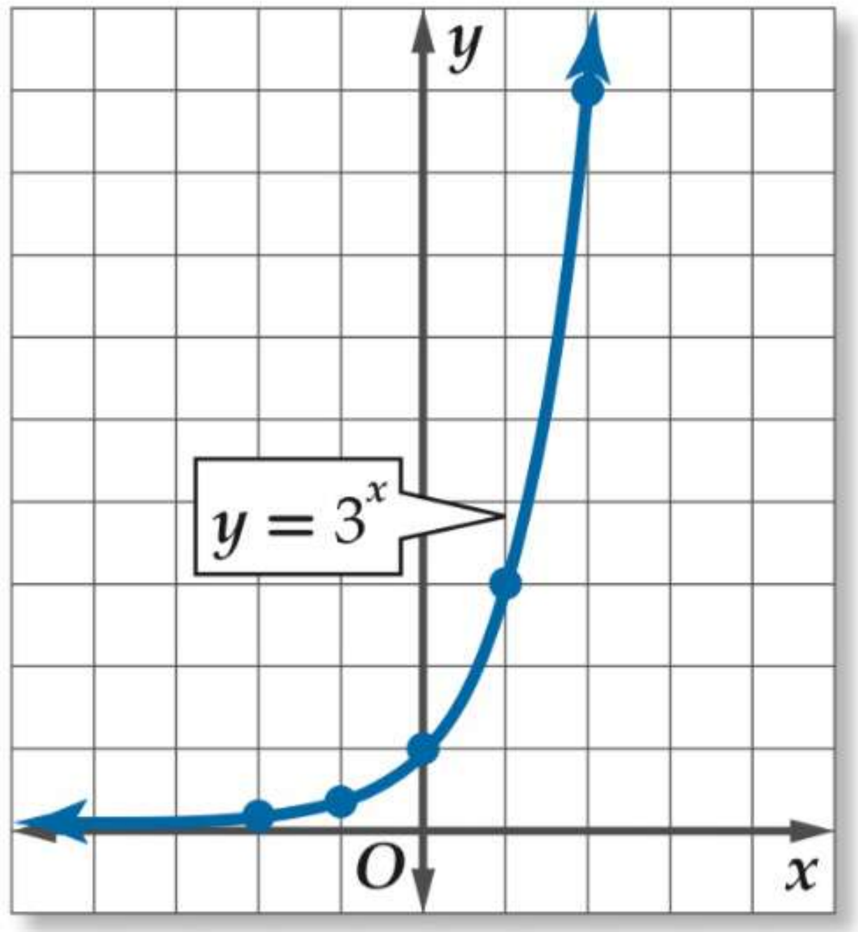
التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة
$y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

أمثلة: $y = (\frac{1}{2})^x$ $\quad y = 4^x$ $\quad y = 2(3)^x$

مثال ١ تمثيل الدالة الأسّية عندما $a > 0$ ، $b > 1$

a) مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدد مجال الدالة ومداها.

x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y، حيث $y = 3^x$، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

إرشادات للدراسة

الدالة $y = ab^x$:

تكون الدالة الأسية $y = ab^x$ معرفة لجميع قيم x التي تحقق الشرط:

$a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

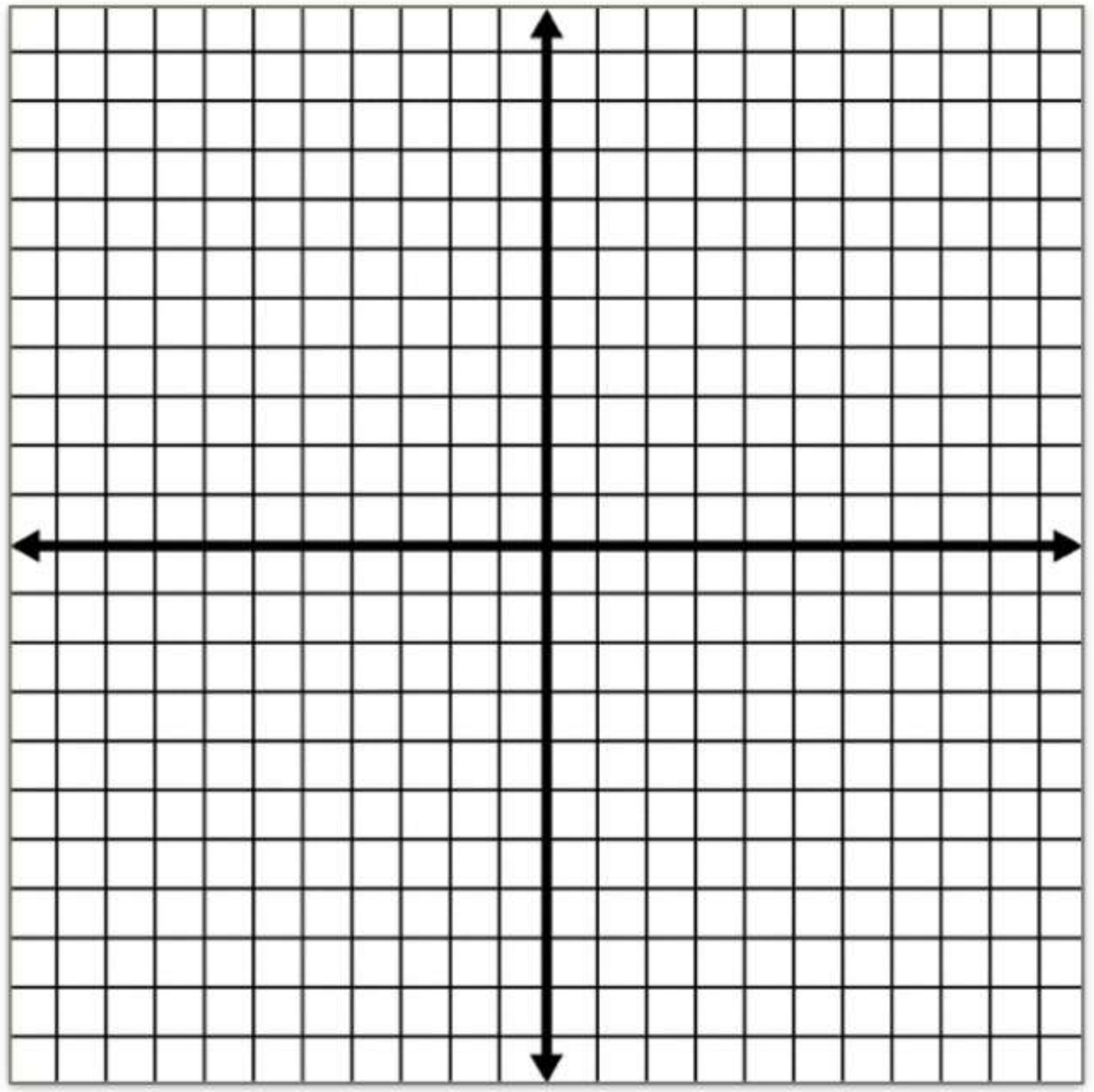
وذلك لأنه:

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم، فمثلًا تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة.

تحقق من فهمك

1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

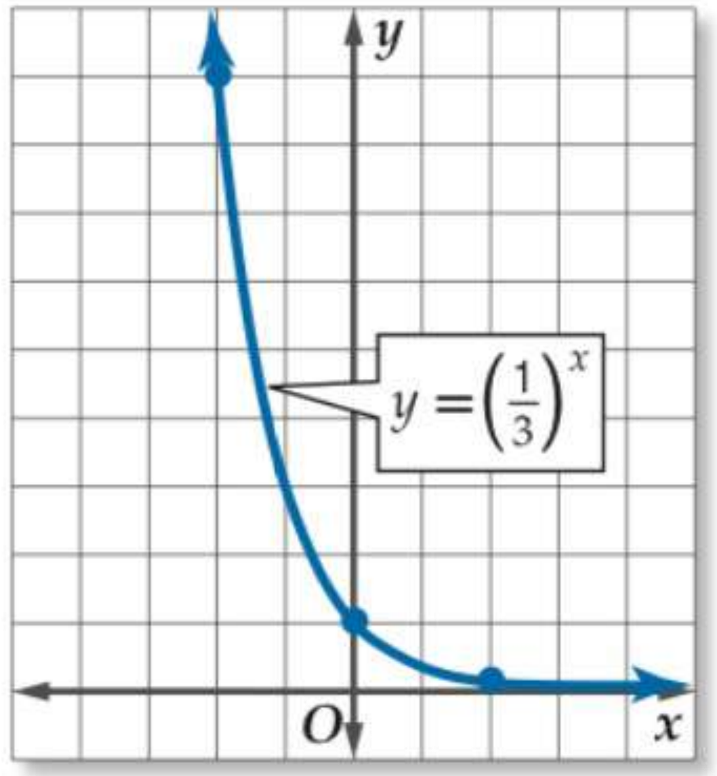


يتضح من المثال (1) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 1)، فإن قيم y تزداد أيضًا بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل 3 أمثال القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متزايدة، كما أن المحور x هو خط تقارب أفقي لها.

مثال ٢ تمثيل الدالة الأسيّة عندما $0 < b < 1 ، a > 0$

a) مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	$\frac{1}{9}$



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

عندما $x = -1.5$، فإن قيمة $y \approx 5.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5} \approx 5.19615$).

إرشادات للدراسة

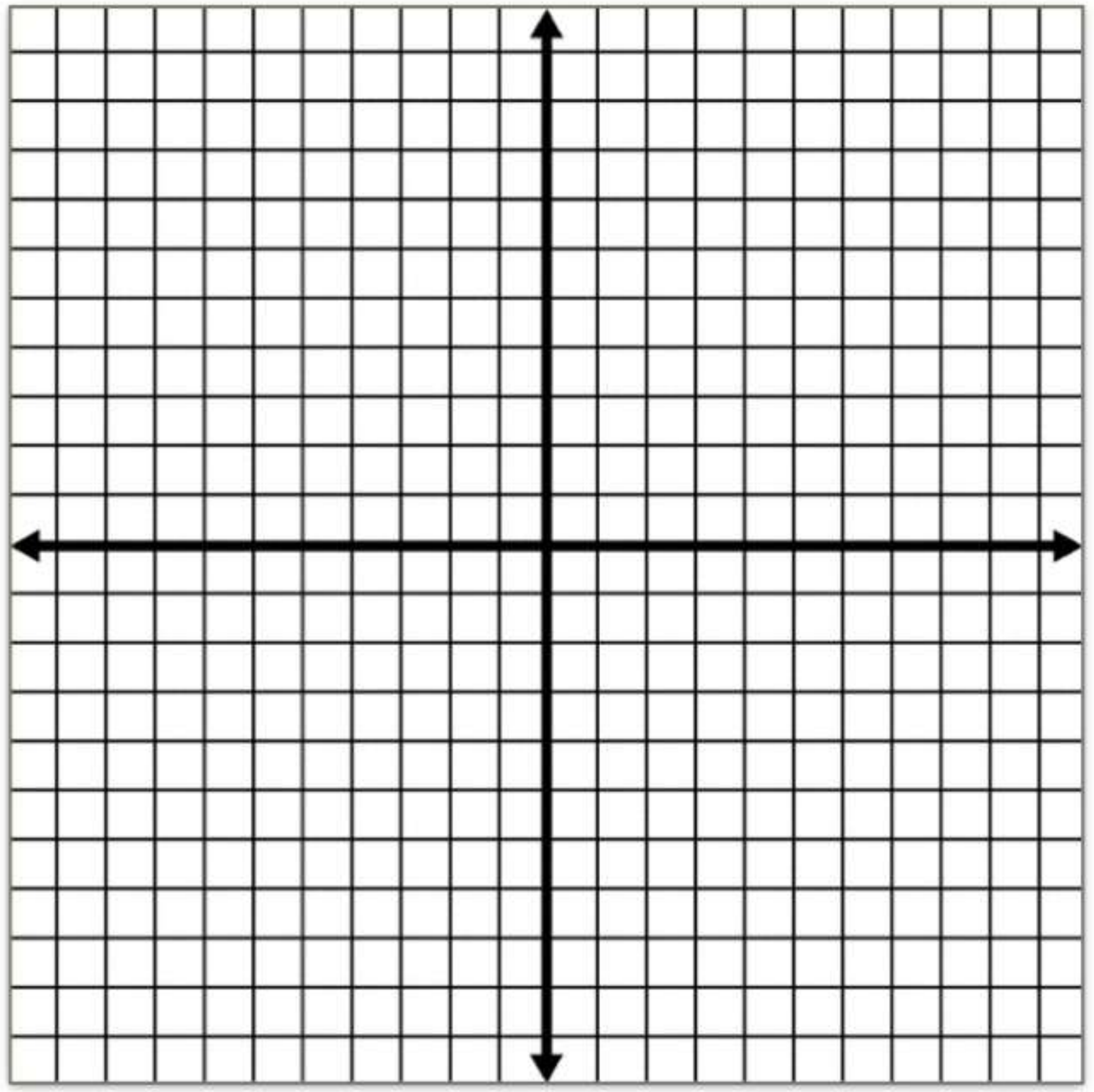
$a < 0$

إذا كانت قيمة a سالبة، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x.

تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.



يتضح من المثال (2) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 2)، فإن قيم y تتناقص بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثِّل $\frac{1}{9}$ القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متناقصة، كما أن المحور x هو خط تقاربٍ أفقي لها.

النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**، فالدالة $y = 3^x$ الواردة في المثال 1 هي دالة نمو أسي.

مفهوم أساسي **الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي**

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, b > 1$

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد

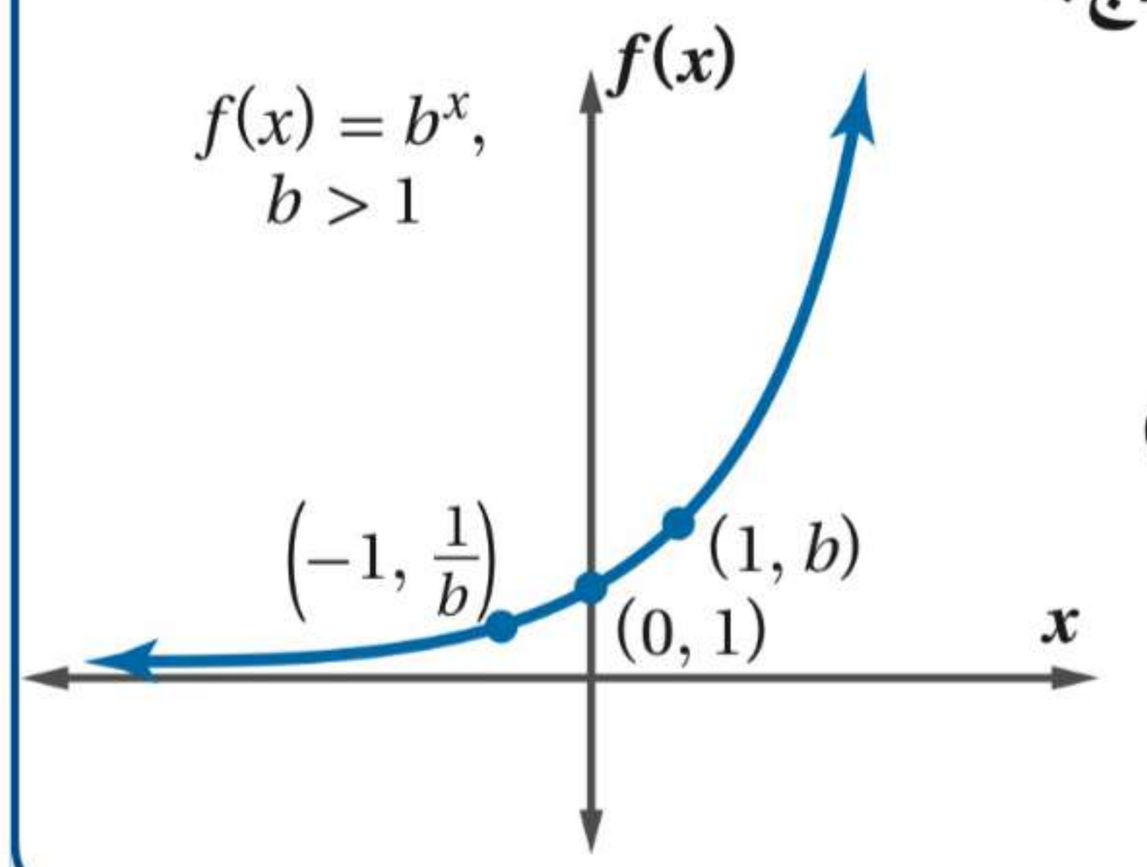
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

النموذج:



يمكنك تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل الدوال الأسية، كما يمكنك الاستفادة من النقاط:
$(-1, \frac{1}{b}), (0, 1), (1, b)$

لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x. ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a\,(1 + r)^t$ ، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 + r)$ ويُسمى **عامل النمو**.

وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٣ من واقع الحياة :

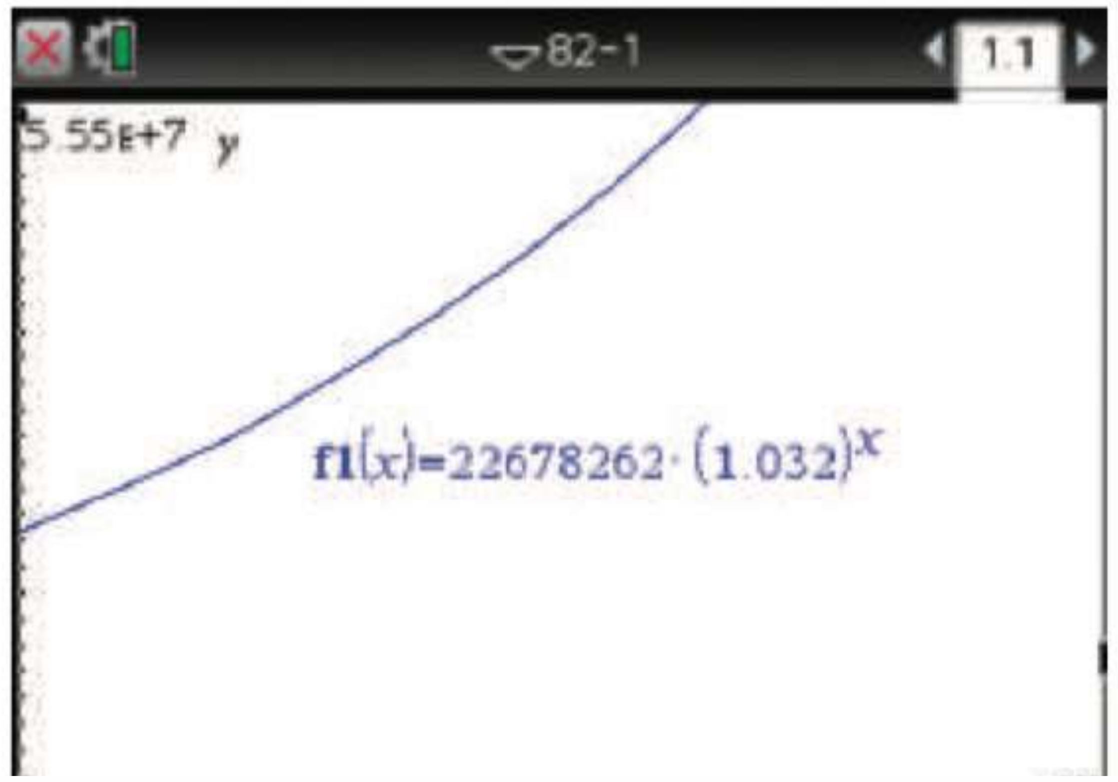
تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431-1425 3.2% تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثِّل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

$$y = 22678262\ (1.032)^t$$

b) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.



تنبيه!

النسبة المئوية

تذكَّر أن جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية. فمثلًا،

$12.5\% = 0.125$

الربط مع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي يتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد أجري أول تعداد سكاني في المملكة عام 1394 هـ ، وكان عدد سكان المملكة حينئذ 7 ملايين نسمة تقريبًا.

اليوم الوطني السعودي ٩١

تحقق من فهمك

3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنويًّا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثّل إنفاق العائلة منذ عام 1430هـ، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

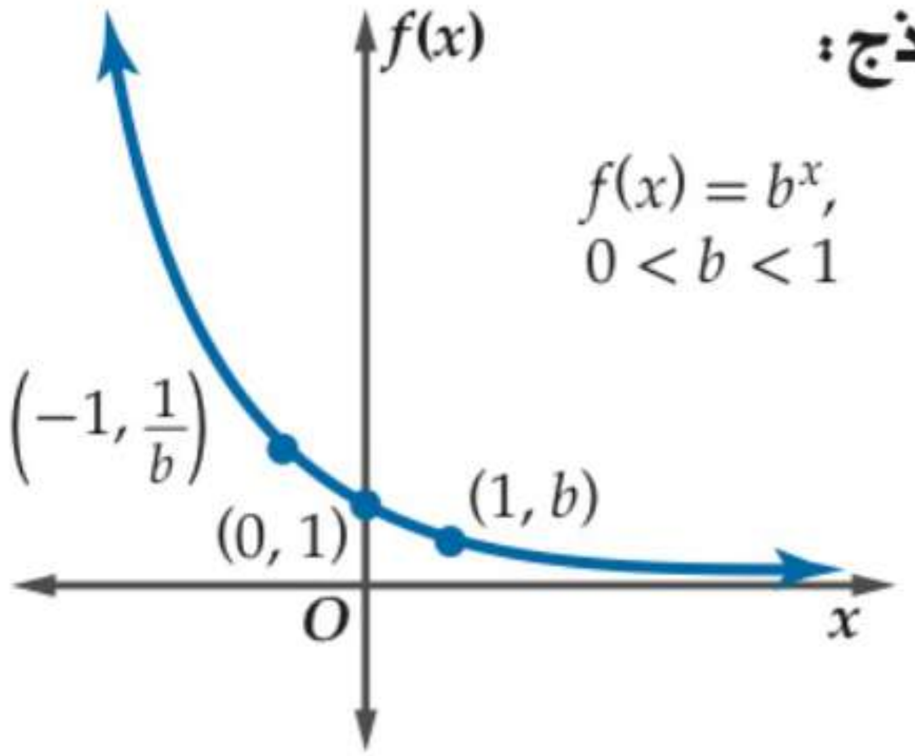
اليوم الوطني السعودي ٩١

الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$ دالة **الاضمحلال الأسّي**، فالدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ الواردة في المثال 2 هي دالة اضمحلال أسي.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x,\ 0 < b < 1$

النموذج:



خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية(R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة(R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1 - r)^t$، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

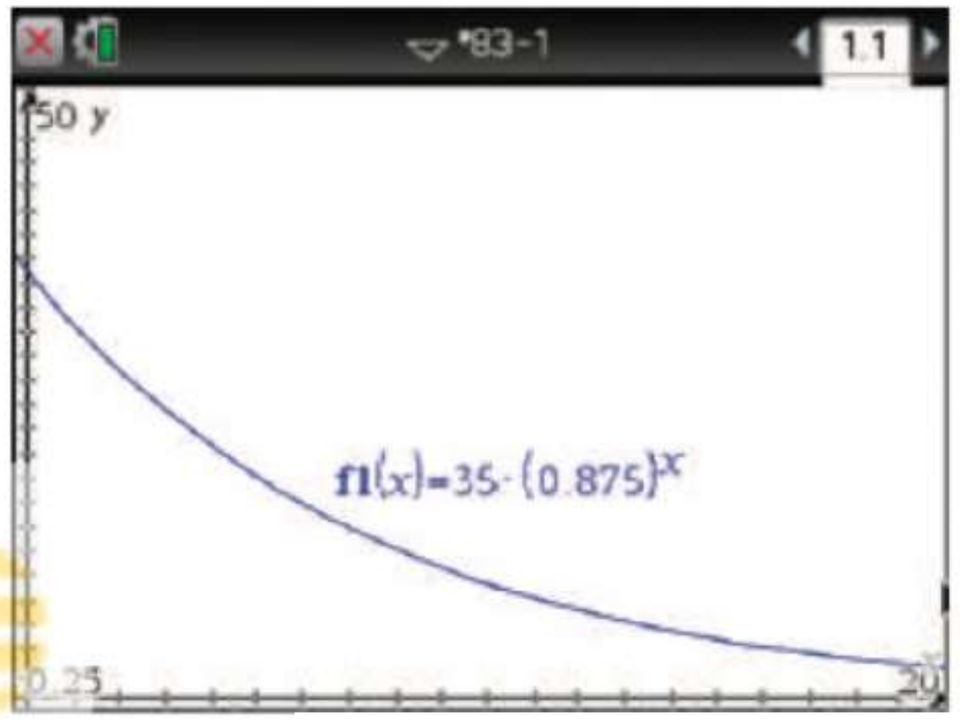
وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.

مثال ٤ من واقع الحياة :

تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريبًا من كمية الكافايين من أجسامهم في الساعة.

a) أوجد دالة أسّية تمثِّل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



$$y = a(1 - r)^t$$
$$= 35(1 - 0.125)^t$$
$$= 35(0.875)^t$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$	المعادلة من الفرع a
$= 35(0.875)^3$	عوّض 3 بدلًا من الزمن t
≈ 23.45	استعمل الحاسبة

سيبقى في جسم هذا الشخص $23.45mg$ من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

الربط مع الحياة

الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل عُرضة للإصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.

اليوم الوطني السعودي ٩١

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثِّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثِّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدِّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

اليوم الوطني السعودي ٩١

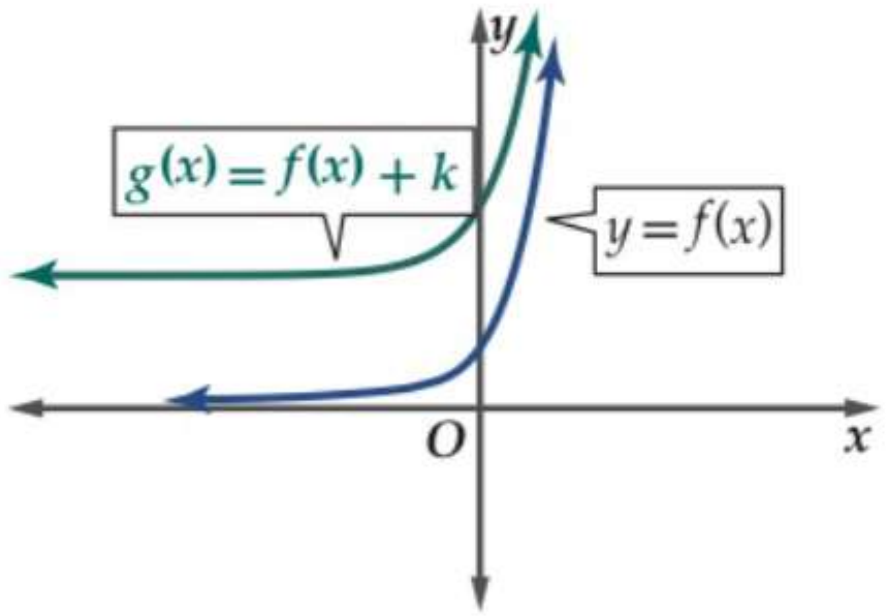
التحويلات الهندسية

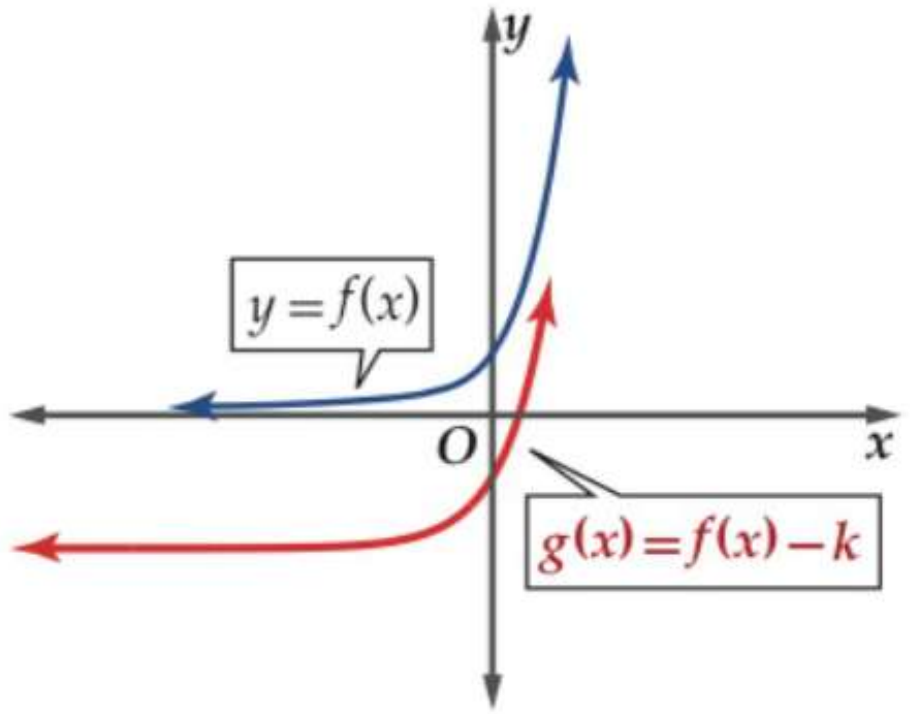
مفهوم أساسي
الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

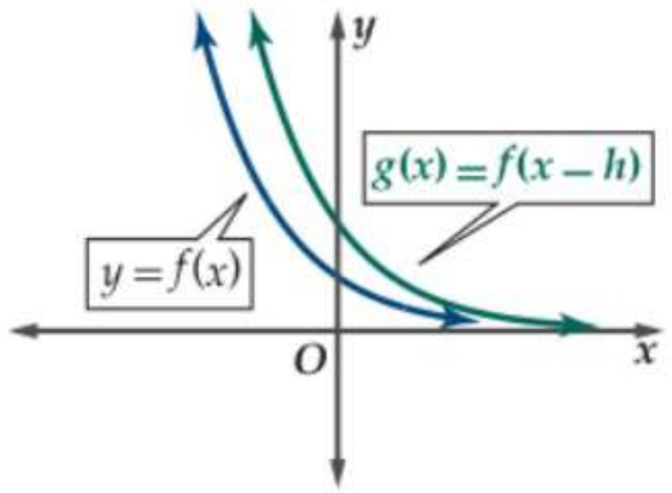


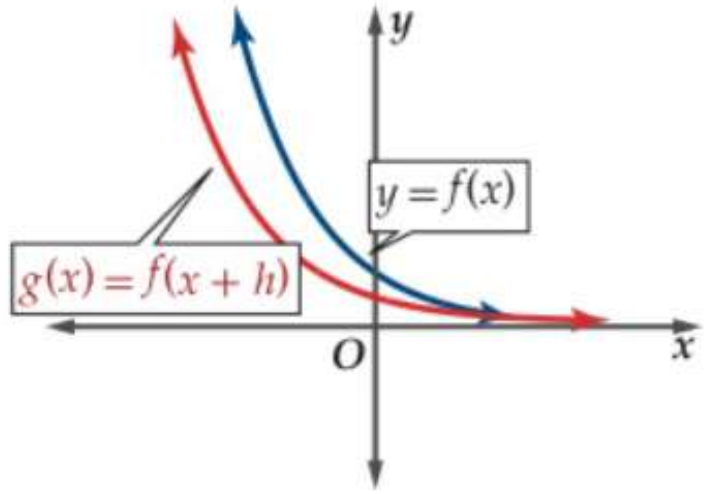


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



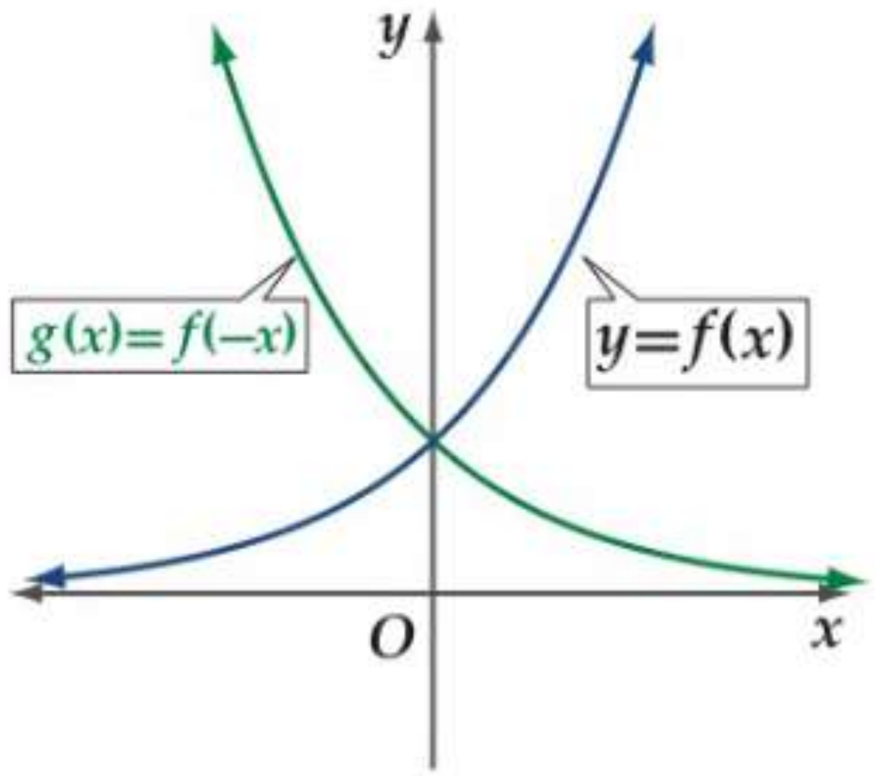


اليوم الوطني
السعودي ٩١

التحويلات الهندسية

مفهوم أساسي الانعكاس حول المحور y

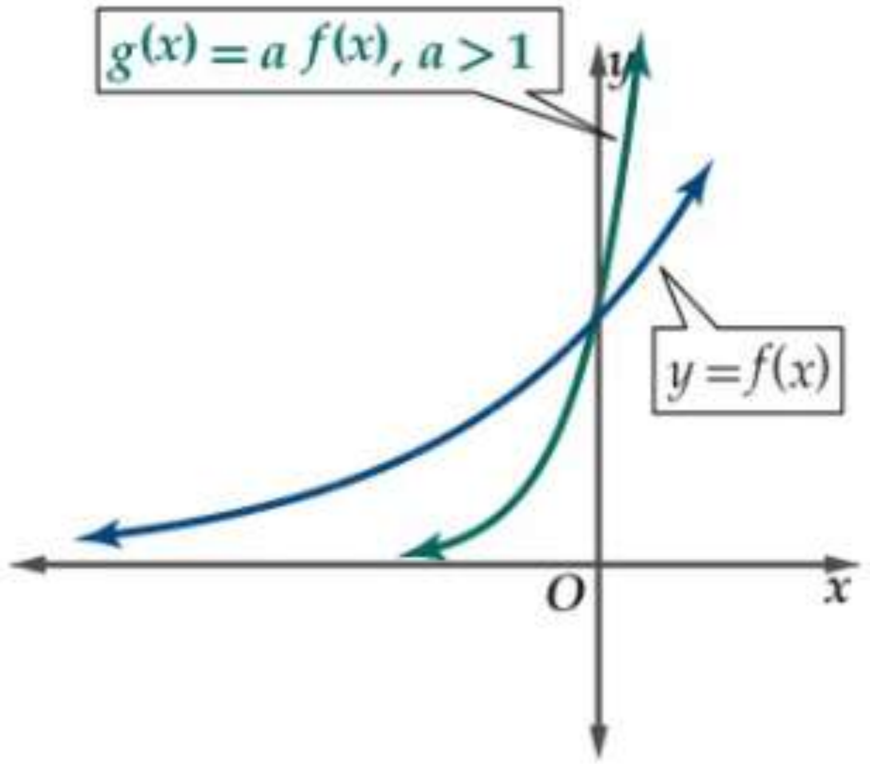
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



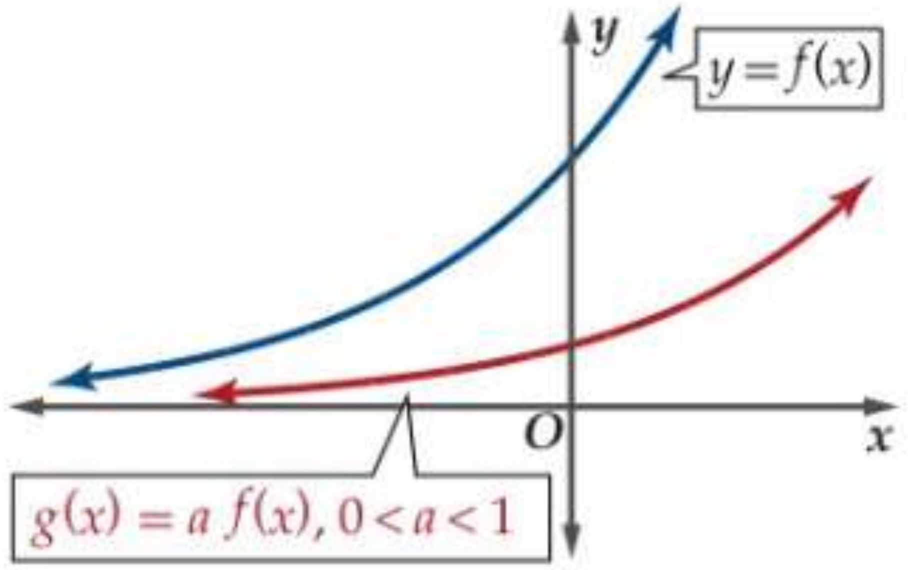
مفهوم أساسي التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.



تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



إرشادات للدراسة

الاضمحلال الأسي:

تأكد من عدم الخلط بين تضييق التمثيلات البيانية، حيث $1 < |a|$. والاضمحلال الأسي، حيث $0 < b < 1$

اليوم الوطني السعودي ٩١

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

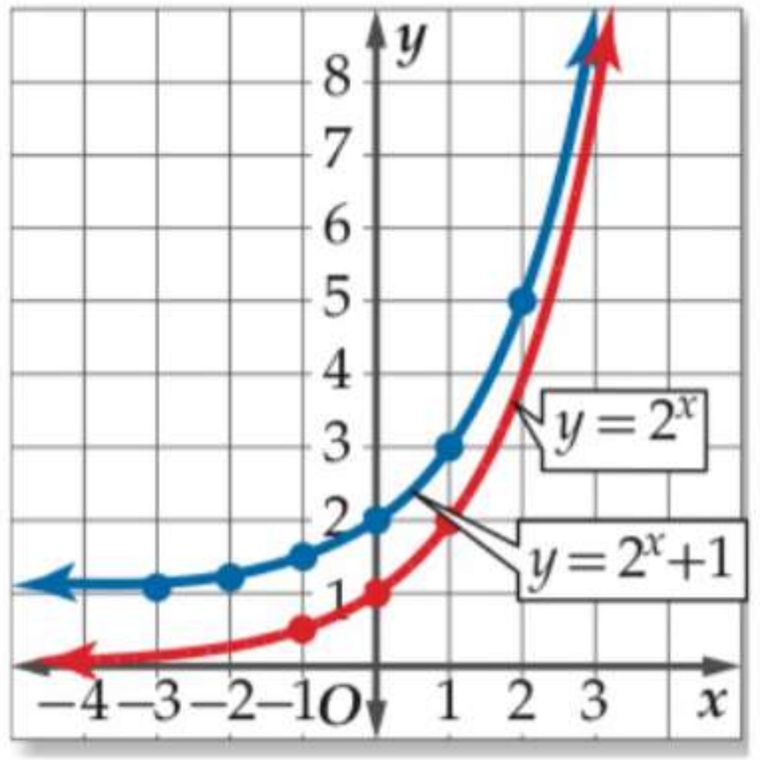
مثال ٥ تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها:

a) $y = 2^x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,2)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$، والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$، بما أن $k=1$ فإن المعادلة $y = 2^x + 1$ تمثِّل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبالاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x + 1$ يكون كما هو موضح أدناه.

x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3}+1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2}+1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1}+1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^{0}+1$	2
1	$2^{1}+1$	3
2	$2^{2}+1$	5



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 5 هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R). تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني مع اقتراب x من مالانهاية أو سالب مالانهاية. نلاحظ في المثال $(5a)$ أنه مع اقتراب x من مالانهاية، تقترب y من مالانهاية أيضًا، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من 1. وفي المثال $(5b)$ عندما تقترب x من مالانهاية فإن y تقترب من سالب مالانهاية، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من الصفر.

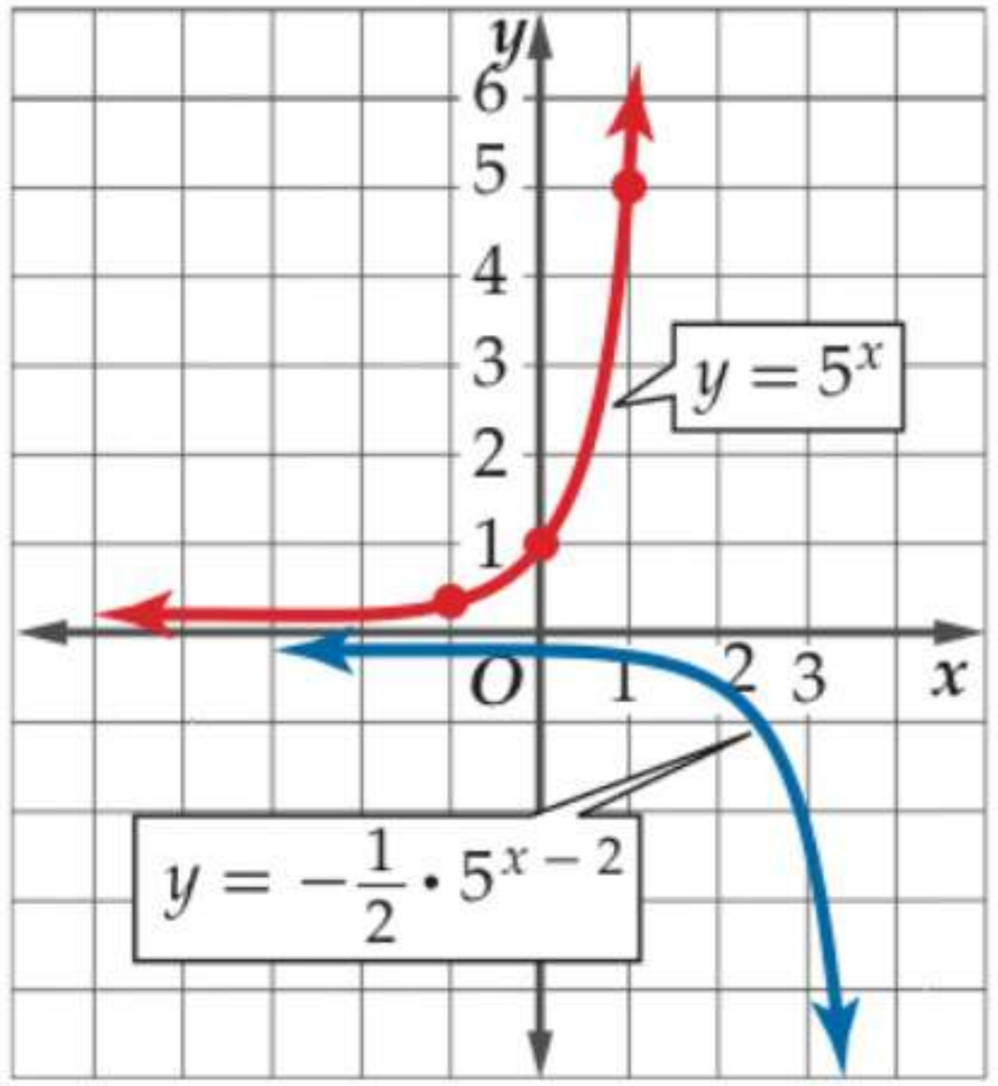
اليوم الوطني السعودي ٩١

مثال ٥

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

b) $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,5)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$



- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًّا.
- $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي للتمثيل البياني.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$

إرشادات للدراسة

تمثيل تحويلات الدالة الأسية بيانيًا:

يمكن استعمال إحدى الطريقتين الآتيتين؛ لتمثيل تحويلات دوال النمو الأسي والاضمحلال الأسي بيانيًّا:

– استعمال التحويلات الهندسية للدالة الأم، وتعزيز ذلك بجدول لقيم الدالة عندما لا تكون التحويلات الهندسية كافية وواضحة؛ لمزيد من الدقة، كما في المثال **5A**

– استعمال التحويلات الهندسية للدالة الأمّ فقط، كما في المثالين **5B , 6**

اليوم الوطني السعودي ٩١

تحقق من فهمك

5A) $y = 2^{x+3} - 5$

5B) $y = 0.1(6)^x - 3$

اليوم الوطني السعودي ٩١

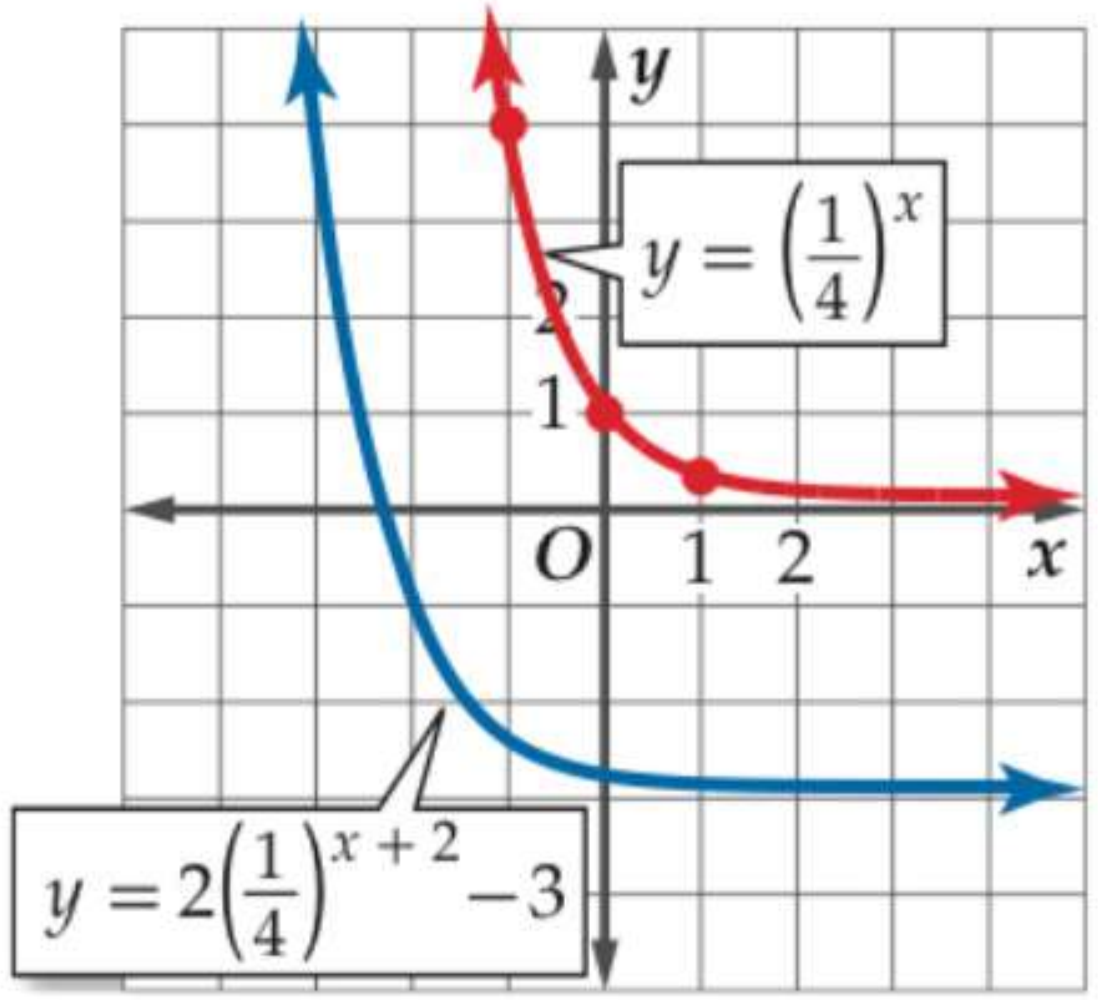
مثال ٦

تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$؛ فالدالة دالة اضمحلال أسي، لذا

استعمل النقاط $\left(1, \frac{1}{4}\right)$، $(0,1)$ ، $(-1,4)$



والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .

تحقق من فهمك

6) $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

اليوم الوطني
السعودي ٩١

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تبرير:** حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y.

b) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور x.

c) إذا كان b عددًا صحيحًا، فإن الدالة $f(x) = |b|^x$ هي دالة نمو أسي.

32) **مسألة مفتوحة:** أعطِ قيمة للثابت b تجعل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ دالة اضمحلال أسّي.

33) **اكتب:** صِف التحويل الذي ينقل الدالة $g(x) = b^x$ إلى الدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$.

اليوم الوطني السعودي ٩١

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مع كُل صباح يوم جديد ، تتجدد معهُ آمالنا ، تَشحذ الهمّةُ عن ساعدها
ونحثُ الخُطى باتجاه تحقيقها ،
اللهم خيرك عمّم و بيُسرك تمّم ..

حل المعادلات والمتباينات الأسية

ثالث ثانوي_رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ تمثيل الدوال الأسية بيانيًا. (الدرس 1-2)

والآن:

- أحل معادلات أسية.
- أحل متباينات أسية.
- أحل مسائل تتضمن نموًا أسيًا واضمحلالًا أسيًا.

المفردات:

المعادلة الأسية
exponential equation

الربح المركب
compound interest

المتباينة الأسية
exponential inequality

لماذا

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1435 هـ ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

حل المعادلات الأسية: تظهر المتغيرات في **المعادلة الأسية** في موقع الأسس.

مفهوم أساسي **خاصية المساواة للدوال الأسية**

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0 , b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. وإذا كان $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

مثال ١ حل المعادلات الأسية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

$2^x = 8^3$ (a

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	$8 = 2^3$
$2^x = 2^9$	خاصية قوة القوة
$x = 9$	خاصية المساواة للدوال الأسية

$9^{2x-1} = 3^{6x}$ (b

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	$9 = 3^2$
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	خاصية قوة القوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$-2 = 2x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

تحقق من فهمك

$4^{2n-1} = 64$ (1A

$5^{5x} = 125^{x+2}$ (1B

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٢ من واقع الحياة كتابة دالة أسية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة ، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a .

$y = ab^x$	الدالة الأسية
$7500 = a\,b^0$	بالتعويض عن x بالعدد 0، وعن y بالعدد 7500
$7500 = a$	$b^0 = 1$

وعندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$23000 = 7500 \cdot b^4$	بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	بقسمة كلا الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	بإيجاد الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	باستعمال الحاسبة

الدالة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y = 7500(1.323)^x$.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

$y = 7500(1.323)^x$	المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية
$= 7500(1.323)^{12}$	بالتعويض عن x بالعدد 12
≈ 215664	باستعمال الحاسبة

سيكون هنالك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

تحقق من فهمك

2) **إعادة تصنيع:** أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1436 هـ ، وفي عام 1440 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1436 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1481 هـ؟

الربط مع الحياة

قبل إعادة تدوير البلاستيك يتم غسله بمادة الصودا الكاوية المضاف إليها الماء الساخن. ولا ينصح باستعمال العبوات المعاد تدويرها للمواد الغذائية.

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال ٣ الربح المركب

مال: استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.2%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

خطط: بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب.

$P = 25000,\ r = 0.042,\ n = 12,\ t = 15$

حُلّ:

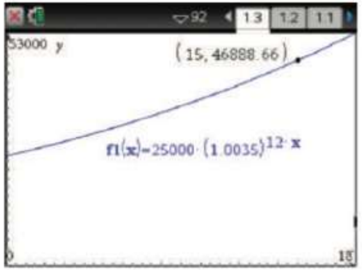
$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ صيغة الربح المركب

$= 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$ $P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

≈ 46888.66 باستعمال الحاسبة

تحقق: مثِّل المعادلة المناظرة بيانيًّا $f(x) = 25000(1.0035)^{12x}$، ثم أوجد قيمة y عندما $x = 15$ على الرسم بالضغط على مفتاح menu ثم اختر 8: الهندسة واختر منها 1: النقاط والمستقيمات ومنها 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على الرسم البياني لتحدد نقطة يظهر الزوج المرتب الذي يمثلها.

اضغط esc ثم حدِّد الإحداثي x للنقطة واكتب 15، سيظهر الإحداثي y المقابل 46888.66، إذن الإجابة صحيحة.



تنبيه!

نسب مئوية: تذكر تحويل جميع النسب المئوية إلى كسور عشرية، مثل: $4.2\% = 0.042$

تنبيه!

تقريب الأعداد: يمكنك تقريب الأعداد الظاهرة على الشاشة، بحيث تظهر على الرسم بالشكل المناسب وذلك بالضغط على مفتاح on واختيار 5: الإعدادات ثم اختيار 2: إعدادات المستند واختيار التقريب المناسب، وستظهر الأعداد بحسب عدد المنازل المطلوبة.

تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12% ، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنواتٍ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

حل المتباينات الأسية: **المتباينة الأسية** هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي — خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، و إذا كان $x > 6$ ؛ فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مفهوم أساسي — خاصية التباين لدالة الاضمحلال

التعبير اللفظي: إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ ، و إذا كان $x < 5$ ؛ فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مثال ٤ حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	$16 = 2^4 , 8 = 2^3$
$2^{8x-12} < 2^3$	خاصية قوة القوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين لدالة النمو
$8x < 15$	بجمع 12 للطرفين
$x < \frac{15}{8}$	بقسمة الطرفين على 8

إرشادات للدراسة

دالتا النمو والاضمحلال الأسي:
لاحظ أن خاصية التباين لدالة النمو تبين أن هذه الدالة متزايدة على مجالها، وأن خاصية التباين لدالة الاضمحلال تبين أن هذه الدالة متناقصة على مجالها.

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B) $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$.

38) **برهان:** أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$.

39) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك

$2^x > -(8^{20x})$ لجميع قيم x.

بصبرك واجتهادك تستطيع ان تفعل المستحيل .. فقط واصل للسعي نحو الأفضل

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

فيما سبق:

درستُ إيجاد الدالة العكسية لدالة. (الدرس 7–1)

والآن:

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثّل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

المفردات:

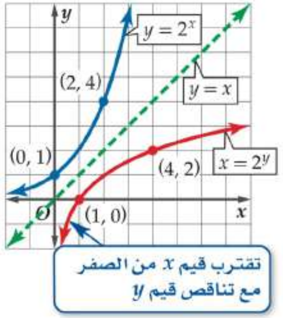
اللوغاريتم
logarithm
الدالة اللوغاريتمية
logarithmic function

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

لماذا

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية : يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًّا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.



$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x ، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b.

مفهوم أساسي — اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية

مثال ١ التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية :

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_2 8 = 3 \longrightarrow 8 = 2^3$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \longrightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق من فهمك

1A) $\log_4 16 = 2$

1B) $\log_3 729 = 6$

مثال ٢ التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية :

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \longrightarrow 8 = 2^3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \longrightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق من فهمك

2A) $4^3 = 64$

2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال ٣

ايجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$ — بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$4 = 16^y$ — تعريف اللوغاريتم

$4^1 = 4^{2y}$ — $16 = 4^2$

$1 = 2y$ — خاصية المساواة للدوال الأسية

$\frac{1}{2} = y$ — اقسم كلا الطرفين على 2

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$ — بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$\frac{1}{49} = 7^y$ — تعريف اللوغاريتم

$7^{-2} = 7^y$ — $\frac{1}{49} = 7^{-2}$

$-2 = y$ — خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:

- تذكَّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرَّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

مثال ٤ استعمال الخصائص الأساسية لوغاريتمات

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $\quad 5^3 = 125$

$= 3$ $\quad \log_b b^x = x$

b) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $\quad 0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ $\quad \log_b b^x = x$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ $\quad b^{\log_b x} = x$

d) $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$،
فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد
الحقيقية

تحقق من فهمك

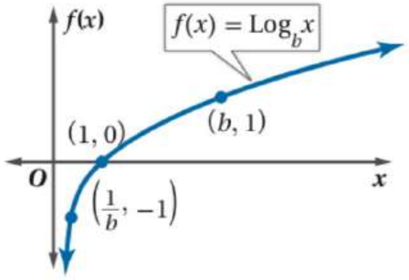
4A) $\log_9 81$

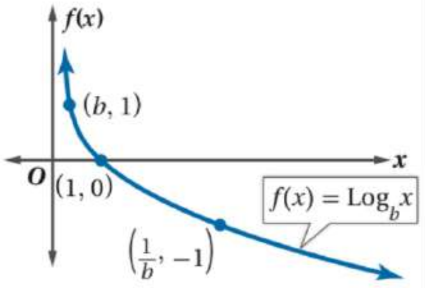
4B) $3^{\log_3 1}$

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ ، وكل من العددين b , x موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

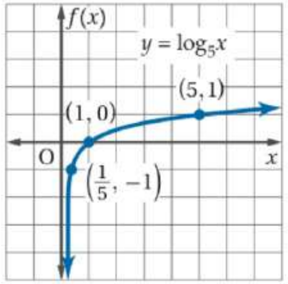
	$b > 1$	$0 < b < 1$
الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x,\ b > 1$	$f(x) = \log_b x,\ 0 < b < 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد	متصل، متباين، متناقص
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
خط التقارب:	المحور y	المحور y
مقطع المحور x:	1	1





مثال ٥ تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً

a) $f(x) = \log_5 x$



الخطوة 1: حدّد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

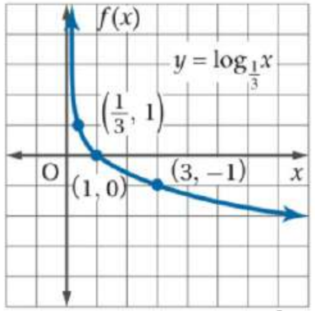
بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $(5, 1)$، $(1, 0)$، $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$.

الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

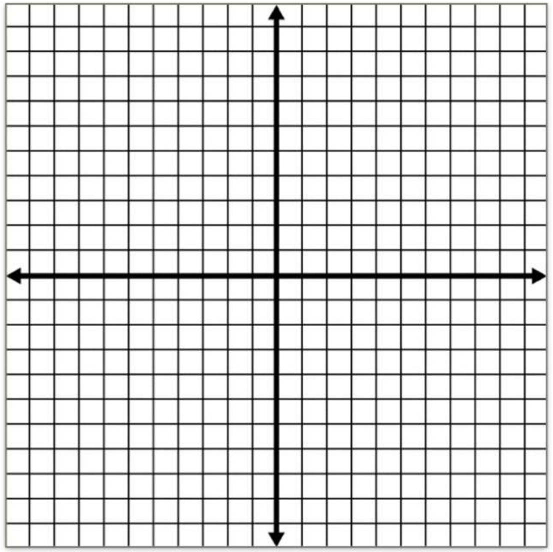
الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $(3, -1)$ ، $(1, 0)$ ، $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

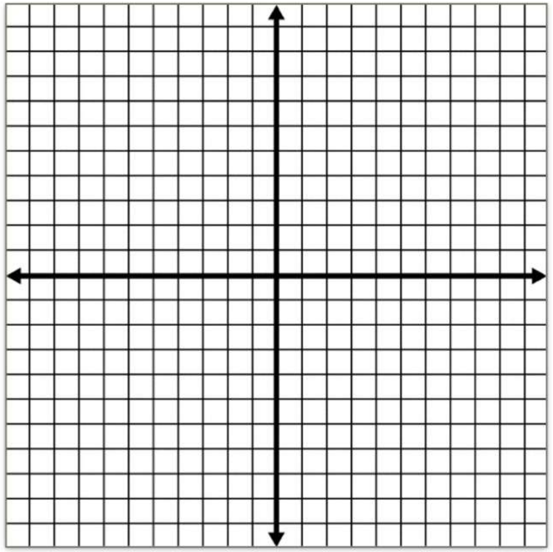
الخطوة 3: ارسم المنحنى.

تحقق من فهمك

$f(x) = \log_2 x$ (5A



$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ (5B

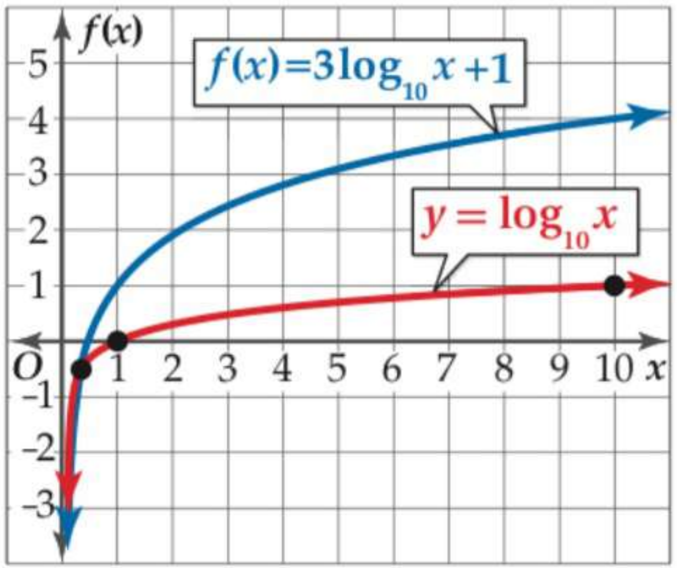


مثال ٦ تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً

a) $f(x) = 3\log_{10} x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10>1$ فاستعمل النقاط $(b, 1)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{b}, -1)$، أي النقاط $(10, 1)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{10}, -1)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.



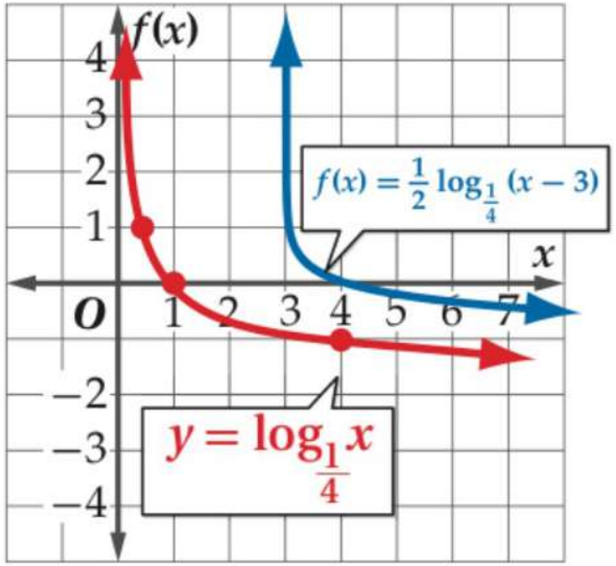
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٦ تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً

b) $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x - 3)$

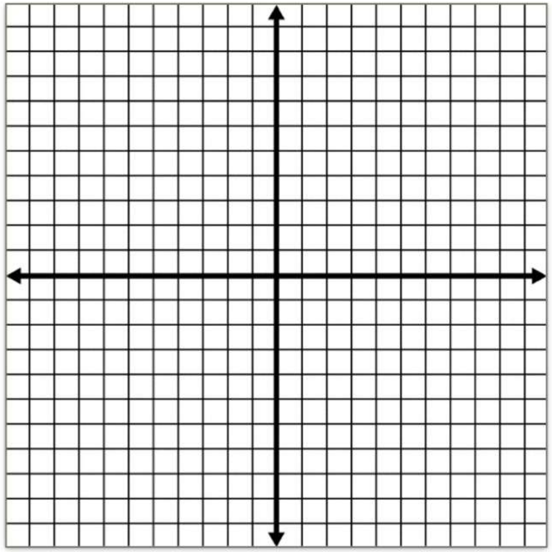
التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.

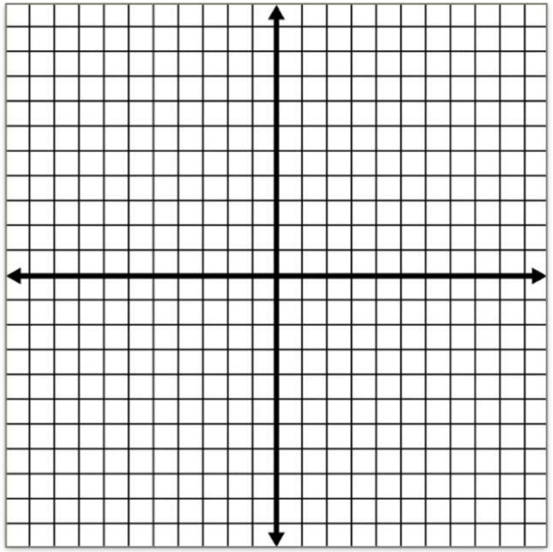


تحقق من فهمك

6A) $f(x) = 2\log_3(x-2)$



6B) $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$



مثال ٧ من واقع الحياة
إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

هزات أرضية : يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	عوّض 9.2 بدلاً من x
$= 10^{8.2}$	بسّط
$= 158489319.2$	استعمل الحاسبة

b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	أضف العدد 1 لكلا الطرفين

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(49 **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\log_3 9$	$\log_2 4$	$\log_2 16$	$\log_4 16$

(52 **اكتشف الخطأ:** أوجدت كل من مها ومريم قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$، أيٌّ منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

مها	مريم
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$
$49^y = \frac{1}{7}$	$\left(\frac{1}{7}\right)^y = 49$
$(7^2)^y = (7)^{-1}$	$(7^{-1})^y = 7^2$
$7^{2y} = (7)^{-1}$	$(7)^{-y} = 7^2$
$2y = -1$	$y = -2$
$y = -\frac{1}{2}$	

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

واصل كفاحك مهما كسرت الأيام قوتك .. كن عظيما لأنك تستحق ذلك ..

خصائص اللوغاريتمات

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

خصائص اللوغاريتمات

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية . (الدرس 3–2)

والآن:

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

لماذا:

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $pH = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}} = -\log_{10}[H^+]_{\text{للماء النقي}} + \log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}}$$

والتي تكتب بالشكل:

$$pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}} = \log_{10}\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}}$$

وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

مـثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$	$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$
$= \log_4 4^3 + \log_4 3$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$= 3 + \log_4 3$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$	$\log_4 3 \approx 0.7925$

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

مفهوم أساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$\log_6 7.2 = \log_6 \left(\frac{36}{5}\right)$ $7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$

$= \log_6 6^2 - \log_6 5$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= 2 - 0.8982$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$= 1.1018$ $\log_6 5 \approx 0.8982$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

$pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	المعادلة الأصلية
$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$pH = 4.2$
$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$	$\log_{10} 1 = 0$
$4.2 = -\log_{10} [H^+]$	بسِّط
$-4.2 = \log_{10} [H^+]$	اضرب كلا الطرفين في -1
$10^{-4.2} = [H^+]$	تعريف اللوغاريتم

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

الربط مع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو. والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية كما يظهر في الصورة أعلاه.

تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

خصائص اللوغاريتمات

مثال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$\log_2 25 = \log_2 5^2$ $5^2 = 25$

$= 2 \log_2 5$ خاصية لوغاريتم القوة

$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$ $\log_2 5 = 2.3219$

تحقق من فهمك

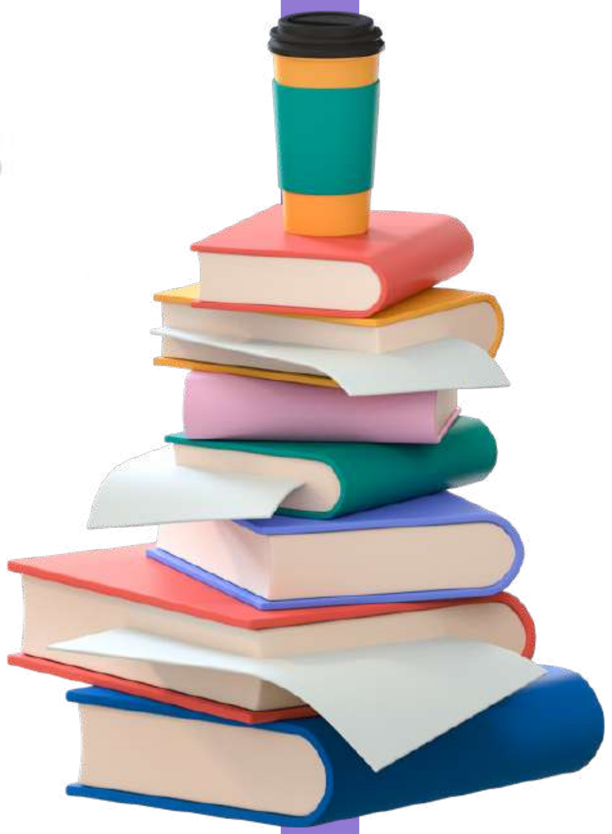
4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

مثال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$	$\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$
$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$	$4^3 = 64$
$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$	خاصية قوة القوة
$= \frac{3}{5} \log_4 4$	خاصية لوغاريتم القوة
$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}$	$\log_b b = 1$



مجموعة رفعة الرياضيات

تحقق من فهمك

5A) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B) $\log_7 \sqrt[6]{49}$

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$$ خاصية لوغاريتم القوة

b) $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$$ خاصية لوغاريتم القوة

c) $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

$$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$$ $\sqrt[5]{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{5}}$

$$= \log_3 (x-1) - \frac{1}{5}\log_3 (3-2x)$$

تحقق من فهمك

6A) $\log_{13} 6a^3bc^4$

6B) $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

6C) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x+6)$

$4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_3 \frac{x^4 \sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$ بإنطاق المقام

b) $0.5 \log_7 (x+2) + 6 \log_7 2x$

$0.5 \log_7 (x+2) + 6 \log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64x^6$ $(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2},\ 2^6 = 64$

$= \log_7 64x^6 \sqrt{x+2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

7A) $-5\log_2(x+1) + 3\log_2(6x)$

7B) $\log_3(2x-1) - \frac{1}{4}\log_3(x+1)$

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطولة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة.

49) **تحدٍ:** أوجد القيمة الدقيقة للعبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$

50) **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك:

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

يوم جديد وصباحٌ جميل

وعزم يتجدد نحو تحقيق الطموحات والنجاحات بإذن الله

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

رياضيات ٥

241

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 4–2)

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:

المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation
المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

لماذا

مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F- 3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F- 4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F- 5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F- 6 لا يُتصوَّر	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقًا

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنِّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من $F-0$ إلى $F-6$ بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وبحسب طول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة $F-6$ هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.

حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية

مثال ١ حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم .

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3 = 216$	خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	عوّض 216 بدلًا من x
$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	حلّل
$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	خاصيتا ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة
$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	بسّط
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓	الحل صحيح

تحقق من فهمك

$\log_9 x = \frac{3}{2}$ (1A

$\log_{16} x = \frac{5}{2}$ (1B

يمكن استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

مثال على اختبار 5

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x^2 - 3x - 4 = 0$	اطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x - 4)(x + 1) = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 1 = 0$ أو $x - 4 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -1$ أو $x = 4$	حُل كل معادلة

التحقق: عوِّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = -1$	$x = 4$
$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$	$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$
$\log_2 (-3) = \log_2 (-3)$ ✗	$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

بما أن $\log_2 (-3)$ غير معرف، فالإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

إرشادات للدراسة

التعويض

اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

A -3 **B** -1 **C** 5 **D** 15

248

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

يمكن استعمال خصائص اللوغاريتمات لحل المعادلات اللوغاريتمية

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

مثال ٣ حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x-9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x-9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين
$(x-12)(x+3) = 0$	حلّل
$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -3$ ، $x = 12$	حُل كل معادلة

التحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3-9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12-9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تحقق من فهمك

$2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$ **(3A**

$\log_6 x + \log_6 (x+5) = 2$ **(3B**

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة

يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6(x-9)$ هو $x>9$؛ لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$، وبما أن $9 \not> -3$ فإن $x=-3$ ليس حلًا للمعادلة.

حل المتباينات اللوغاريتمية : **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي **خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية**

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

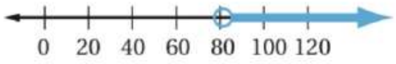
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٤ حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

أوجد مجموعة حلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 x > 4$	المتباينة الأساسية
$x > 3^4$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x > 81$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 81 , x \in R\}$



التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$x = 9$

$\log_3 9 \overset{?}{>} 4$

$2 > 4$ ✗

$x = 243$

$\log_3 243 \overset{?}{>} 4$

$5 > 4$ ✓

إذن الحل صحيح.

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية:
عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرّفًا.

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

تحقق من فهمك

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A) $\log_4 x \geq 3$

4B) $\log_2 x < 4$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي **خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية**

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

2

مثال ٥

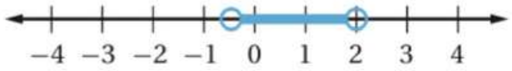
حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$	المتباينة الأساسية
$x + 3 > 2x + 1$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$2 > x$	اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

ثم استثنِ قيم x التي تجعل $x + 3 \le 0$ أو $2x + 1 \le 0$ ($x \le -3$ أو $x \le -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2 , x \in R\right\}$.



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٥ حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

التحقق: عوّض بعدد يقع في الفترة $(2, -\frac{1}{2})$، وآخر يقع خارج الفترة $(2 ، -\frac{1}{2})$.

$x = 1$

$\log_4 (1+3) \overset{?}{>} \log_4 (2+1)$

$\log_4 4 \overset{?}{>} \log_4 3$

$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$x = 3$

$\log_4 (3+3) \overset{?}{>} \log_4 (2\times 3+1)$

$\log_4 6 \overset{?}{>} \log_4 7$

$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟

ريم	لينا
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \geq 2^{-2}$	$x \leq 2^{-2}$
$x \geq \frac{1}{4}$	$0 < x \leq \frac{1}{4}$

انتهى الدرس

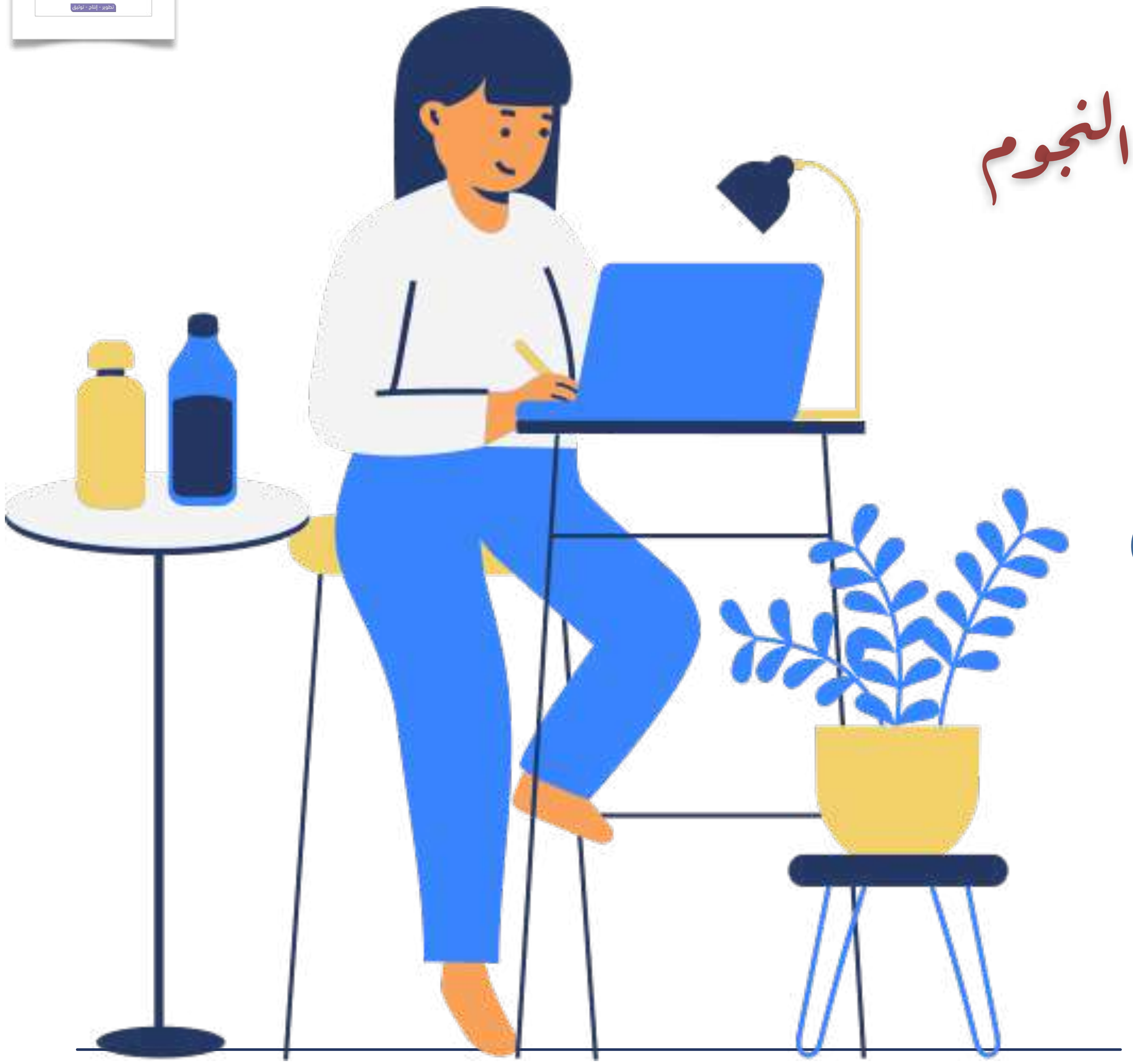
شاكرة لكم تفاعلكم وجميل مشاركاتكم ..

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

كن ذو همة عالية وطموحاً

يعانق عنان السماء صوب سهمك دائماً نحو النجوم

فإن أخطأت أصبت القمر 👌



اللوغاريتمات العشرية

رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

والآن:

- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

المفردات:

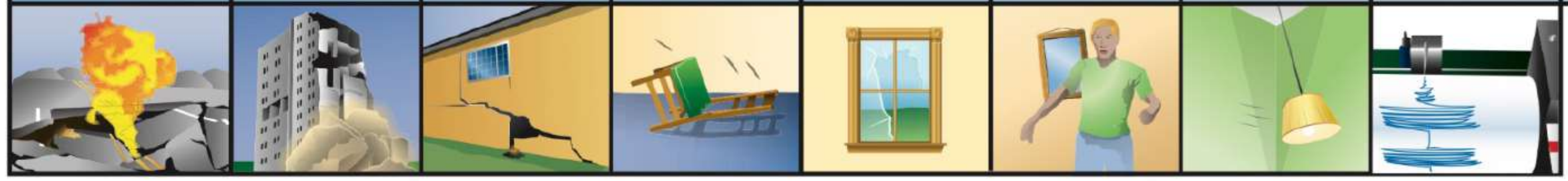
اللوغاريتم العشري
common logarithm

صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

لمـــاذا

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثير في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.



يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية** ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

مثال ١ : إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: LOG 5 ENTER تجد أن:

$$\log 5 \approx 0.6990$$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: LOG 0.3 ENTER تجد أن:

$$\log 0.3 \approx -0.5229$$

قراءة الرياضيات

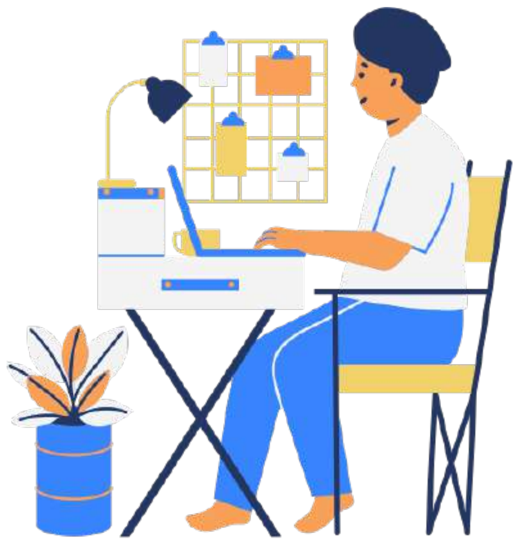
اللوغارتيم العشري

عند كتابة اللوغاريتم دون أساس، فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$.

تحقق من فهمك :

1A) $\log 7$

1B) $\log 0.5$



اللوغاريتمات العشرية

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$\begin{array}{ccc}
\log x = y & \longleftrightarrow & 10^y = x \\
\log 1 = 0 & \longleftrightarrow & 10^0 = 1 \\
\log 10 = 1 & \longleftrightarrow & 10^1 = 10 \\
\log 10^m = m & \longleftrightarrow & 10^m = 10^m
\end{array}$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

مثال ٢: من واقع الحياة حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	$L = 66.6,\ m = 1$
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط
$I = 10^{6.66}$	الصورة الأسية
$I \approx 4570882$	استعمل الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

الربط مع الحياة

الديسبل (dB) هو وحدة قياس ارتفاع الصوت، على سبيل المثال: 90—100dB تعادل ارتفاع صوت الرعد، 140dB تعادل ارتفاع صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

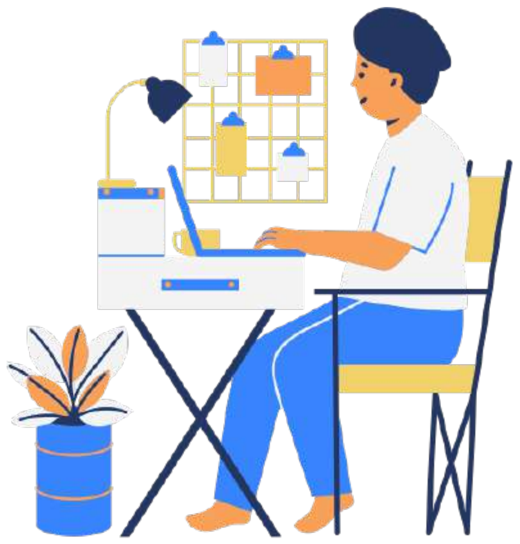
تحقق من فهمك :

2) **هزات أرضية :** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

إرشادات للدراسة

وحدة الجول:

تذكر أن الجول هو وحدة قياس الطاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج = 4^{-7} جول



مثال ٣: حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

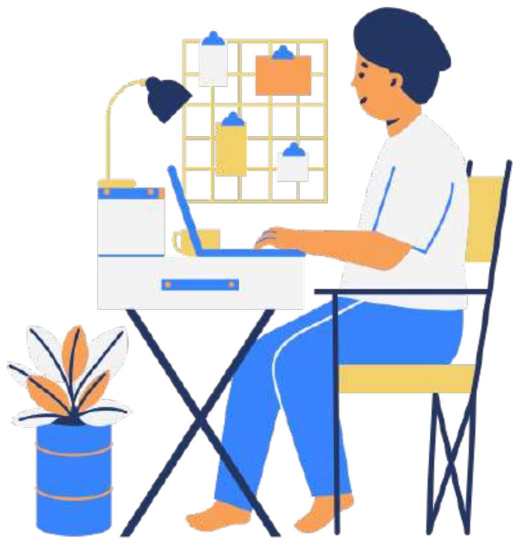
$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \dfrac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.1240$	استعمل الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا .

تحقق من فهمك :

3A) $3^x = 15$

3B) $6^x = 42$



مثال ٤: حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \dfrac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$
$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$	استعمل الحاسبة

مثال ٤: حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \overset{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \overset{?}{<} 7^{-4}$	بسِّط
$\frac{1}{59049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

إرشادات للدراسة

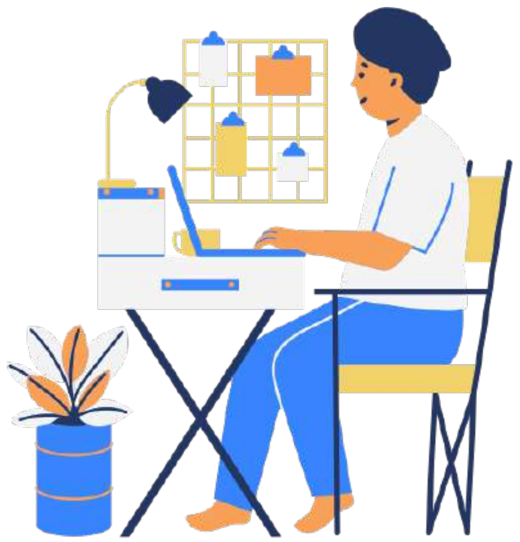
حل المتباينات

تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يعكس اتجاه رمز التباين.

تحقق من فهمك :

4A) $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B) $4^{y} < 5^{2y+1}$



صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي — صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$\log_b n$ ← لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b

$\log_b a$ ← لوغاريتم الأساس القديم للأساس b

مثال:

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

مثال ٥: استعمال صيغة تغيير الأساس

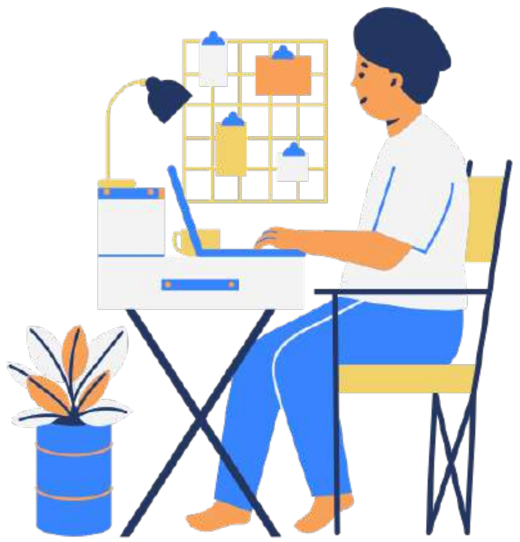
اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$$ صيغة تغيير الاساس

$$\approx 2.7268$$ استعمل الحاسبة

تحقق من فهمك :

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.



مثال ٦: استعمال صيغة تغيير الأساس

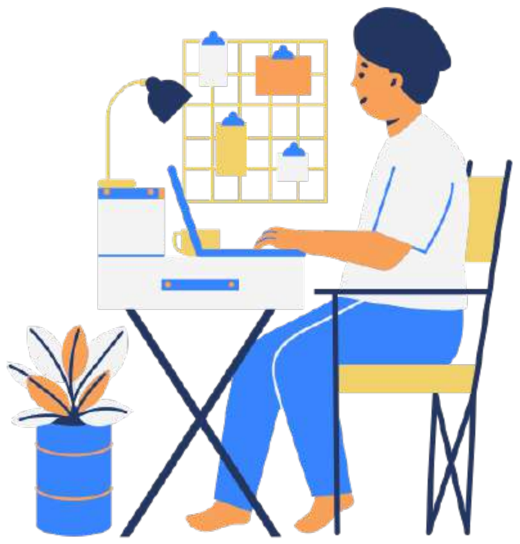
حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملًا صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$R = \log_2 n$	المعادلة الأصلية
$= \log_2 240$	$n = 240$
$= \dfrac{\log 240}{\log 2}$	صيغة تغيير الأساس
≈ 7.9	بسِّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوةيساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك :

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة.



مسائل مهارات التفكير العليا

36) اكتشف الخطأ: حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

خالد	بلال
$4^{3p} = 10$	$4^{3p} = 10$
$\log 4^{3p} = \log 10$	$\log 4^{3p} = \log 10$
$p \log 4 = \log 10$	$3p \log 4 = \log 10$
$p = \dfrac{\log 10}{\log 4}$	$p = \dfrac{\log 10}{3 \log 4}$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مسائل مهارات التفكير العليا

37) تحدٍّ: حل المعادلة $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 3$ لتجد قيمة x . وفسّر كل خطوة.

الفصل الثالث: المتطابقات والمعادلات المثلثية

شعارنا اليوم : كفاح حتى النجاح

المتطابقات والمعادلات المثلثية

التهيئة

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا:

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ.

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مراجعة المفردات

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

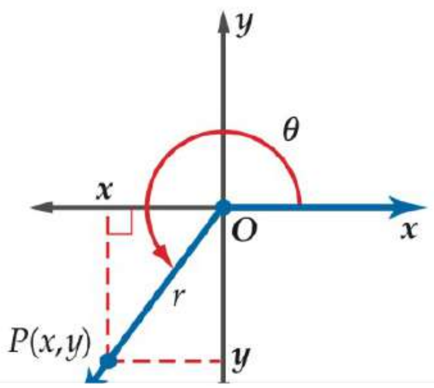
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angles):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$ $\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$

$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$



اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

1) $-16a^2 + 4a$

2) $5x^2 - 20$

3) $4x^2 - x + 6$

4) $2y^2 - y - 15$

اختبار سريع

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\ \text{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)\ \text{cm}$، فما عرضها؟

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اختبار سريع

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

6) $x^2 + 6x = 0$

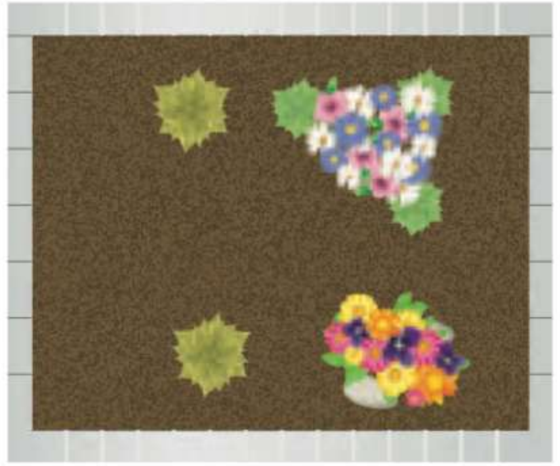
7) $x^2 + 2x - 35 = 0$

8) $x^2 - 9 = 0$

9) $x^2 - 7x + 12 = 0$

اختبار سريع

10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\,ft^2$ ، وبعديه عددان صحيحان ، فأوجد قيمة x الممكنة.



x ft

$(x + 1)$ ft

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اختبار سريع

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

11) $\sin 45°$

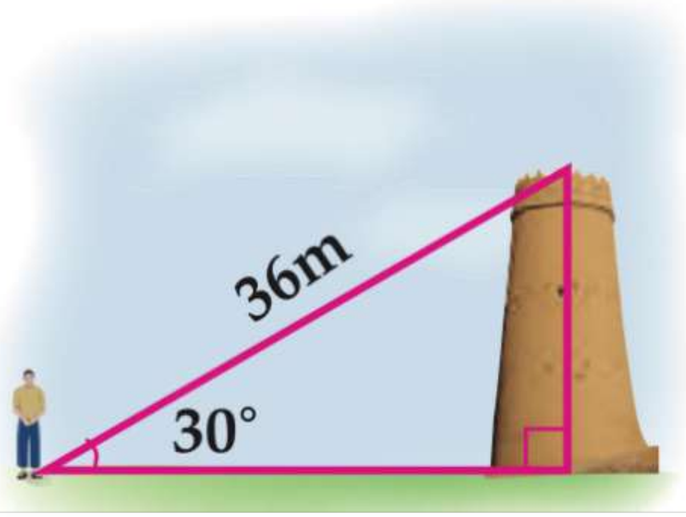
12) $\cos 225°$

13) $\tan 150°$

14) $\sin 120°$

اختبار سريع

15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

أشكركم على حسن تفاعلكم!

هل توجد أي أسئلة لطرحها؟

كن ملهماً لنفسك ، عظيماً بما تسعى له ، وأبدأ يومك متفائلاً ومتطلعاً للأفضل..

صباح الإيجابية والكفاح.

المتطابقات المثلثية

ثالث ثانوي _رياضيات ٥

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

المتطابقات المثلثية

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة
identity

المتطابقة المثلثية
trigonometric identity

المتطابقات النسبية
quotient identities

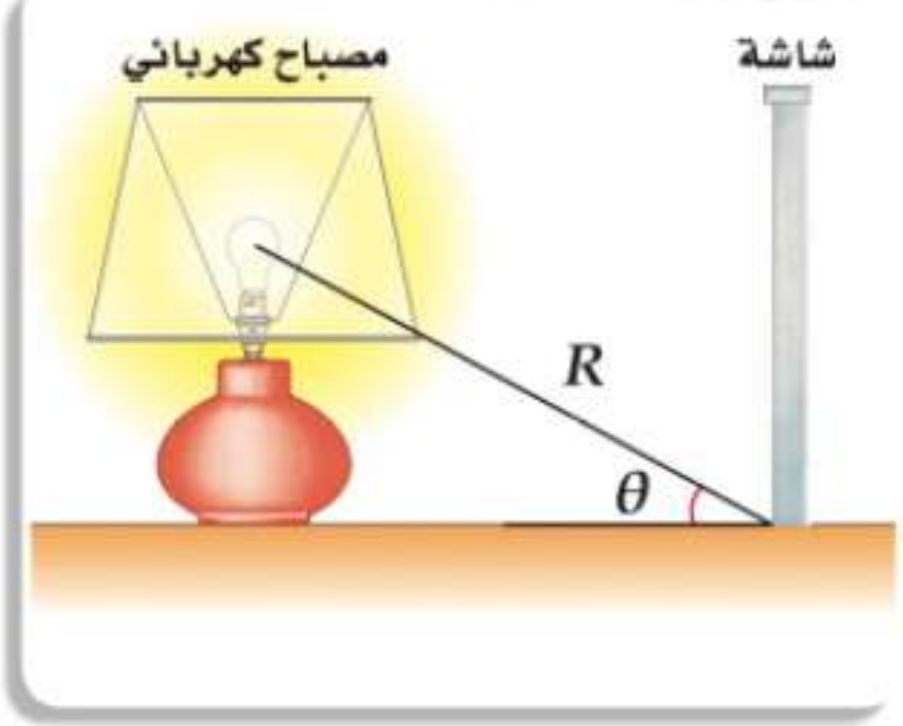
متطابقات المقلوب
resiprocal identities

متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities

متطابقات الزاويتين المتتامتين
cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية
odd-even identities

لماذا:



تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.

المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

المتطابقات المثلثية

مفهوم أساسي — **المتطابقات المثلثية الأساسية**

المتطابقات النسبية:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب:

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta},\ \csc\theta \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},\ \sec\theta \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$$

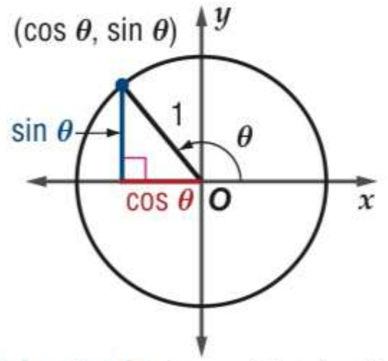
$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta},\ \cot\theta \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},\ \tan\theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$



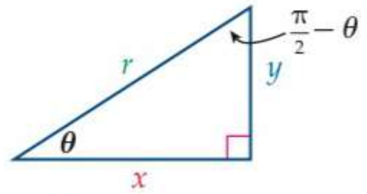
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

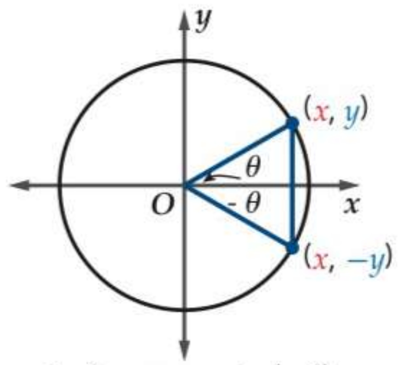
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



$\sin\theta = y \qquad \sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x \qquad \cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين: يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$

مثال ١ : استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقات فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	عوّض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$	أوجد مربع العدد $\frac{1}{4}$
$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1}\frac{1}{4}$

$$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48° \qquad \text{استعمل الحاسبة}$$

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$$

$$-0.968 \approx -0.97 \ ✓$$

b) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\csc\theta$ إذا كان $270° < \theta < 360°$; $\cot\theta = -\frac{3}{5}$

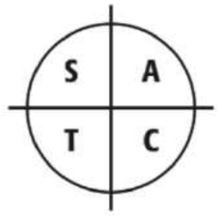
$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	متطابقات فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$	عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$	أوجد مربع العدد $-\frac{3}{5}$
$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$	$\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$
$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$	خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

إرشادات للدراسة

الأرباع: يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\csc\theta$		
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\sec\theta$		
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\cot\theta$		



A all functions
S sine
T tangent
C cosine

تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

1B) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

مثال ٢ : تبسيط العبارات المثلثية

بسّط العبارة : $\dfrac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\,\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{1}{\tan\theta}}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}}$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية

عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب$(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

تحقق من فهمك

2A) $\dfrac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

2B) $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

مثال ٣ من واقع الحياة : إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لِـ E.

$\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$	المعادلة الأصلية
$E\sec\theta = \frac{I}{R^2}$	اضرب كلا الطرفين في E
$E\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
$E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$	اضرب كلا الطرفين في $\cos\theta$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسِّر إجابتك.

$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$	المعادلة الأصلية
$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta$	اضرب كلا الطرفين في E
$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2}$	اقسم كلا الطرفين على R^2
$E = \frac{I\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$	بسّط

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع **(a)** تكتب على الصورة: $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$.

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة . $\tau = Fr \sin \theta$
أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a) = -\tan a$ تمثّل متطابقة.

31) **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ على الصورة:

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

32) **اكتشف الخطأ:** بسِّط كل من علاء وسامي المقدار $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

علاء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \tan^2\theta + 1$$

$$= \sec^2\theta$$

سامي

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1}$$

$$= \sin^2\theta$$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.

(الدرس 1–3)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

لماذا:

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin \theta = \frac{v^2}{gR}\cos \theta$، حيث $0° < \theta < 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل أحد طرفي المتطابقة : يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي

إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسِّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال ١: اثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$	الطرف الأيسر
$= \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$	اضرب كلًا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$
$= \dfrac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$	$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$
$= \dfrac{\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$	$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$
$= 1+\cos\theta$ ✓	اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$
= الطرف الأيمن	

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال ٢: على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ **C** $\cot^2\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\csc^2\theta$

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلّك اختر قيمة لـ θ. وعوّض بها في البديل المختار، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوالّ دوالَّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اقلب المقام واضربه بالبسط}$$

$$= \cot\theta\cdot\cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{اضرب}$$

الجواب هو C.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta\,(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل طرفي المتطابقة : في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي — اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّل أو اضرب كلًّا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب ، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

مثال ٣: اثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta \cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

نبسِّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta \cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اضرب}$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اطرح}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تنبيه!

تبسيط الطرفين

تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عملية التحقق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تدرب وحل المسائل:

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

تدرب وحل المسائل:

11) اختيار من متعدد: أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$ ؟

(مثال 2)

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

49) **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.

الفشل ليس إلا فرصة لتجربة طريقاً آخر

رياضيات ٥

المتطابقات المثلثية
لمجموع زاويتين والفرق بينهما

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

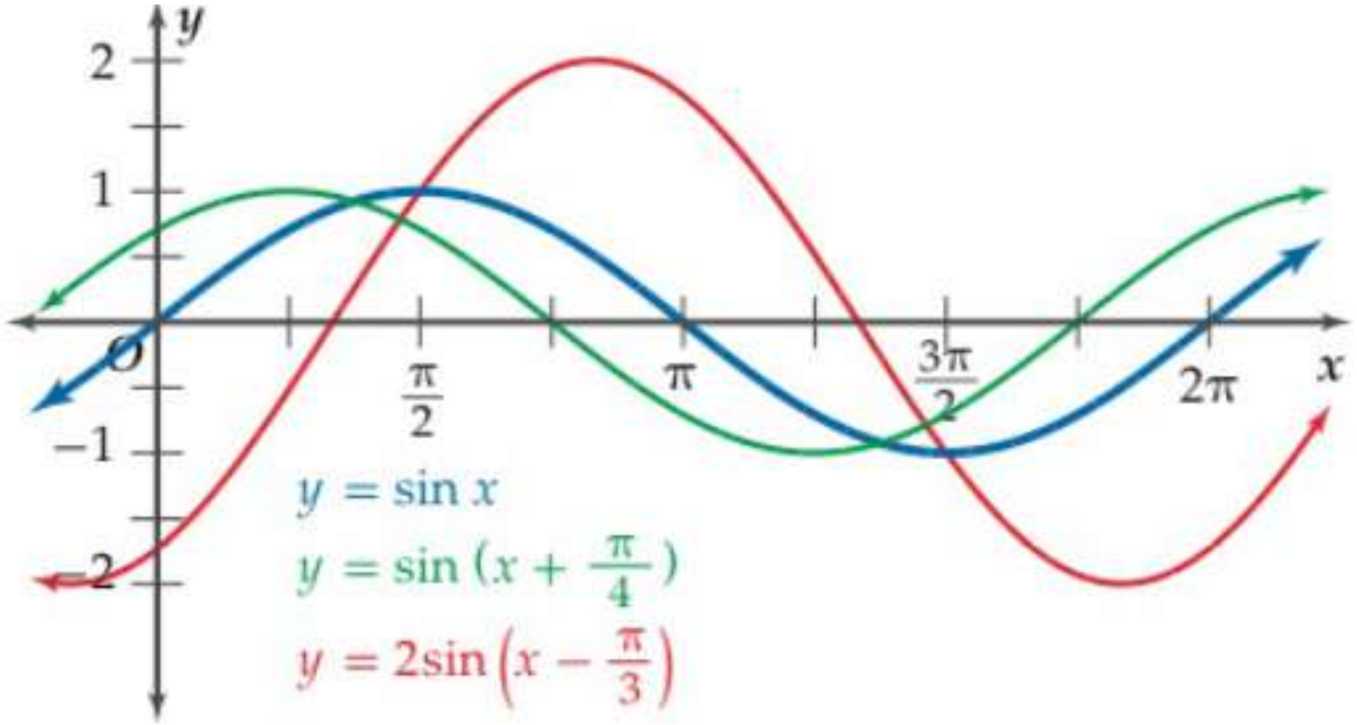
درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

لماذا

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟



تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا. ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.

متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمّن جمع الزاويتين $\frac{\pi}{4}$, x. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin(60° - 45°)$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مفهوم أساسي

متطابقات المجموع

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

متطابقات الفرق

- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال ١ إيجاد القيم المثلثية

$\sin 105°$ (a

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ وَ $60°$ يساوي $105°$، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$105° = 60° + 45°$ $\quad \sin 105° = \sin(60° + 45°)$

متطابقة المجموع $\quad = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

عوّض $\quad = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

بسّط $\quad = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة:

كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين $360°$, $0°$، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

مثال ١ إيجاد القيم المثلثية

b) $\cos(-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:
$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\cos(-120°) = \cos(60° - 180°)$	$-120° = 60° - 180°$
$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180°$	متطابقة الفرق
$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$	عوّض
$= -\frac{1}{2}$	بسّط

تحقق من فهمك

1A) $\sin 15^\circ$

1B) $\cos(-15^\circ)$

مثال٢ من واقع الحياة: استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين من الزوايا الخاصة.

$c = 3 \sin 165°t$	الصيغة الأصلية
$= 3 \sin (120°t + 45°t)$	$120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$	المعادلة بحسب الفرع a
$= 3 \sin (120° + 45°)$	$t = 1$
$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$	متطابقة المجموع
$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$	عوّض مستعملًا الزاوية المرجعية $(\theta = 60°)$
$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	اضرب
$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$	بسّط

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

تحقق من فهمك

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

مثال ٣ اثبات صحة المتطابقات المثلثية:

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta)$	الطرف الأيسر
$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta$	متطابقة الفرق
$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$	عوِّض
$= \sin \theta$ ✓	بسِّط
= الطرف الأيمن	

مثال ٣ اثبات صحة المتطابقات المثلثية:

b) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$	الطرف الأيسر
$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$	متطابقة المجموع
$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$	عوِّض
$= \cos\theta$ ✓	بسِّط
= الطرف الأيمن	

تحقق من فهمك

3A) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مسائل مهارات التفكير العليا

30) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot(A + B)$ بدلالة $\cot A, \cot B$.

تدريب على الإختبار

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة:

$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\sqrt{3}$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

لا تخف من المسافة بين الحلم والحقيقة.. فما دمت استطعت أن تحلم بشيء فبإمكانك تحقيقه..

المتطابقات المثلثية

لضعف الزاوية ونصفها

رياضيات ٥

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3–3)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta,\ H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال 1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، فإننا نجد $\cos\theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$	عوّض $\sin\theta = \frac{2}{3}$
$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$	ربّع ثم اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$	خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	متطابقة ضعف الزاوية
$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$	$\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$	اضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$، $180^\circ > \theta > 90^\circ$.

مـثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $0° < \theta < 90°$; $\sin \theta = \frac{2}{3}$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\cos \theta, \sin \theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$ متطابقة ضعف الزاوية

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$ $\sin \theta = \frac{2}{3}$

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $0° < \theta < 90°$; $\sin\theta = \frac{2}{3}$:

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan\theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ تعريف دالة الظل

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$ $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$ بالقسمة وإنطاق المقام

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3};\ 0° < \theta < 90°$:

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \quad \tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25}-\frac{20}{25}} \quad \text{ربّع المقام}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \quad \text{بسّط}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $90° < \theta < 180°$; $\cos\theta = -\frac{1}{3}$:

2A) $\cos 2\theta$

2B) $\tan 2\theta$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ في إيجاد جيب نصف الزاوية θ أو $\sin\frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ في إيجاد جيب تمام نصف الزاوية θ أو $\cos\frac{\theta}{2}$.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

مـثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos \frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$	استعمل متطابقة فيثاغورس
$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$	$\sin \theta = -\frac{4}{5}$
$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$	$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$	اطرح
$\cos \theta = \pm\frac{3}{5}$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$	متطابقة نصف الزاوية
$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$	$\cos \theta = -\frac{3}{5}$
$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$	بسّط
$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$	بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ و $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ و $135°$. إذن، $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة

أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos \frac{135°}{2}$	$67.5° = \frac{135°}{2}$
$= \sqrt{\frac{1 + \cos 135°}{2}}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ، $67.5°$ في الربع الأول، فالقيمة موجبة
$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$\cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$1 = \frac{2}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$	اطرح
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$	اضرب
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	بسّط

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

مثال 4 من واقع الحياة — التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بسّط كلًا من البسط والمقام

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بسّط

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بسّط

$$= \frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17 \sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة **g** عندما $L = 45°$.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$.

$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$	الطرف الأيمن
$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$	اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sin\theta$
$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$	اضرب في $1 = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$
$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$	اضرب
$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$= \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ ✓	$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$
= الطرف الأيسر	

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لِـ : $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

سعيد

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$

$$= 0.5$$

مسائل مهارات التفكير العليا

30) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin(A+B)$ لاشتقاق صيغة لِـ $\sin 2\theta$ ، واستعمل الصيغة $\cos(A+B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) تبرير: اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

مسائل مهارات التفكير العليا

لاتقارن نفسك بالآخرين ، افهم ذاتك
وانطلق..

حل المعادلات المثلثية

رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

حل المعادلات المثلثية

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية.

(الدروس من 2–3 إلى 4–3)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية

trigonometric equations

لماذا

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها $40\,\text{m}$، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$$h = 21 - 20\cos 3\pi t\ .$$

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع $31\,\text{m}$ عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية : درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

مثال ١ حل المعادلات على فترة معطاه

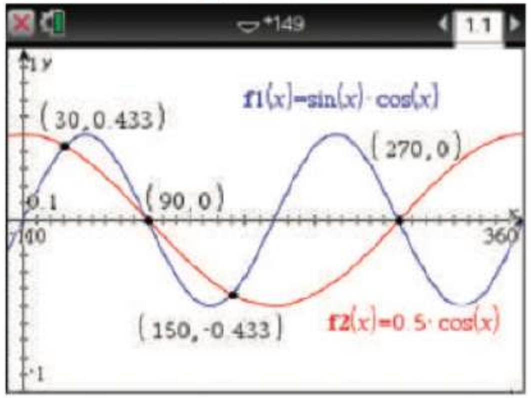
حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ ، إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$.

المعادلة الأصلية	$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$
حلّل بأخذ عامل مشترك	$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$
	$\theta = 90°$ أو $270°$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$
الزاوية المرجعية للزاوية °150 هي °30	$\theta = 30°$ أو $150°$

الحلول هي $30°, 90°, 150°$ فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$

التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin\theta\cos\theta, y = \frac{1}{2}\cos\theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين °0 و °180 فقط.



إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية
حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال ١ حل المعادلات على فترة معطاه

b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$ المعادلة الأصلية

$$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$$ حلّل

$$2\sin\theta + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad \sin\theta - 2 = 0$$ خاصية الضرب الصفري

$$2\sin\theta = -1 \qquad \sin\theta = 2$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

التحقق:

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

تحقق من فهمك

1A) حُل المعادلة $\cos x \sin x = 3 \cos x$، إذا كانت $0 \leq x \leq 2\pi$.

تحقق من فهمك

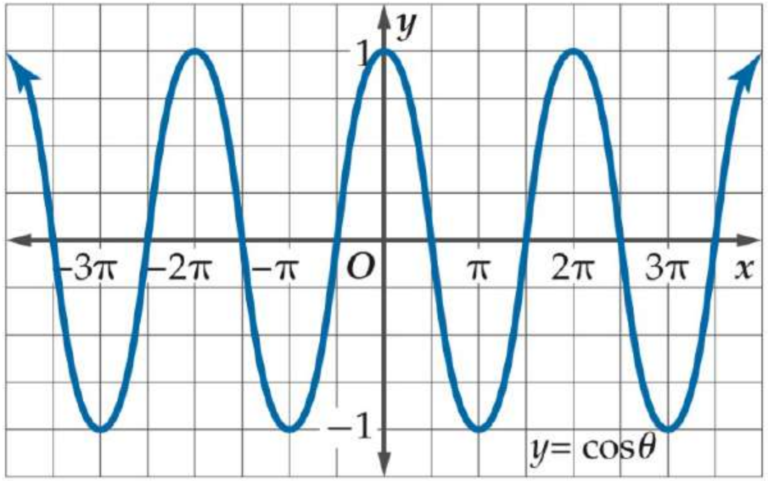
1B) حُل المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

مثال ٢ معادلة مثلثية لها عدد لانهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos \theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos \theta + 1 = 0$$
$$\cos \theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos \theta$ ؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos \theta = -1$.



الحلول هي ... $\pi, 3\pi, 5\pi,$ ... ، وكذلك ... $-\pi, -3\pi, -5\pi,$ ... ، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π. طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

تحقق من فهمك

2A) حُل المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

تحقق من فهمك

2B) حُل المعادلة $2 \sin \theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

مثال٣ من واقع الحياة

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض 31 بدلًا من h
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كلا الطرفين
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كلا الطرفين على -20
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	خذ معكوس جيب التمام

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ ، k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ، $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال ٤ حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$	المعادلة الأصلية
$\sin^2\theta = (1+\cos\theta)^2$	ربع
$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$	بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين
$0 = 2\cos\theta(1+\cos\theta)$	حلّل
$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$	خاصية الضرب الصفري
$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$	
$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$	

التحقق:

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180°$$
$$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$$
$$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$1 = 1 \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$$
$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$-1 \ne 1 \times$$

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

تحقق من فهمك

$\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$ (4

مثال ٥ حل معادلات مثلثية باستخدام متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ حلّل

$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta = -1$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي : $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٥ حل معادلات مثلثية باستخدام متطابقات

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$$

$$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$$

$$8 - 9 = -1 \checkmark$$

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$$

$$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$$

$$8 - 9 = -1 \checkmark$$

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو π، وهذا يبرر كتابة الحلول في الصورة:

$\theta = 60° + 180°k$

$\theta = 120° + 180°k$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0$

5B) $\dfrac{\cos \theta}{\cot \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0$

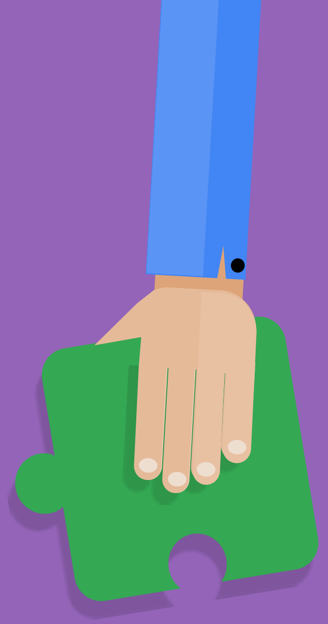
31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$ ، $0° \leq \theta \leq 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هلا

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$
$$\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$$
$$2 \cos \theta = 1$$
$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 60°, 300°$$

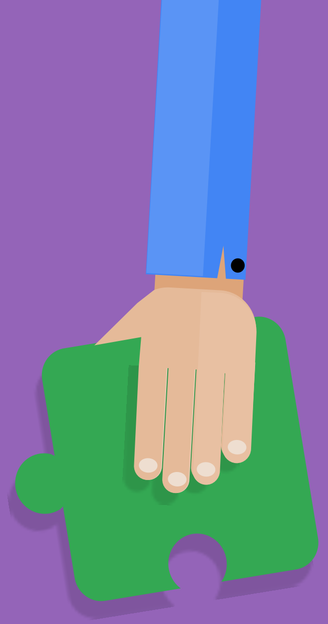
ليلى

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$
$$-\sin \theta = -\sin \theta$$
$$2 \cos \theta = 0$$
$$\cos \theta = 0$$
$$\theta = 90°, 270°$$



مسائل مهارات التفكير العليا

33) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟



مسائل مهارات التفكير العليا

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

شكراً لكم

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

الفصل الرابع :القطوع المخروطية

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أتقن عملك ، تحقق أملك

القطوع المخروطية

التهيئة

رياضيات ٥

374

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

فيما سبق :

درستُ تمثيل الدالة التربيعية (والتي تمثل قطعًا مكافئًا) ، ودالة المقلوب (والتي تمثل قطعًا زائدًا). الدرس (5-3)

والآن :

- أُحَلل معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتبُ معالادت القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلُّ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا :

فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضاوية الشكل تشبه القطوع الناقصة، أمّا المذنّبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، ممّا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلهما البياني.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations):

هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line):

يكون المستقيم مماسًا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

محور التماثل (axis of symmetry):

مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

إكمال المربع (completing the square):

لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:

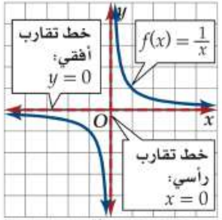
1) أوجد نصف معامل x ؛ أي نصف b.

2) ربِّع الناتج في الخطوة (1) .

3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

خط التقارب (asymptote):

هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$

2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$

4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$

5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$

6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

اختبار سريع

7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًّا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة.

اختبار سريع

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$

10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$

13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

اختبار سريع

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

14) $x^2 + 8x$

15) $x^2 - 18x$

اختبار سريع

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

16) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)}$

17) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

اختبار سريع

18) **هدية:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوبًا ورقيًّا لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثِّل هذا الموقف، ومثِّلها بيانيًّا.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

شكراً لكم

الآن نستطيع الانطلاق في باب القطوع المخروطية

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

يوماً ما سأقول : (لم يكن الأمر سهلاً) ولكنني فعلتها

القطوع المكافئة

رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق :

درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانياً.
(مهارة سابقة)

والآن :

- أحَللُ معادلات قطوع مكافئة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات :

القطع المخروطي
conic section

المحل الهندسي
locus

القطع المكافئ
parabola

البؤرة
focus

الدليل
directrix

محور التماثل
axis of symmetry

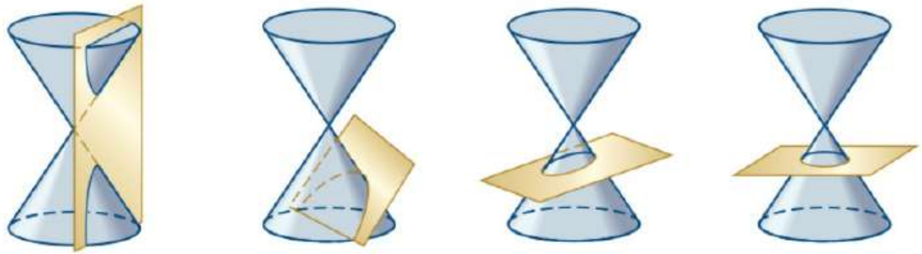
الرأس
vertex

الوتر البؤري
latus rectum

لماذا:

استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس.
والقطوع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.

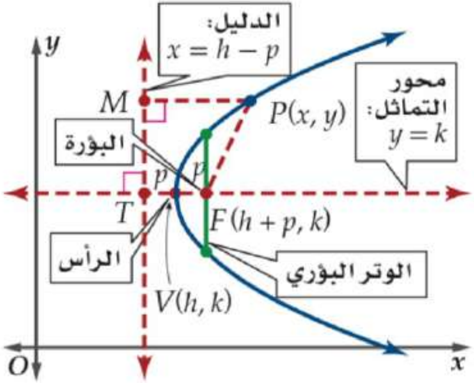


الدائرة | القطع الناقص | القطع المكافئ | القطع الزائد

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًّا :

المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة (**تسمى البؤرة**) مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم (**يسمّى الدليل**).

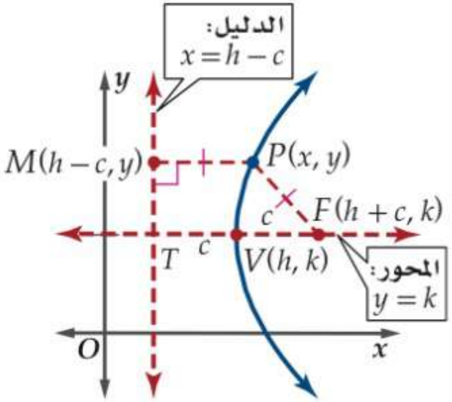


والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل).

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.



نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

قانون المسافة بين نقطتين
$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-y)^2}$$

ربِّع الطرفين
$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2 = [x-(h-c)]^2+0^2$$

فك الأقواس
$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

فك الأقواس
$$x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2$$

بسّط
$$(y-k)^2 = 4xc-4hc$$

حلّل
$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$

قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع

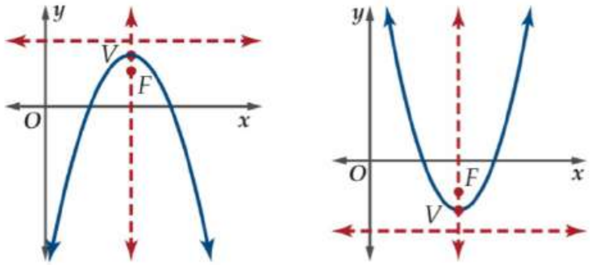
ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًا (إلى اليمين أو اليسار).

أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.

وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

مفهوم أساسي — خصائص القطع المكافئ

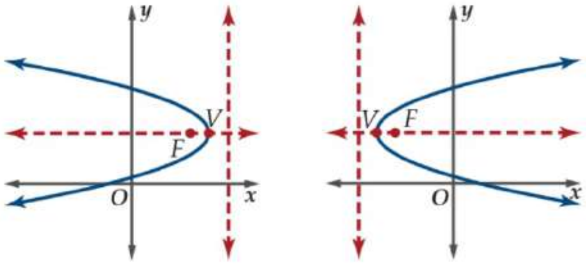
المعادلة في الصورة القياسية: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$



$c > 0$ $c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k+c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\lvert 4c \rvert$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y-k)^2 = 4c(x-h)$



$c > 0$ $c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h+c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\lvert 4c \rvert$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل .

مثال ١

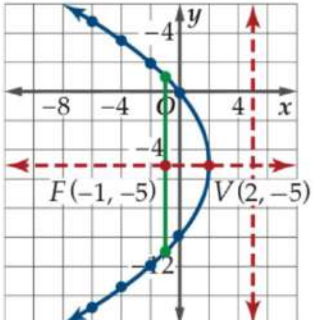
تحديد خصائص القطع المكافئ، وتمثيل منحناه بيانياً

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	الدليل:	$x = 5$	$x = h - c$
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h + c, k)$	محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$
طول الوتر البؤري:	12	$\|4c\|$			

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري
لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبؤرة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ
يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:
– مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x، وكانت $c > 0$.
– مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x، وكانت $c < 0$.
– مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y، وكانت $c > 0$.
– مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y، وكانت $c < 0$.

تحقق من فهمك

1A) $8(y+3)=(x-4)^2$

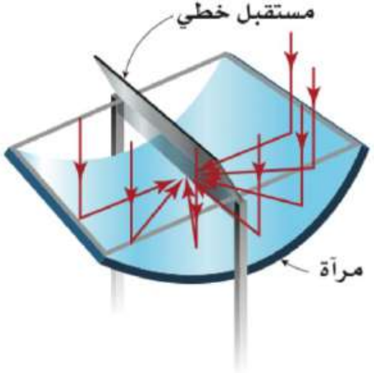
1B) $2(x+6)=(y+1)^2$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال من واقع الحياة

خصائص القطع المكافئ

طاقة شمسية: يتكون مجمّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$ ، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع ، أين يقع المستقبل الخطّي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k + c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

تحقق من فهمك

2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8\,(y - 6)$، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x , y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

مثال ٣

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المحدد، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

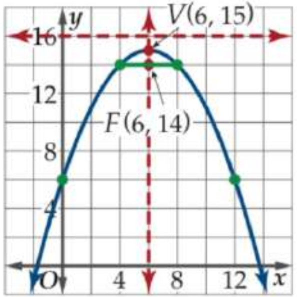
$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$	المعادلة الأصلية
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$	أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$	أكمل المربع
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$	$-\frac{1}{4}(-36) = 9$
$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$	حلّل
$-4(y - 15) = (x - 6)^2$	اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (-4)

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و $c = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

الرأس: $(6, 15)$ $\quad (h, k)$ الدليل: $y = 16$ $\quad y = k - c$

البؤرة: $(6, 14)$ $\quad (h, k + c)$ محور التماثل: $x = 6$ $\quad x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $\quad |4c|$



عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

مثال ٤

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

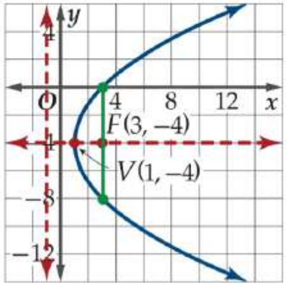
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y ، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$ ، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$	$c = 2, h = 1, k = -4$
$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$	بسِّط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثِّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x ، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

مثال ٤

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

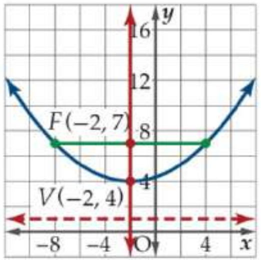
استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$y = k - c$	معادلة الدليل
$1 = 4 - c$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -c$	اطرح 4 من الطرفين.
$3 = c$	اقسم كلا الطرفين على -1 .

عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	الصورة القياسية
$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$	$h = -2, k = 4, c = 3$
$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$	بسّط

طول الوتر البؤري يساوي $12 = |4 \times 3| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



إرشادات للدراسة

الدليل

يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

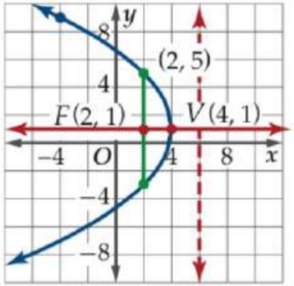
مثال ٤

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$(5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$	$h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4c(c)$	بسّط
$4 = c^2$	بسّط
$\pm 2 = c$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين



بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو $(4, 1)$.

$$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$$

طول الوتر البؤري يساوي $8 = |(-2) \times 4| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

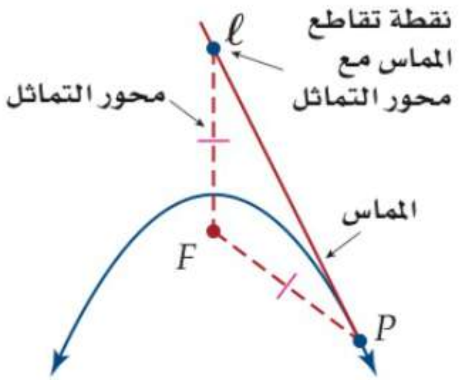
4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مفهوم أساسي مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

– إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$

– إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع

مثال ٥

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

المنحنى مفتوح أفقيًّا.

$$x = y^2 + 3 \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$1(x - 3) = (y - 0)^2 \qquad \text{الصورة القياسية}$$

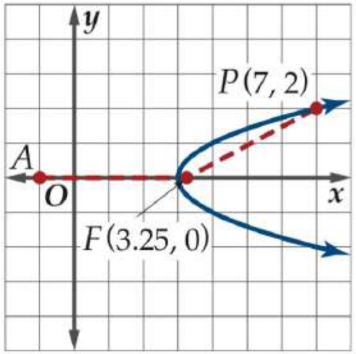
بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$ ، والبؤرة $(3.25, 0)$.

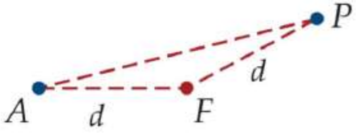
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٥

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافيء

الخطوة الثانية : أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F، ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ صيغة المسافة

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$$ $(x_2, y_2) = (7, 2)$ و $(x_1, y_1) = (3.25, 0)$

$$= 4.25$$ بسّط

مثال ٥

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

الخطوة الثالثة : أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل) بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة : أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$$m = \frac{2-0}{7-(-1)} = \frac{1}{4}$$ صيغة الميل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$$ $m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$

$$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$$ خاصية التوزيع

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$$ اجمع 2 إلى الطرفين

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1

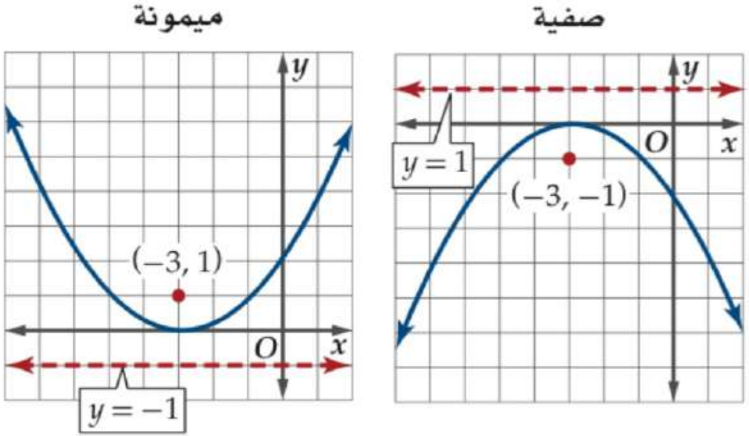
تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

مسائل
مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانيًّا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مسائل
مهارات التفكير العليا

37) **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تم بحمد الله

شكراً لكم

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

لاتستسلم .. هناك نجاح ينتظر وصولك إليه

القطوع الناقصة والدوائر

رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق :

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا.
(الدرس 1—4)

والآن :

- أُحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأُمثّلهما بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

المفردات :

القطع الناقص
ellipse

البؤرتان
foci

المحور الأكبر
major axis

المركز
center

المحور الأصغر
minor axis

الرأسان
vertices

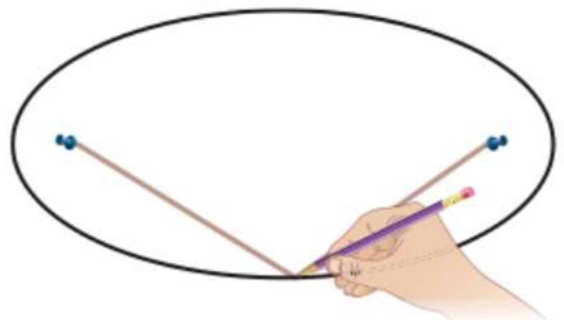
الرأسان المرافقان
co-vertices

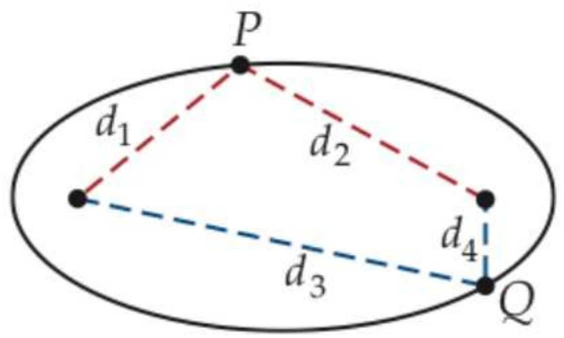
الاختلاف المركزي
eccentricity

لماذا:

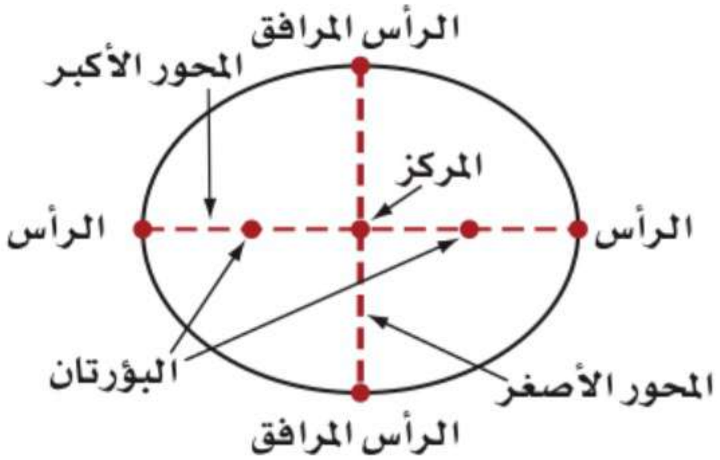
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًّا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**، وعمليًّا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البورتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .



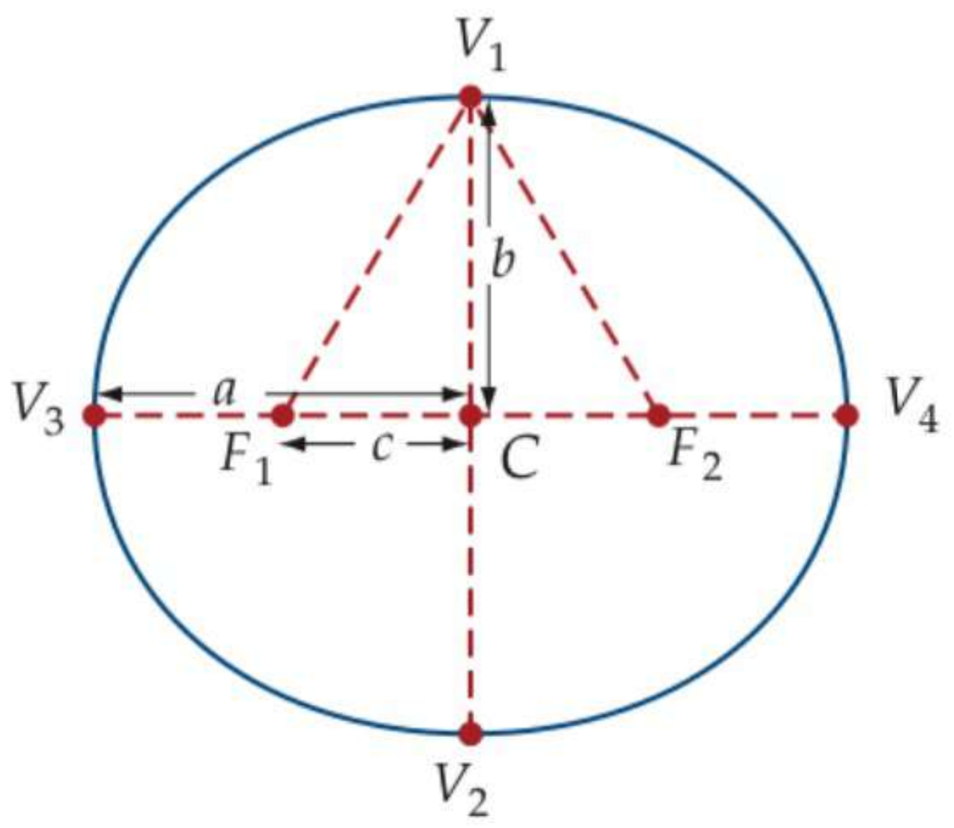


تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمىّ نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة.

وفيما يلي توضيحٌ للعلاقة بين a, b, c

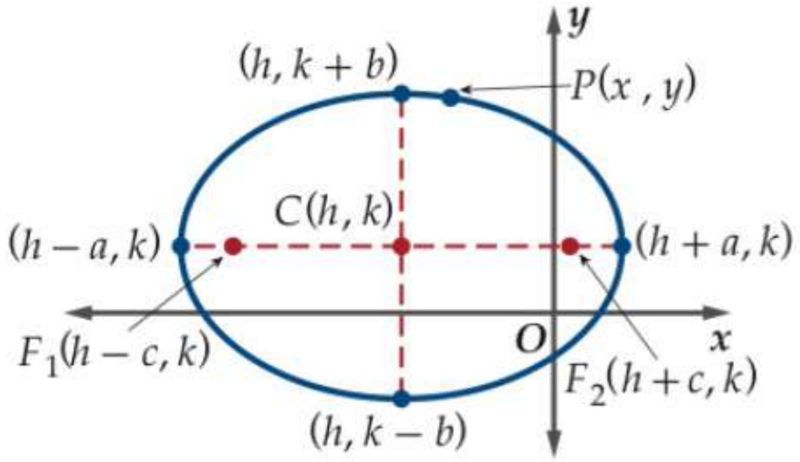


بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS $(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_2C})$ فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1 ، V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c.

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:



افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.

تعريف القطع الناقص

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

خاصية التوزيع ثم التجميع

$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a$$

اطرح

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين

$$(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$

بسّط

$$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$$

اقسم كلا الطرفين على 4

$$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$$

ربّع الطرفين

$$a^2[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

خاصية التوزيع

$$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

بسّط

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$a^2 - c^2 = b^2$

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

اقسم الطرفين على a^2b^2

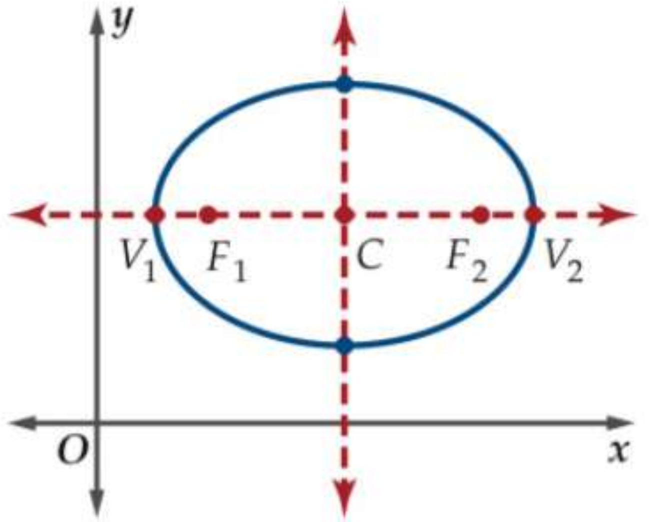
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k)، حيث $a > b$، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

مفهوم أساسي خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه : المحور الأكبر أفقي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h \pm c, k)$

الرأسان : $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان : $(h, k \pm b)$

المحور الأكبر : $y = k$ وطوله $2a =$

المحور الأصغر : $x = h$ وطوله $2b =$

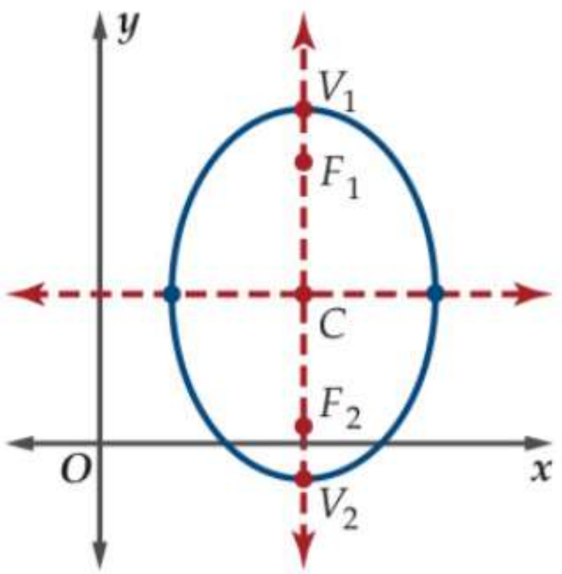
العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

طول البعد البؤري : $2C$

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه : المحور الأكبر رأسي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

الرأسان : $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان : $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر : $x = h$ وطوله $2a =$

المحور الأصغر : $y = k$ وطوله $2b =$

العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

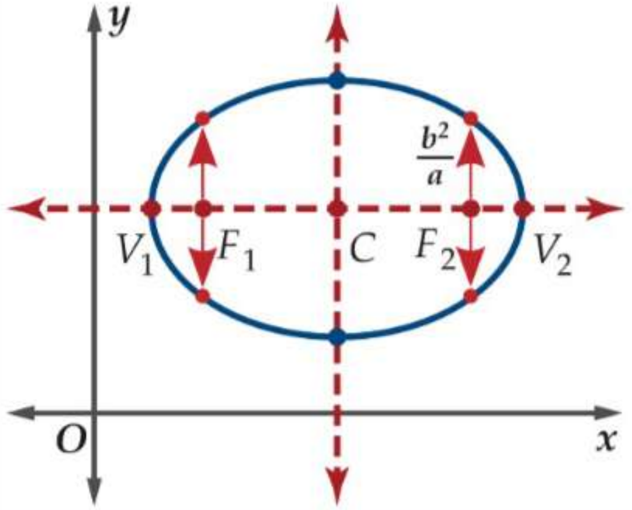
طول البعد البؤري : $2C$

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.

لرسم القطع الناقص نعين نقاطًا مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين.



مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

a) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

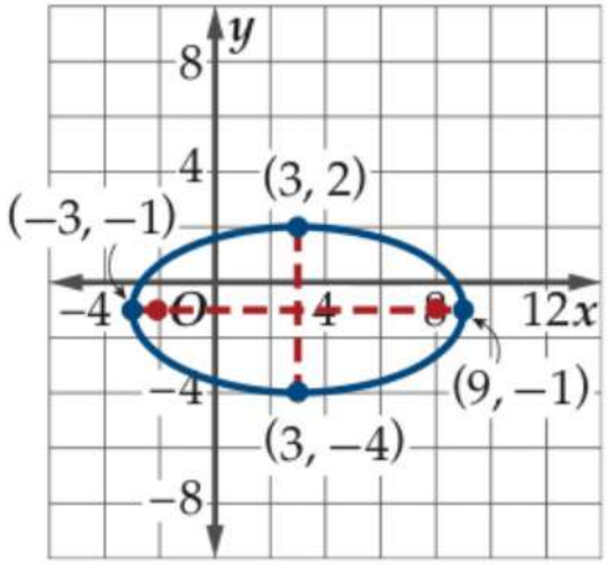
المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث

$h=3, k=-1, a=\sqrt{36}=6, b=\sqrt{9}=3, c=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(-3, -1)$ و $(9, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, -4)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y=-1$، وطوله 12	$y=k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x=3$، وطوله 6	$x=h$، طول المحور الأصغر $2b$

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

b) $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

المعادلة الأصلية	$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$
جمّع الحدود المتشابهة	$(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$
حلّل	$4(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = -24$
كمّل المربعين	$4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -24 + 4(9) + 4$
حلّل وبسّط	$4(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$
اقسم الطرفين على 16	$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

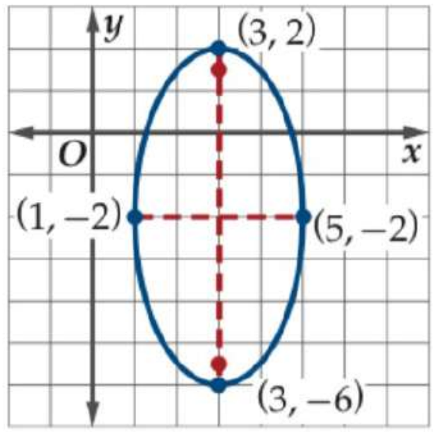
المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(3, -6)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(5, -2)$ و $(1, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x = 3$، وطوله 8	$x = h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y = -2$، وطوله 4	$y = k$، طول المحور الأصغر $2b$

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



تحقق من فهمك

1A) $\dfrac{(x-6)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(1B $x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-3, -3)$, $(-9, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a , b .

نصف طول المحور الأكبر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$$

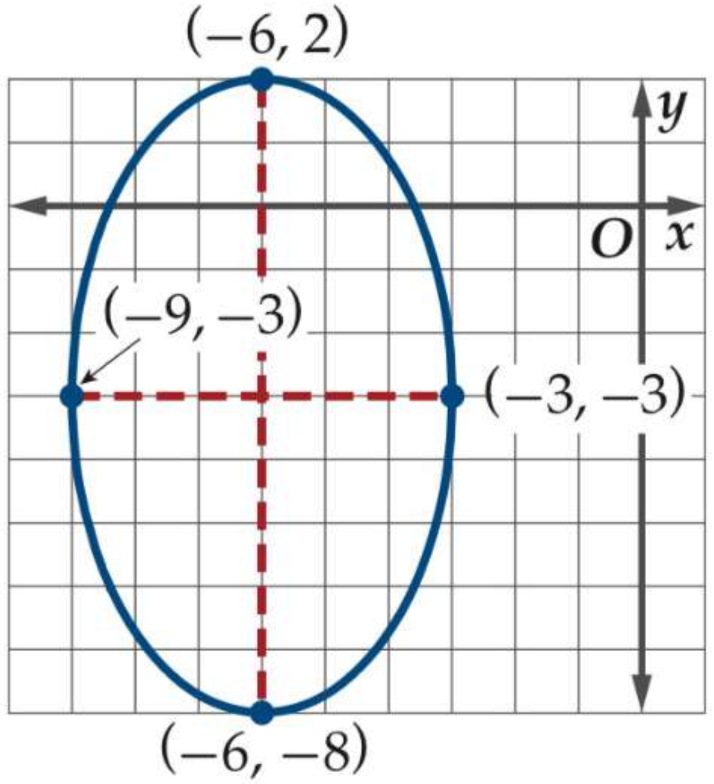
نصف طول المحور الأصغر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

$$(h, k) = \left(\frac{-6 + (-6)}{2}, \frac{2 + (-8)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (-6, -3)$$ بسِّط



الشكل 4.2.1

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

b) الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.

طول المحور الأكبر $2a$ ، وهي المسافة بين الرأسين.

صيغة المسافة $2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2}$

بسّط $a = 5$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

صيغة المسافة $2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2}$

بسّط $c = 3$

أوجد قيمة b .

العلاقة بين a, b, c $c^2 = a^2 - b^2$

$a = 5, c = 3$ $3^2 = 5^2 - b^2$

بسّط $b = 4$

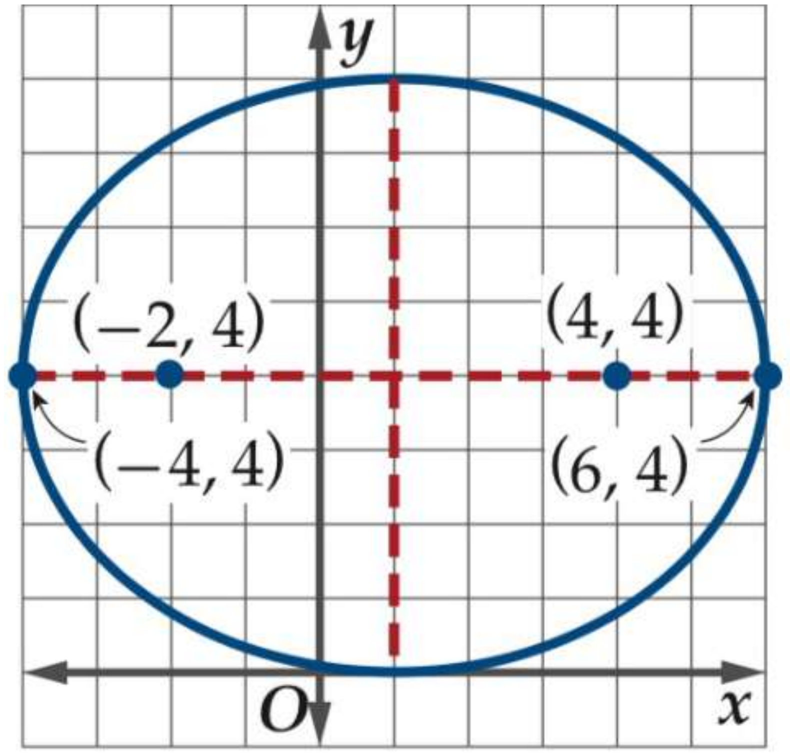
وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

صيغة نقطة المنتصف $(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$

بسّط $= (1, 4)$

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .



الشكل 4.2.2

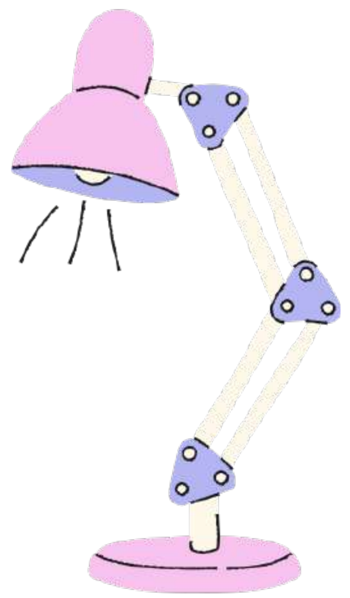
مجموعة رفعة الرياضيات

تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

تحقق من فهمك

2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

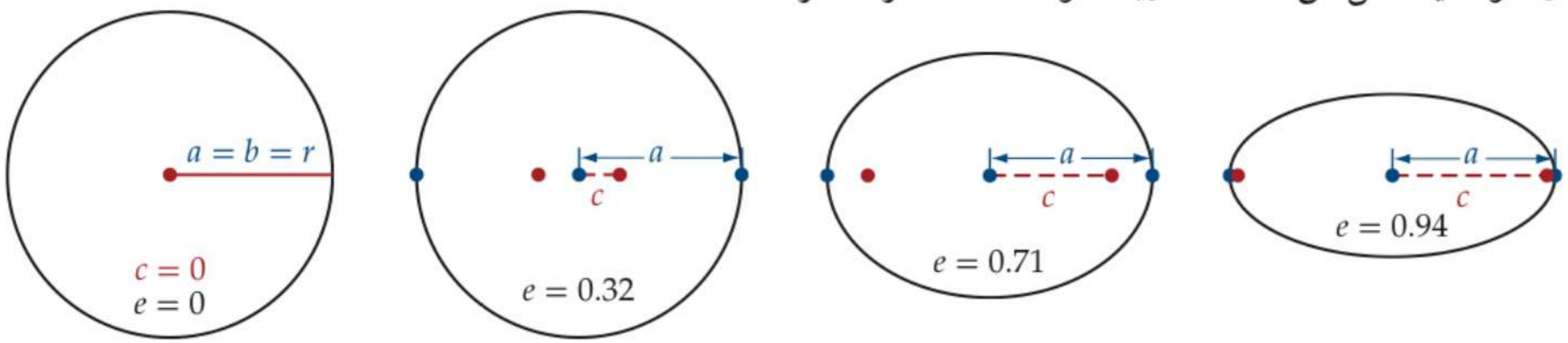


الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a. و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي — الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$، حيث $c^2=a^2-b^2$، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e=\frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي e, c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a, b مساوية لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

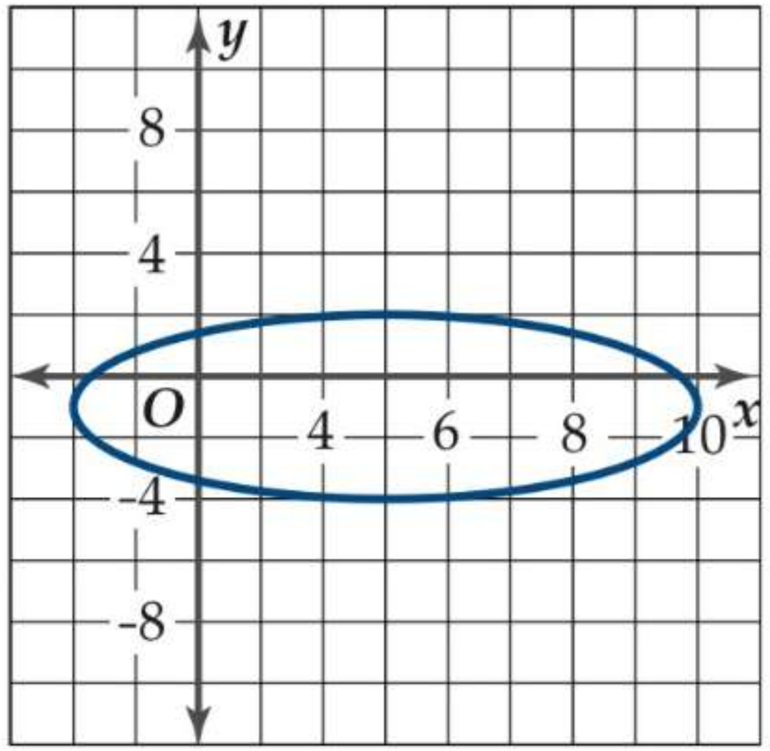
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x-6)^2}{100} = 1$.

أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$	العلاقة بين a, b, c
$c^2 = 100 - 9$	$a^2 = 100, b^2 = 9$
$c = \sqrt{91}$	بسّط

نستعمل قيمتي a, c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$	صيغة الاختلاف المركزي
$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$	$a = 10, c = \sqrt{91}$



الشكل 4.2.3

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.

تحقق من فهمك

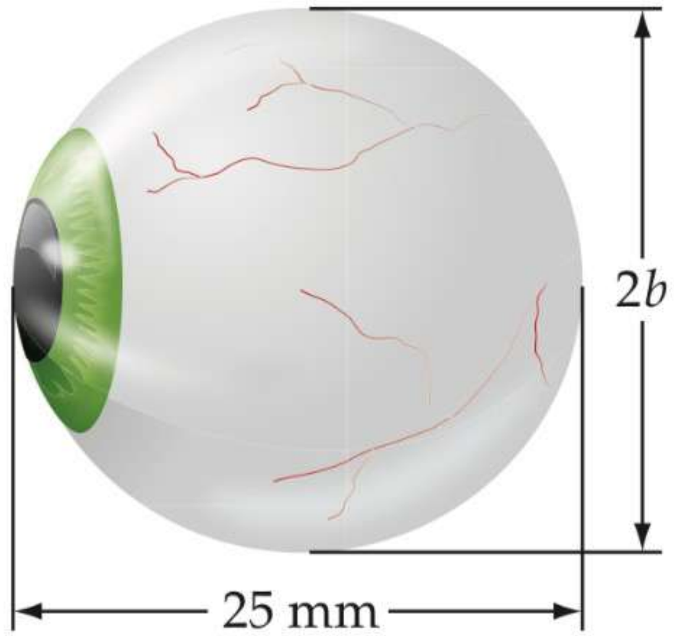
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي **25 mm** تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$ تعريف الاختلاف المركزي

$0.28 = \frac{c}{12.5}$ $e = 0.28, a = 12.5$

$c = 3.5$ اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$ $c = 3.5, a = 12.5$

$b = 12$ بسِّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$ ، ويساوي 24 mm تقريبًا .

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ معادلة القطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$ $e = 0$ عندما $a = b$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$ اضرب كلا الطرفين في a^2 .

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$ a نصف قطر الدائرة

مفهوم أساسي — الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$ الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2$$ $(h, k)=(-1, 2),\ r=\frac{8}{2}=4$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16$$ بسِّط

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$, $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h, k) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + (-8)}{2}\right)$$ $(x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (-1, -8)$

$$= \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right)$$ اجمع

$$= (3, -1)$$ بسّط

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ صيغة المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-1 - 6)^2}$$ $(x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (3, -1)$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2}$$ اطرح

$$= \sqrt{65}$$ بسّط

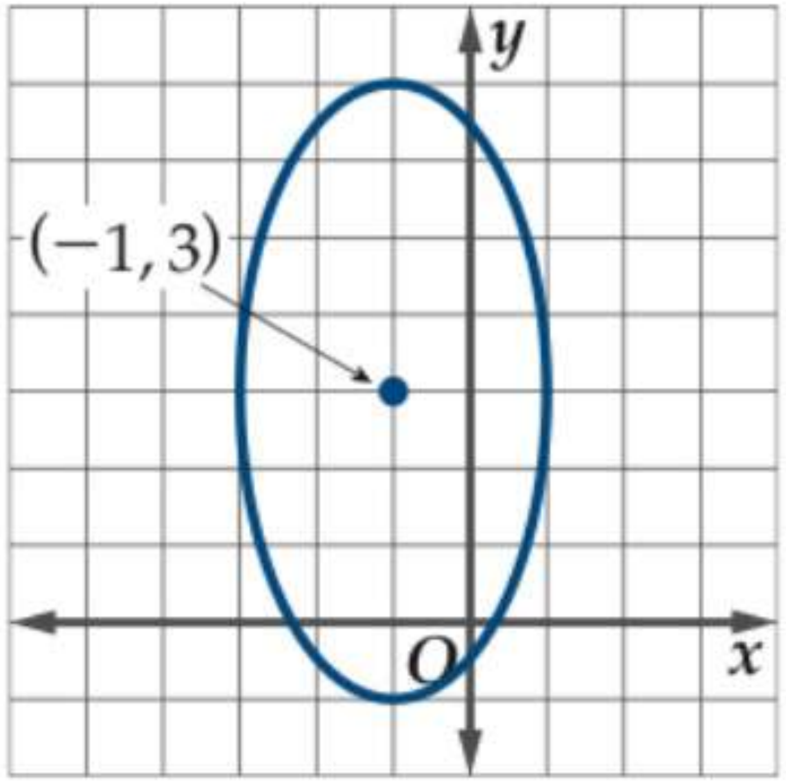
إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2 = 65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 65$.

تحقق من فهمك

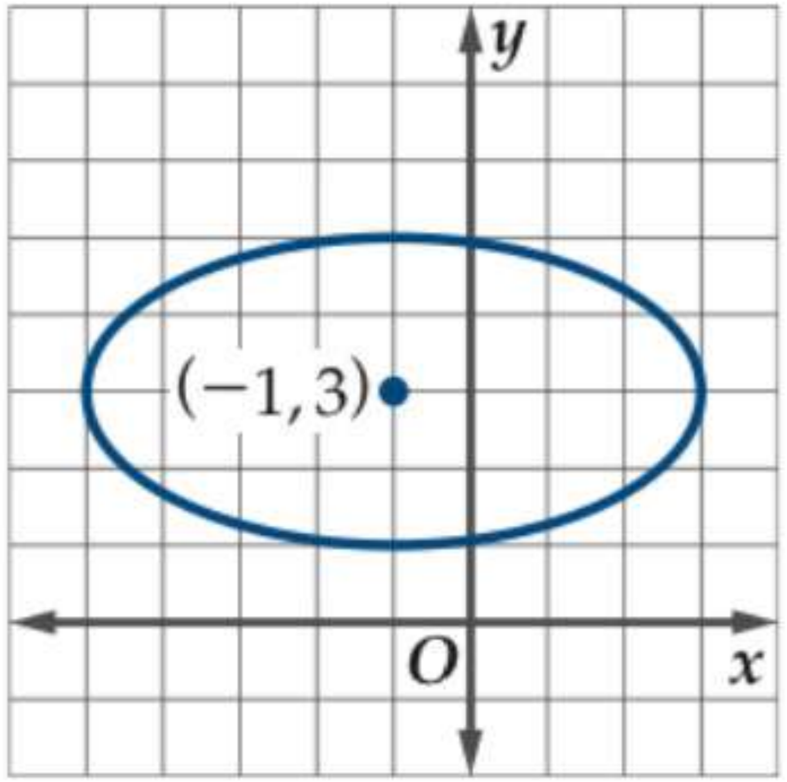
6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(5 ,1)$, $(-3 ,3)$.

37) اكتشف الخطأ: مثَّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

خالد



ياسر



صباح الخير لأصدقاء الصباح ، أتمنى أن تشرق أعينكم بهجة ، وأن تزهر قلوبكم فرحاً ، وأن يصبح يومكم لطيفاً ورائعاً ..

القطوع الزائدة

رياضيات ٥

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

القطع الزائد

فيما سبق :

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًّا.

(الدرس 2–4)

والآن :

- أحلل معادلات القطوع الزائدة، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات :

القطع الزائد
hyperbola

البؤرتان
foci

المركز
center

الرأسان
vertices

المحور القاطع
transverse axis

المحور المرافق
conjugate axis

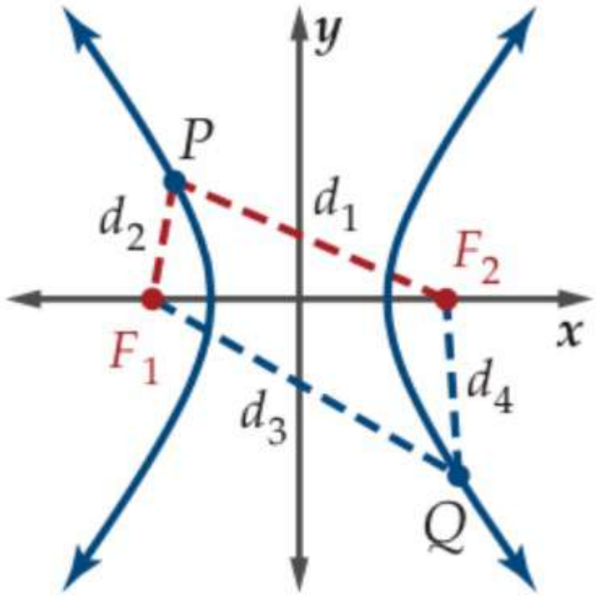
القطع الزائد

لماذا:

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقصٍ؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتَيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

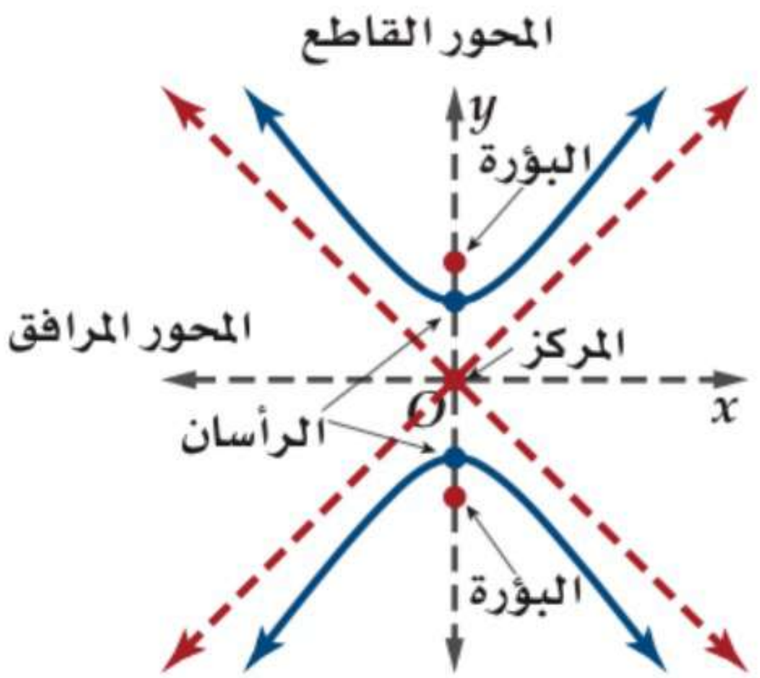
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

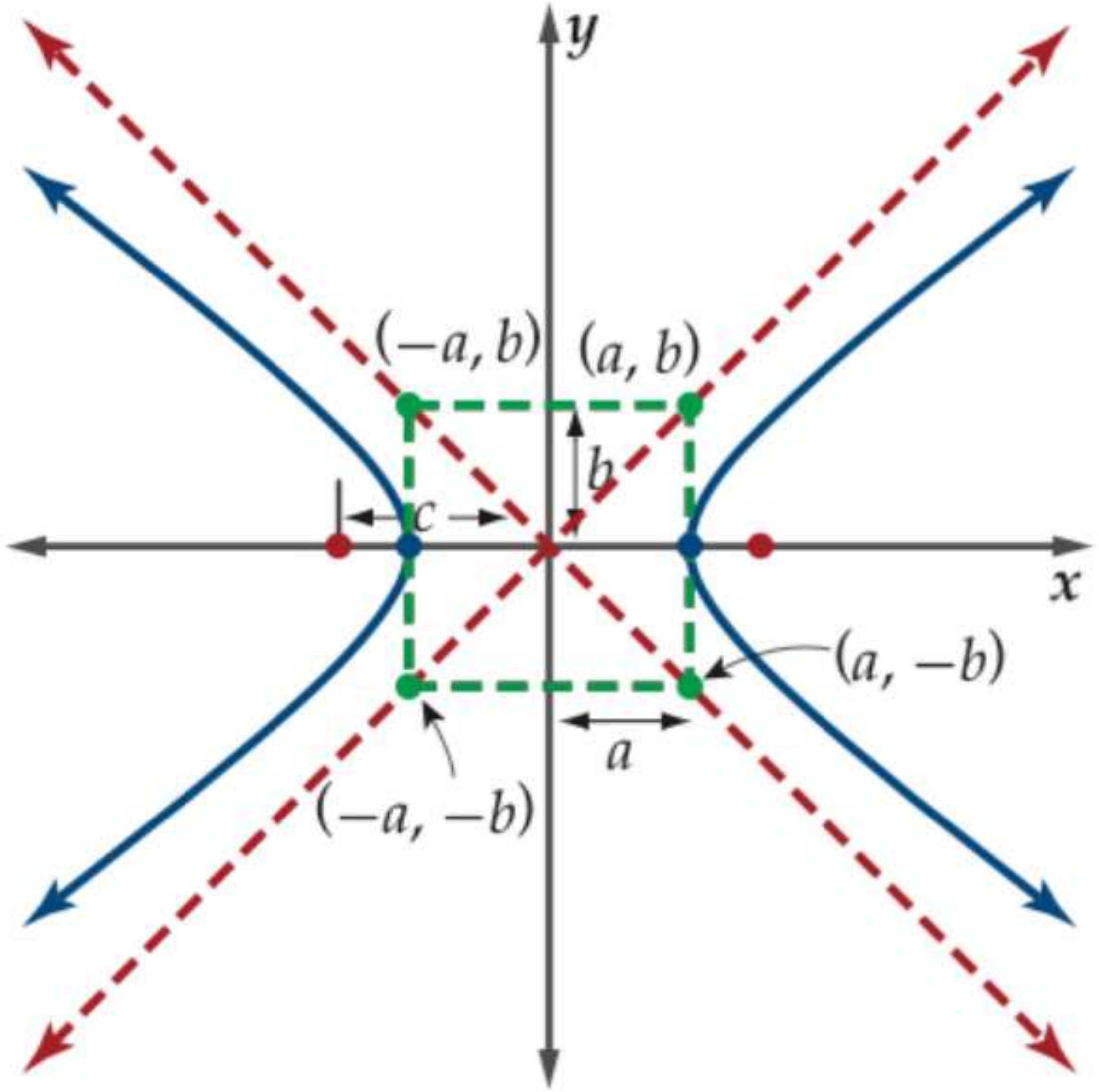


يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، و**رأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.



لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.

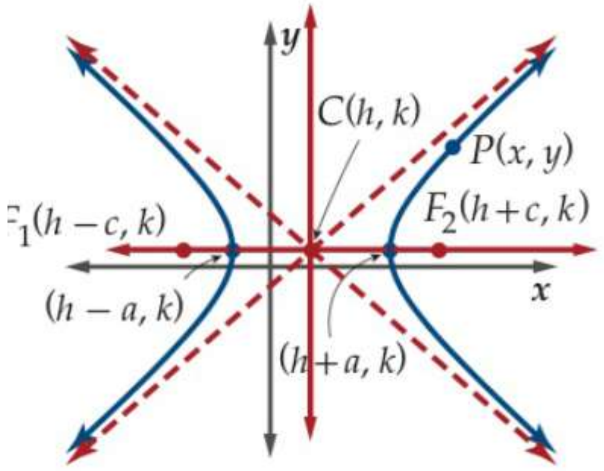


إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:



يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$.
وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} = 2a$$

خاصية التوزيع ثم التجميع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = 2a$$

اجمع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2}$$

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$$

بسّط
$$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$$

اقسم الطرفين على -4 .
$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$$

ربّع الطرفين
$$a^2[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

الخاصية التوزيعية
$$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

بسّط
$$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

الخاصية التوزيعية
$$(a^2 - c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$a^2 - c^2 = -b^2$
$$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$$

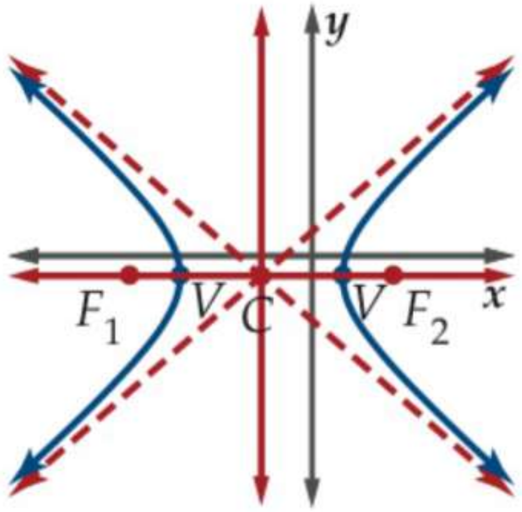
اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

مفهوم أساسي
خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع أفقي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

المحور القاطع: $y = k$، وطوله $2a$

المحور المرافق: $x = h$، وطوله $2b$

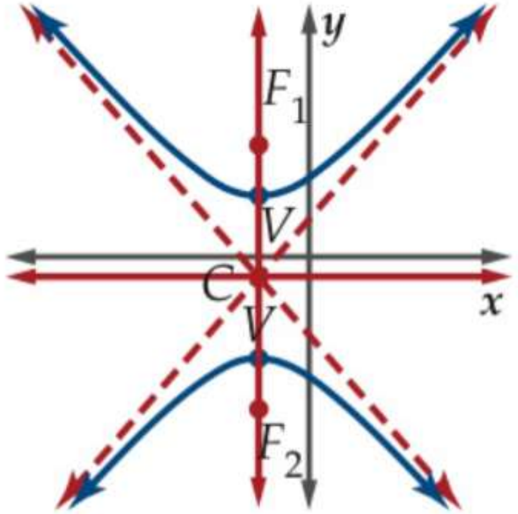
خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع رأسي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

المحور القاطع: $x = h$، وطوله $2a$

المحور المرافق: $y = k$، وطوله $2b$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

طول البعد البؤري: $2C$

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: أفقي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x

المركز: $(-1, -2)$ — (h, k)

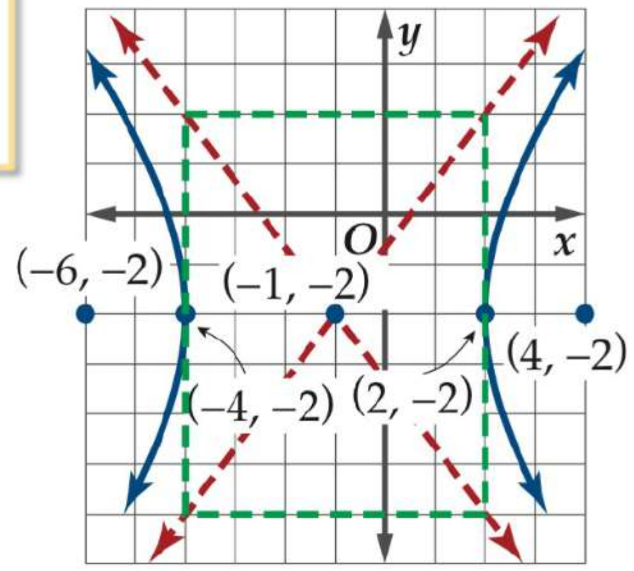
الرأسان: $(2, -2), (-4, -2)$ — $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(4, -2), (-6, -2)$ — $(h \pm c, k)$

خطا التقارب: $y + 2 = \frac{4}{3}(x+1)$, $y + 2 = -\frac{4}{3}(x+1)$ — $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \quad , \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



تنبيه!

عندما تمثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y، فإن اتجاه القطع رأسي.

تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B) $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

$25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$	المعادلة الأصلية
$(25y^2 + 100y) + (-16x^2 + 96x) = 444$	جمِّع الحدود المتشابهة
$25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$	حلِّل
$25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$	أكمل المربع
$25(y + 2)^2 - 16(x - 3)^2 = 400$	حلِّل وبسِّط
$\frac{(y + 2)^2}{16} - \frac{(x - 3)^2}{25} = 1$	اقسم كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16 + 25} \approx 6.4$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1 .

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

الاتجاه: رأسي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .

المركز: $(3, -2)$ — (h, k)

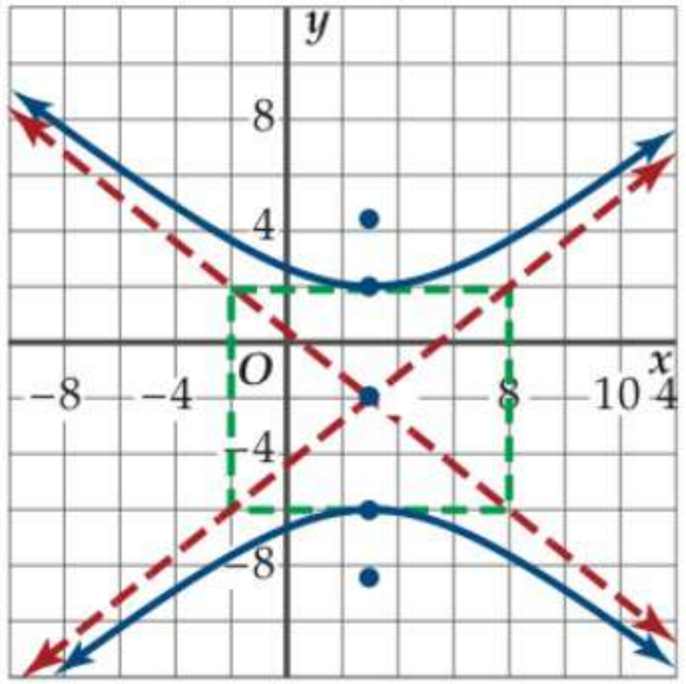
الرأسان: $(3, 2), (3, -6)$ — $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(3, 4.4), (3, -8.4)$ — $(h, k \pm c)$

خطا التقارب: $y-(-2) = -\frac{4}{5}(x-3)$, $y-(-2) = \frac{4}{5}(x-3)$ — $y - k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$

$y = \frac{-4}{5}x + \frac{2}{5}$, $y = \frac{4}{5}x - \frac{22}{5}$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعدَيه $2a = 8$، والبعد الآخر $2b = 10$، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَّي التقارب $2c = 12.8$
ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبَي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)

كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولوينوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية وقد طوَّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

تحقق من فهمك

(2A $4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$

(2B $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

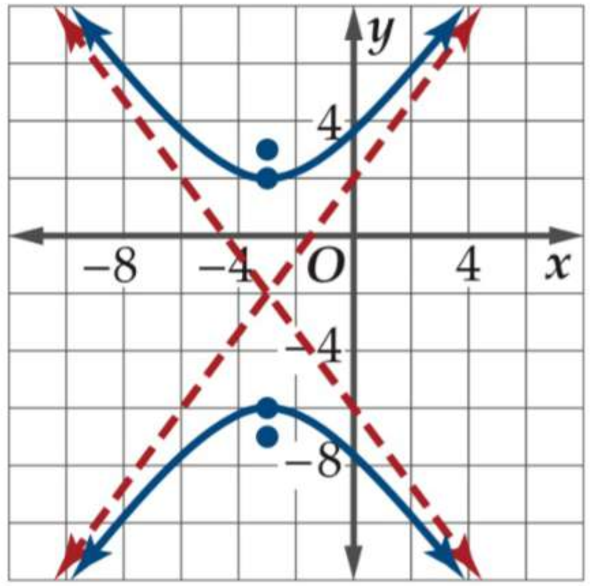
بما أنّ إحداثيَّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $\left(\frac{-3 -3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (-3, -2)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

$a = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-(-2))^2} = 4$ المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = 5$ المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b = 3$ $c^2 = a^2 + b^2$



الشكل 4.3.1

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. انظر الشكل 4.3.1 .

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $(-6, 0) = \left(\frac{-3 - 9}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ المسافة بين أي من الرأسين والمركز

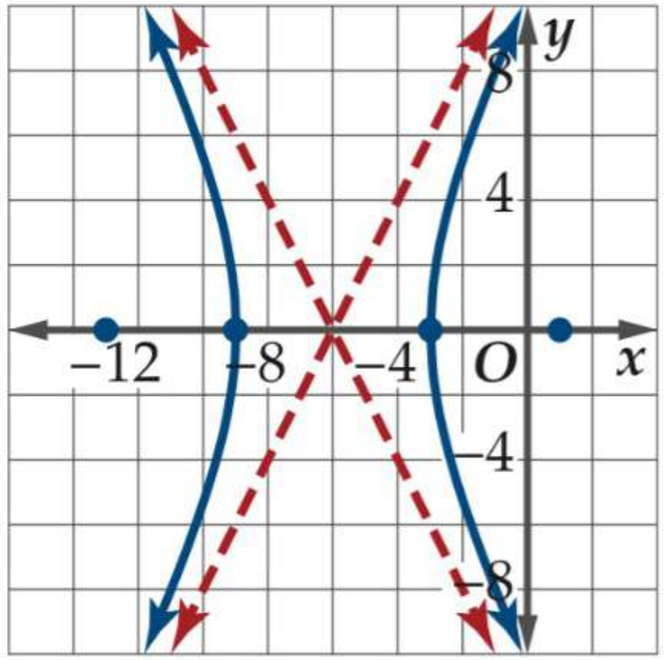
ميلا خطي التقارب: $\pm \frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ $a = 3$

$b = 6$ بسِّط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x + 6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، انظر الشكل 4.3.2 .



الشكل 4.3.2

تحقق من فهمك 3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

تحقق من فهمك

3B) البؤرتان $(-2, 12)$, $(-2, 2)$، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$, $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1 ، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c	$e = \frac{c}{a}$	صيغة الاختلاف المركزي
$c^2 = 48 + 36$	$a^2 = 48, b^2 = 36$	$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$	$a = \sqrt{48}$ ،$c = \sqrt{84}$
$c = \sqrt{84}$	بسّط	≈ 1.32	بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1 \quad (4A$$

$$\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1 \quad (4B$$

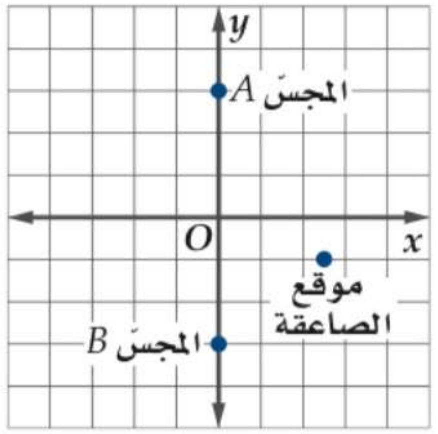
مثال 5 من واقع الحياة

تطبيقات على القطع الزائد

أرصاد: يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار $6\,\text{km}$، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار $1.5\,\text{km}$ على بعده عن المجس B .

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

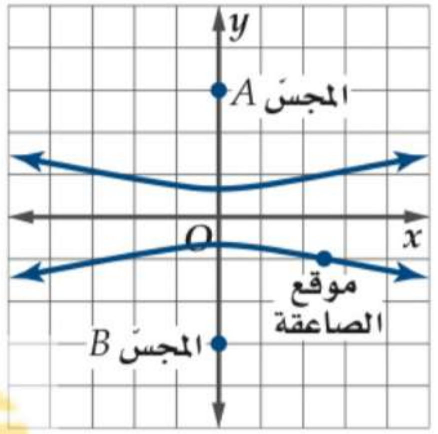
a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.



حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا $c = 3$. تذكَّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار $1.5\,\text{km}$ على بعدها عن المجس B، فإن $2a = 1.5$، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b .

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c
$3^2 = 0.75^2 + b^2$	$c = 3\,,\, a = 0.75$
$8.4375 = b^2$	بسِّط



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2, b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثِّل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$ ، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A ، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y .

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1 \quad x = 2.5$$

$$y \approx \pm 0.99 \quad \text{حل بالنسبة لـ } y$$

وحيث إن موقع الصاعقة في الربع الرابع، لذا فإن قيمة y هي -0.99 تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

تحقق من فهمك

5) **ملاحة بحرية:** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًّا .

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(100, 0)$, $(-100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(36 **تبرير:** افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟

باتَ الحلُمُ قريباً

تحديد أنواع القطوع المخروطية

رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحديد أنواع القطوع المخروطية

فيما سبق:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.

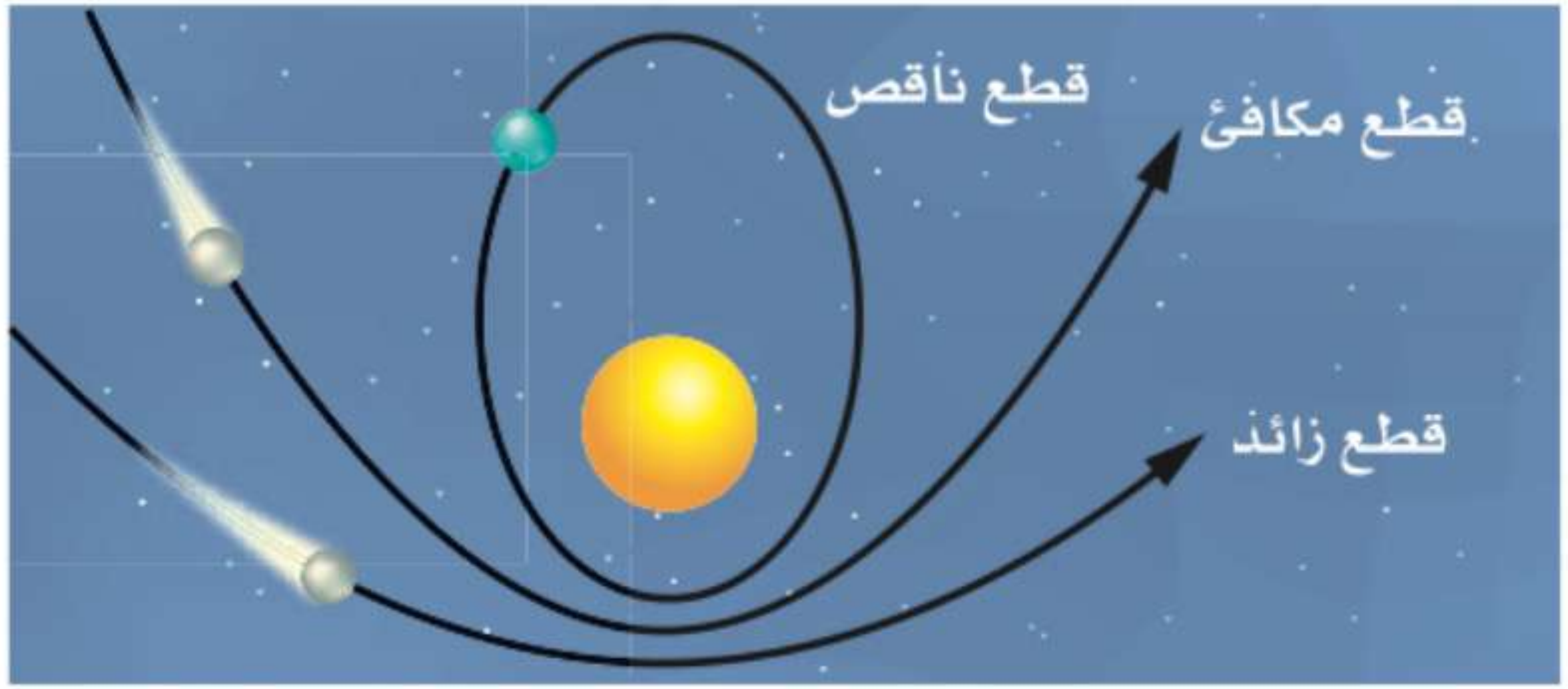
والآن:

درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.
(الدروس من 1 – 4 إلى 3 – 4)

تحديد أنواع القطوع المخروطية

لمـــاذا

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثّل مركز الشمس بؤرة للقطع.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

مثال١ :كتابة المعادلة العامة للقطع المخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله:

a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$

$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$	المعادلة الأصلية
$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$	حلّل وبسّط
$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$	مربع كامل
$\dfrac{(x-4)^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$	اقسم كل حدّ على 400

بما أن المعادلة على الصورة $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال١: كتابة المعادلة العامة للقطع المخروطي على الصورة القياسية

$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$ (b

المعادلة الأصلية	$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$
جمِّع الحدود المتشابهة	$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$
أكمل المربع	$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$
حلِّل وبسِّط	$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$
اقسم كلا الطرفين على 16	$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

بما أنَّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

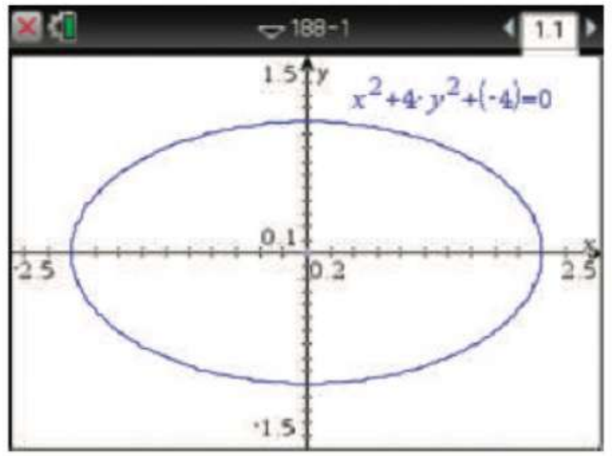
تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز B^2-4AC.

مفهوم أساسي: تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2-4AC=0$
قطع ناقص	$B^2-4AC<0,\ A\neq C$ أو $B\neq 0$
دائرة	$B^2-4AC<0,\ B=0,\ A=C$
قطع زائد	$B^2-4AC>0$

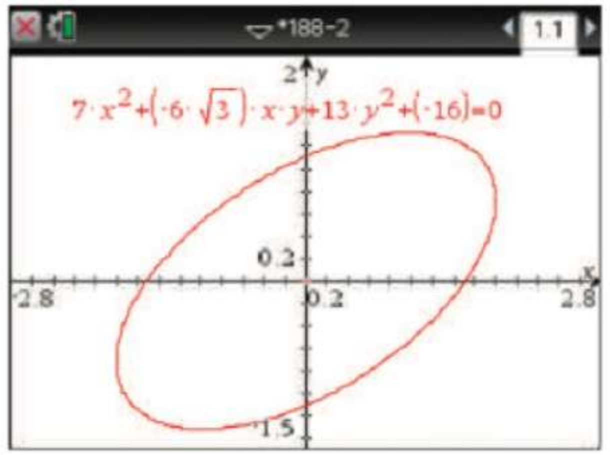
يكون القطع أفقيًا أو رأسيًا عندما $B=0$، أما إذا كانت $B\neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًا ولا رأسيًا.

قطع ناقص أفقي: $B=0$

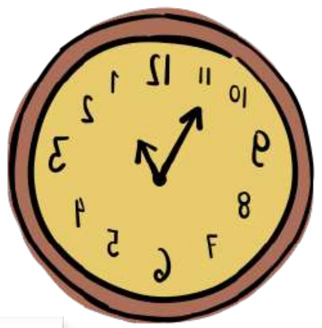


$x^2+4y^2-4=0$

قطع ناقص ليس رأسيًا ولا أفقيًا: $B\neq 0$



$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$



مثال٢: تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

$A = 4, B = -3, C = 1$

المميز يساوي $(-3)^2 - 4(4)(1) = -7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$، فإن المعادلة تمثِّل قطعًا ناقصًا.

مثال٢: تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

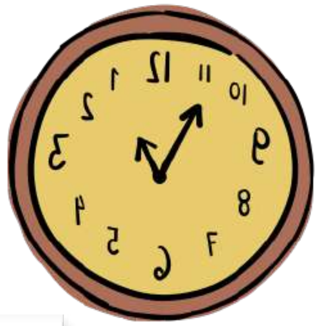
حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

b) $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

$A = 3, B = 2, C = -5$

المميز يساوي $2^2 - 4(3)(-5) = 64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.



مثال٢: تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

c) $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

$A = 0, B = 0, C = 4$

المميز يساوي $0^2 - 4(0)(4) = 0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثِّل قطع مكافئ.

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحةأحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا .

"عندما يكون القطع رأسيًّا، وتكون $A = C$ ، فإن القطع دائرة".


تمّ بحمد الله وكرمه

المراجع:

ماجروهل رياضيات ٥ المستوى الخامس المسار العلمي وزارة التعليم

الصور من الشبكة العنكبوتية

الأستاذة / شيخة راجح البقمي

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بـ:

سلسلة عروض رفعة الرياضيات (رياضيات 5) ثالث ثانوي

تحت رقم إيداع 1443/4041 وتاريخ 1443/04/23 هـ، ورقم ردمك 978-603-03-9685-6